Ενεργά Φίλτρα

Ηλεκτρονική
Γ' τάξη
Λέκτορας Ε. Καραγιάννη

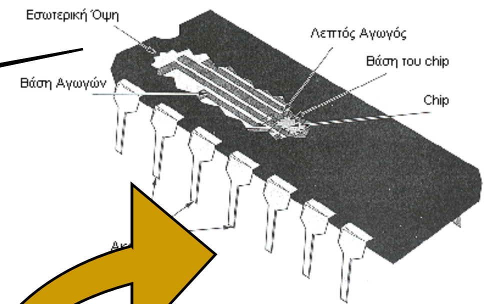
2

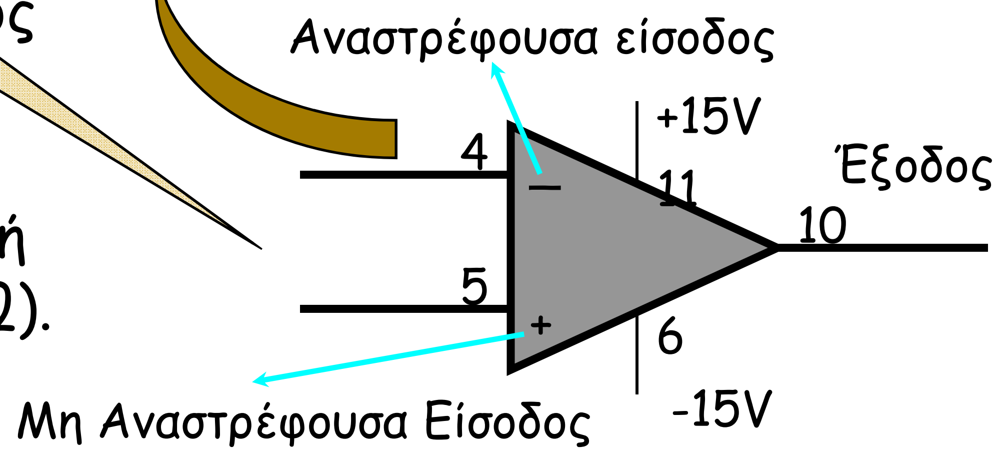
Υπενθύμιση: Τι είναι ενεργό και τι παθητικό?

- Αυτό που ξέρουμε
  - Το transistor δίνει στην έξοδο μεγαλύτερο σήμα από αυτό της εισόδου, και η αναλογία δεν είναι σταθερή.
  - Η αντίσταση είναι πάντα τα Ωhm της ονομαστικής της τιμής ανεξάρτητα του ρεύματος που περνάει από μέσα της
  - Όλα τα ολοκληρωμένα κυκλώματα χρειάζονται DC τροφοδοσία για να αναγνωρίσουν τι είναι μηδέν και τι είναι ένα.
- Πώς μπορούμε να τα κατατάξουμε
  - Αν η έξοδος εξαρτάται μόνο από την είσοδο και τις χαρακτηριστικές σταθερές τιμές του στοιχείου (πχ αντίσταση) ή του κυκλώματος (πχ διαιρέτης τάσης ή φίλτρο) ή του συστήματος (πχ οπτική ίνα) και από τίποτε άλλο, τότε το στοιχείο, κύκλωμα ή σύστημα είναι παθητικό
  - Αν μπορέσουμε να δημιουργήσουμε σήμα μεγαλύτερο από αυτό που διαθέτουμε τότε αυτός που δημιούργησε το σήμα είναι ενεργός και προφανώς χρειάστηκε και κάποιο άλλο σήμα για να το κάνει αυτό (DC τροφοδοσία). Αυτός μπορεί να είναι ένας ενισχυτής.
  - Οποιοδήποτε κύκλωμα έχει DC τροφοδοσία χαρακτηρίζεται ως ενεργό.
  - Οποιοδήποτε κύκλωμα μπορεί να έχει ενίσχυση είναι ενεργό, ενώ ένα καλώδιο που προφανώς έχει απώλειες είναι παθητικό

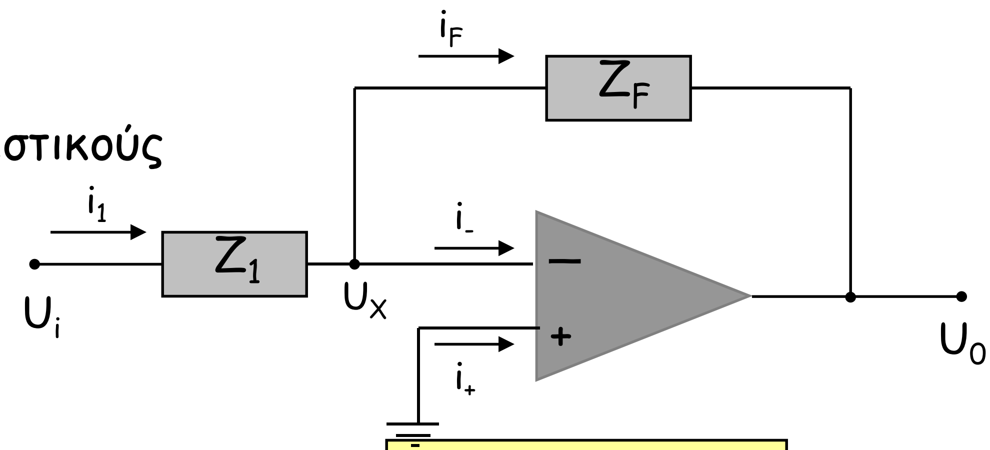
Ο Τελεστικός Ενισχυτής

- Είναι ένα πολύπλοκο ηλεκτρονικό κύκλωμα…
- Υπάρχει στο Ολοκληρωμένο 741!
- Το Block Diagram είναι απλό!!
- Έχει πολύ μεγάλο κέρδος τάσης (~ 10^5).
- Έχει μεγάλη αντίσταση εισόδου ($4M\Omega$) και μικρή αντίσταση εξόδου (100Ω).





Αναστρέφουσα Συνδεσμολογία



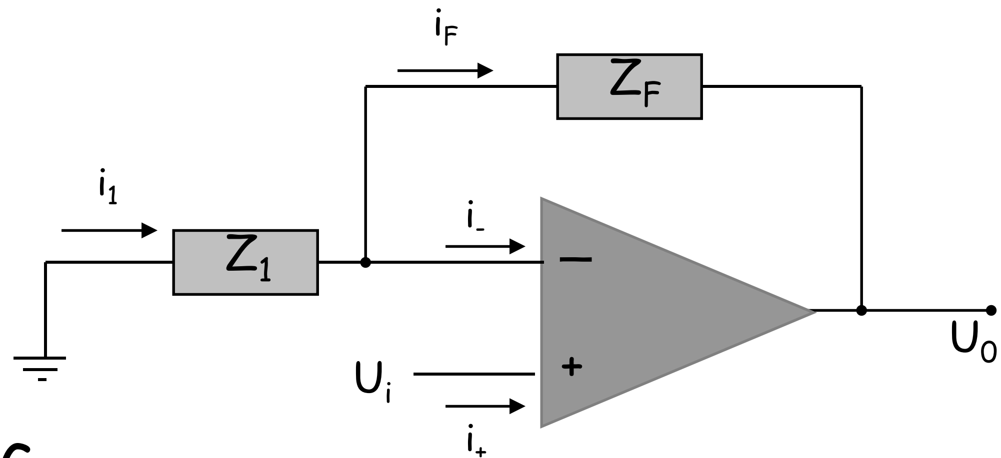
- Γενικές παραδοχές για τους τελεστικούς ενισχυτές
  - $U_+ = U_- = U_X$
  - $i_+ = i_- \approx 0$
- Επίλυση Κυκλώματος

$$i_1 = i_- + i_F \overset{i_-=0}{\Rightarrow} i_1 = i_F \Rightarrow \frac{U_X - U_i}{Z_F} = \frac{U_o - U_X}{Z_1} \overset{U_X=0}{\Rightarrow} \boxed{A_V = \frac{U_o}{U_i} = -\frac{Z_F}{Z_1}}$$

- Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως διαφοριστής
  - Αν $Z_F=R$ και $Z_1=1/j\omega C$ τότε $\frac{U_o}{U_i} = -j\omega CR = -sRC \Rightarrow U_o = -RC\frac{dU_i}{dt}$
- Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως ολοκληρωτής
  - Αν $Z_1=R$ και $Z_F=1/j\omega C$ τότε $\frac{U_o}{U_i} = -\frac{1}{j\omega RC} = -\frac{1}{sRC} \Rightarrow U_o = \frac{1}{sRC}\cdot\int U_i dt$

Μη Αναστρέφουσα Συνδεσμολογία

- Γενική παραδοχή
  - $U_+=U_-=U_i$



- Επίλυση Κυκλώματος

$$i_1 = i_F \Rightarrow \frac{U_i - 0}{Z_1} = \frac{U_o - U_i}{Z_F} \Rightarrow \frac{Z_F}{Z_1} = \frac{U_o}{U_i} - 1 \Rightarrow \boxed{A_V = \frac{U_o}{U_i} = \frac{Z_F}{Z_1} + 1}$$

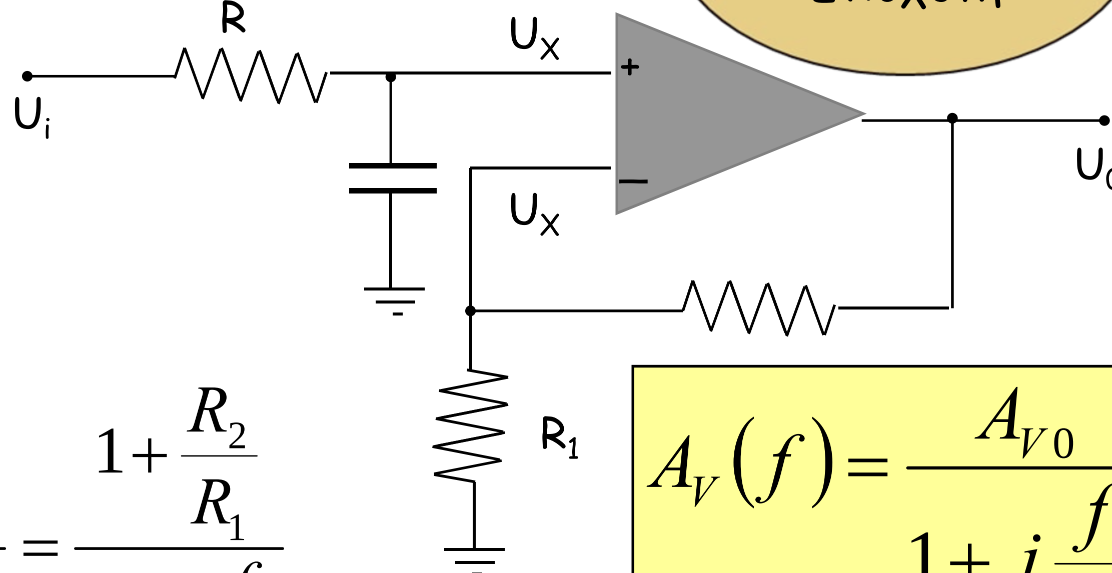
Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο Sallen-Key

Συνδεσμολογία Μη Αναστρέφοντα Ενισχυτή

Διαιρέτες τάσης

$$\frac{U_X}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_X}{U_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$



Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{U_0}{U_i} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + j\frac{f}{f_L}}$$

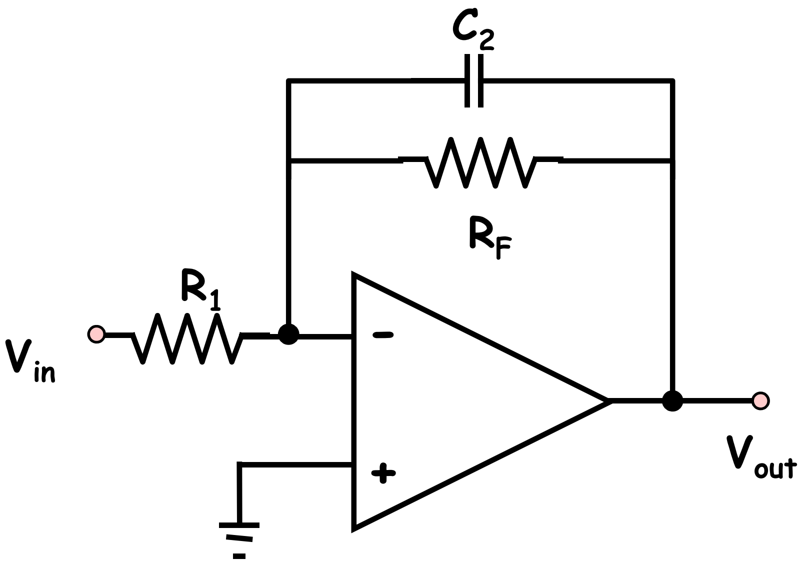
$$A_V(f) = \frac{A_{V0}}{1 + j\frac{f}{f_L}}$$

όπου

$$f_L = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

$$A_{V0} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο (B)



Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή

Συχνότητα αποκοπής:

$$f_H = 1 / (2\pi R_F C_2)$$

Κέρδος DC $\quad A_{V0} = -R_F / R_1$

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$A_V = A_{V0} \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$

Παράδειγμα:

Σχεδιάστε ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων με συχνότητα αποκοπής στα 5kHz, και DC κέρδος 10:

Δύο εξισώσεις, Τρεις Άγνωστοι

Παράδειγμα Ενεργού Βαθυπερατού Φίλτρο

- R=5 KΩ
- C=3.14 nF
- R_1=1KΩ
- R_2=9KΩ

$$|A_V| = \left|\frac{U_0}{U_i}\right| = \frac{\boxed{A_{V0}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_L}\right)^2}}$$ και $\varphi=-\arctan(f/f_L)$

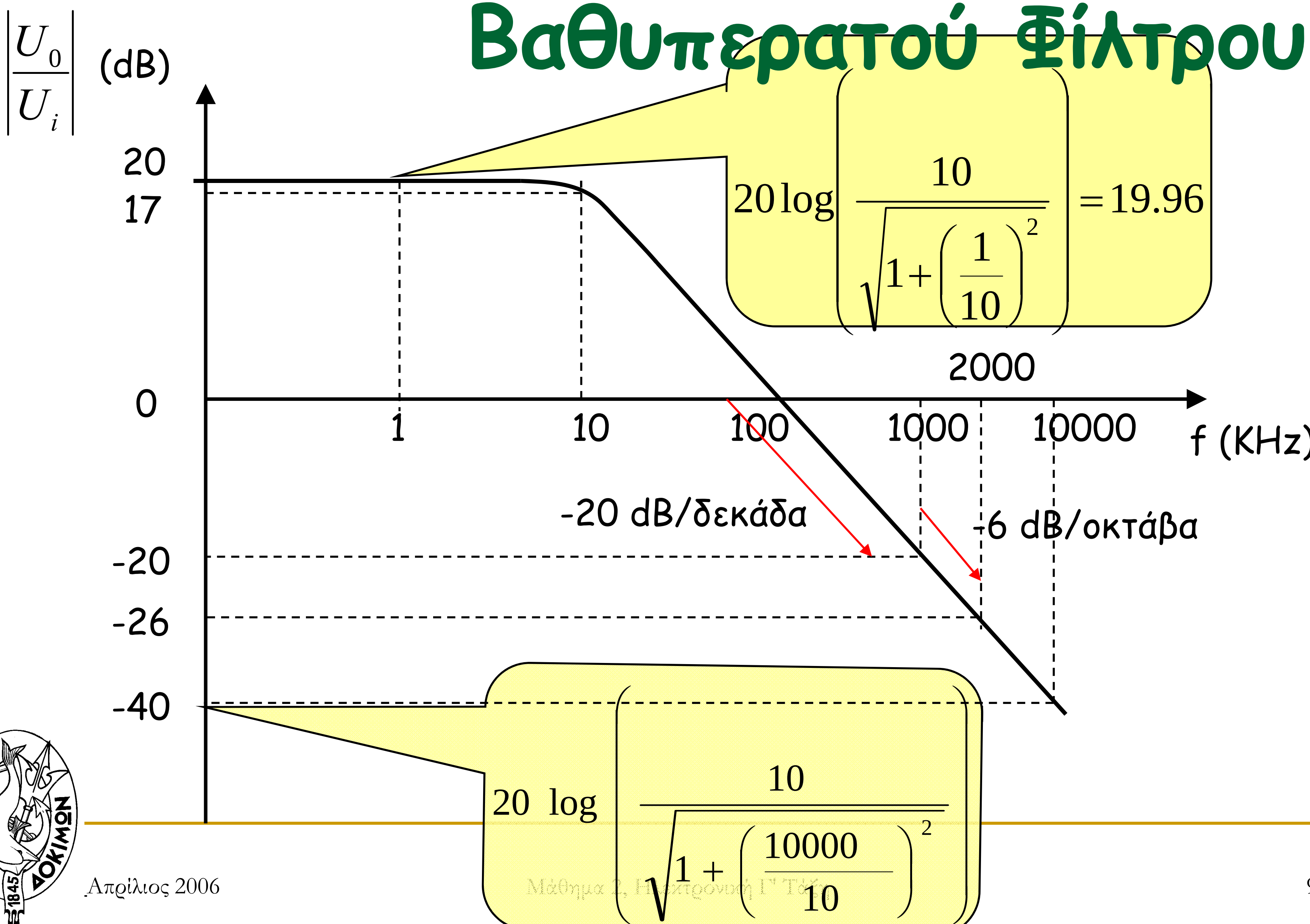
Αυτό το φίλτρο, σε σχέση με το παθητικό βαθυπερατό φίλτρο, έχει κέρδος, δηλαδή είναι και ενισχυτής!!!

Το A_{V0} λέγεται κέρδος στη ζώνη διέλευσης ή κέρδος χαμηλών συχνοτήτων

προκύπτει

f_L=10KHz και $A_{V0} = 1 + \dfrac{R_2}{R_1}$=10

Απόκριση Συχνότητας Βαθυπερατού Φίλτρου

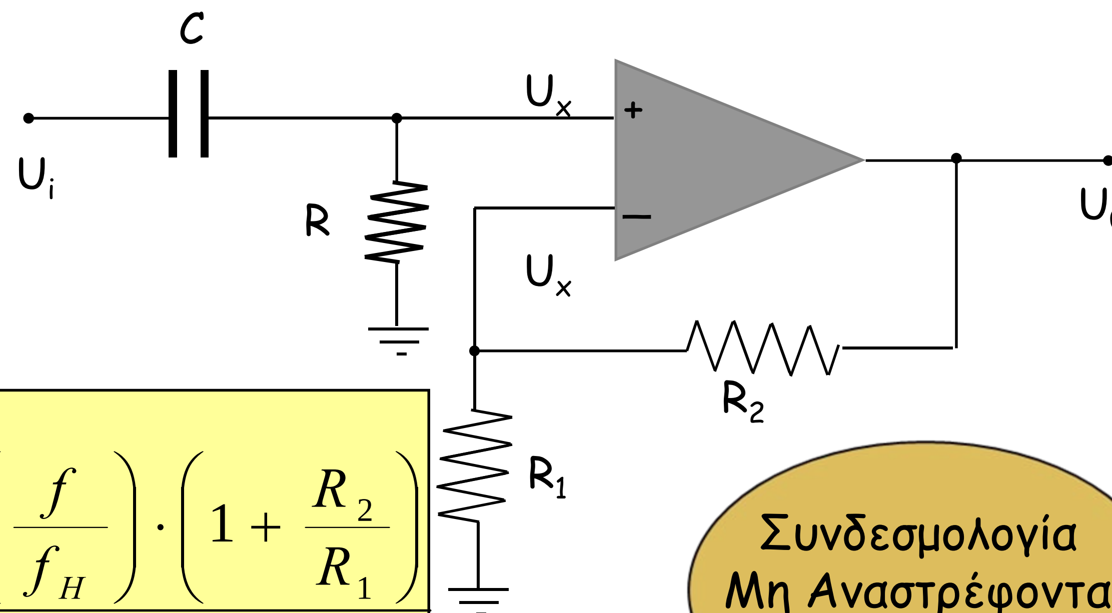


Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο Sallen-Key

$$\frac{U_x}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_x}{U_i} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

Διαιρέτες τάσης



$$A_V = \frac{U_0}{U_i} = \frac{j\left(\dfrac{f}{f_H}\right)\cdot\left(1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)}{1 + j\,\dfrac{f}{f_H}}$$

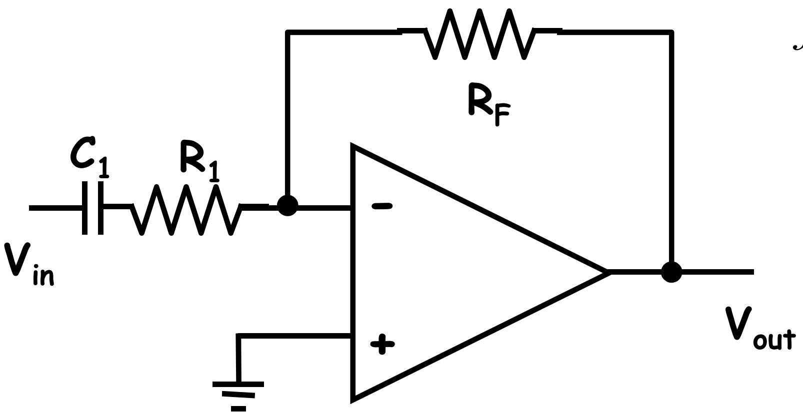
Συνδεσμολογία Μη Αναστρέφοντα Ενισχυτή

όπου

$$f_H = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο (Β)

Συνδεσμολογία Αναστρέφοντα Ενισχυτή



Συχνότητα αποκοπής

$$f_H = 1 / (2\pi R_1 C_1)$$

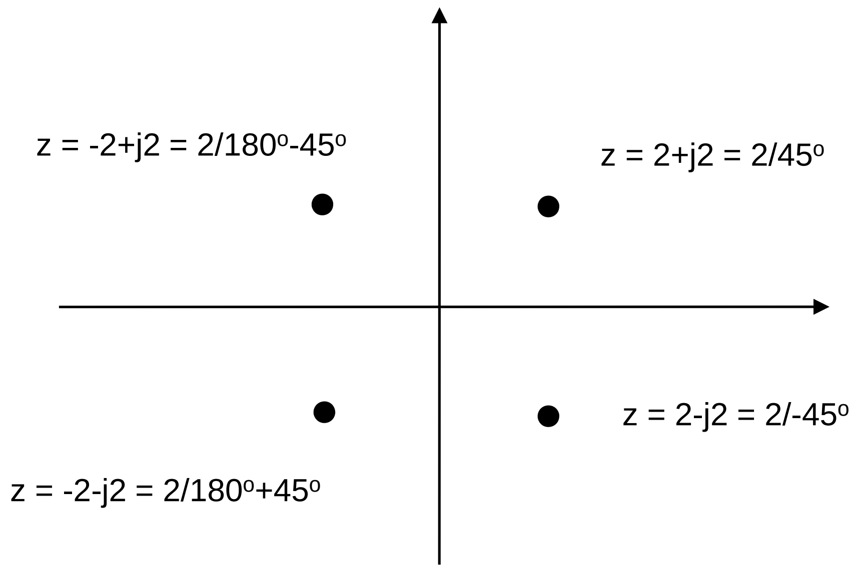
Κέρδος στις υψηλές συχνότητες

$$A_{V0} = R_F / R_1$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$A_V = -A_{V0} \frac{s}{s+\omega_0}$$

Δύο Εξισώσεις, Τρεις άγνωστοι:
Επιλέξτε ένα στοιχείο βασιζόμενοι σε άλλες συνθήκες και καθορίστε τις τιμές των άλλων δύο στοιχείων


z = -2+j2 = 2/180o-45o
z = 2+j2 = 2/45o
z = 2-j2 = 2/-45o
z = -2-j2 = 2/180o+45o

Παράδειγμα Ενεργού Υψιπερατού Φίλτρου

- R=5 KΩ
- C=3.14 nF
- R1=1KΩ
- R2=9KΩ

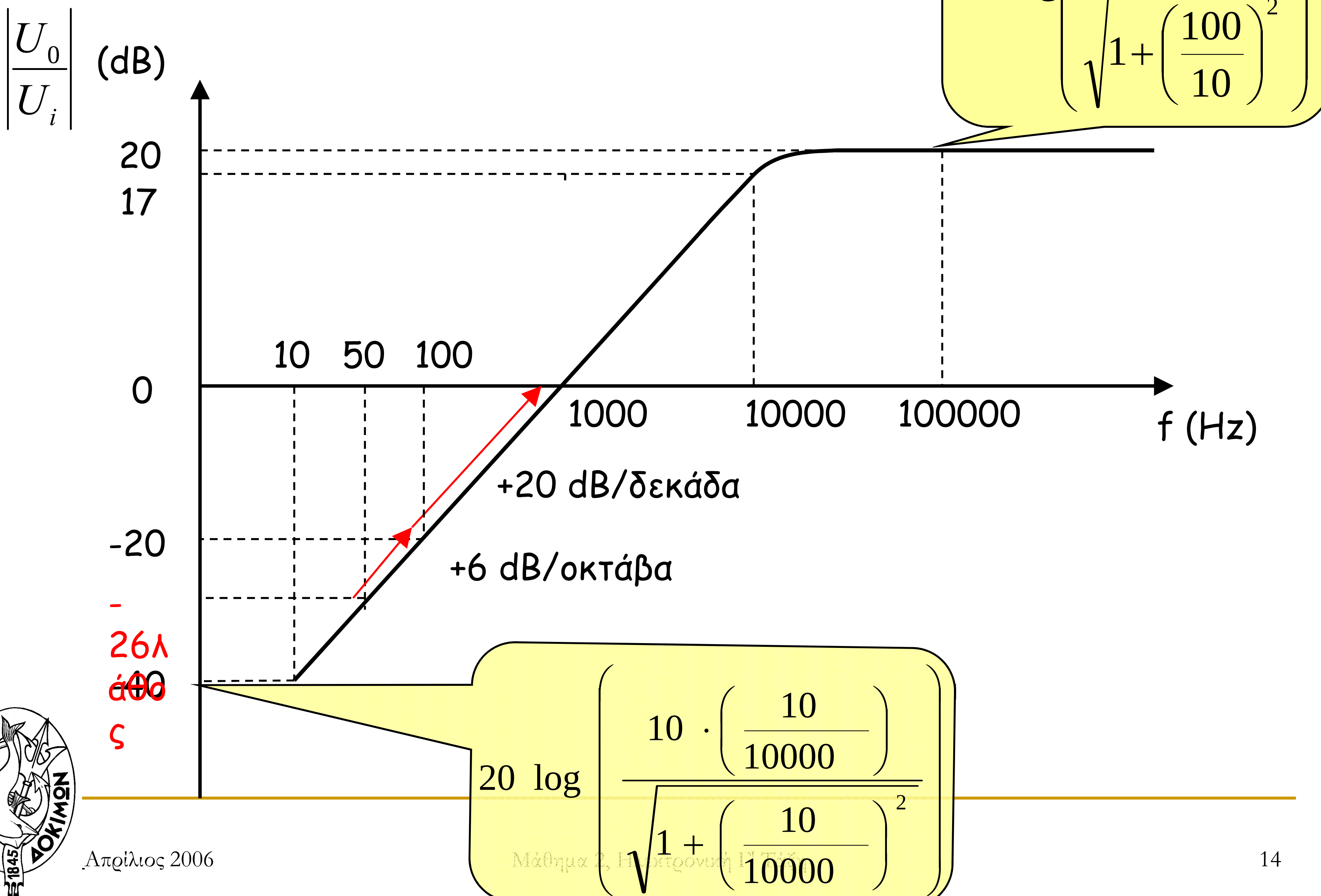
$$|A_V| = \left|\frac{U_0}{U_i}\right| = \frac{A_{V0}\cdot\frac{f}{f_H}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_H}\right)^2}}$$

και $\varphi=90^o-\arctan(f/f_H)$

f_H =10KHz και $A_{V0} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ =10

Αυτό το φίλτρο, σε σχέση με το παθητικό υψιπερατό φίλτρο, έχει κέρδος, δηλαδή είναι και ενισχυτης!!!

Απόκριση Συχνότητας



$$20\log\left(\frac{10\cdot\left(\frac{100}{10}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{100}{10}\right)^2}}\right)$$

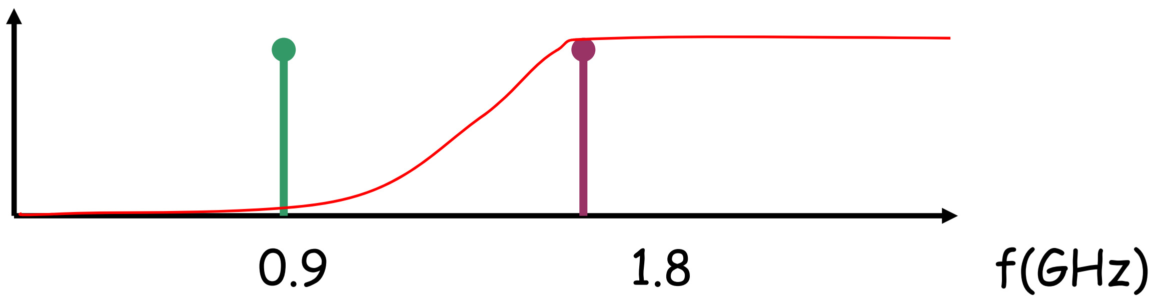
$$20\ \log\left(\frac{10\ \cdot\left(\frac{10}{10000}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{10}{10000}\right)^2}}\right)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- Να σχεδιαστεί φίλτρο που να επιτρέπει μόνο στη συχνότητα της COSMOTE να διέρχεται αλλά όχι τη συχνότητα της VODAFONE.
- Συγχρόνως, να ενισχύει το σήμα της COSMOTE κατά 30dB και να απορρίπτει το σήμα της VODAFONE κατά τουλάχιστον 20 dB.
- Γιατί το πρόβλημα δεν έχει λύση χρησιμοποιώντας τις ως τώρα γνώσεις μας?

Αντιμετώπιση του Προβλήματος

- Η Cosmote εκπέμπει στα 1800 MHz
- Η Vodafone στα 900 MHz



- Χρειαζόμαστε ενεργό υψιπερατό φίλτρο εφόσον το κέρδος πρέπει να είναι περισσότερο από 0 dB.

Επιλογή στοιχείων

Από τη θεωρία και από την εκφώνηση του προβλήματος έχουμε:

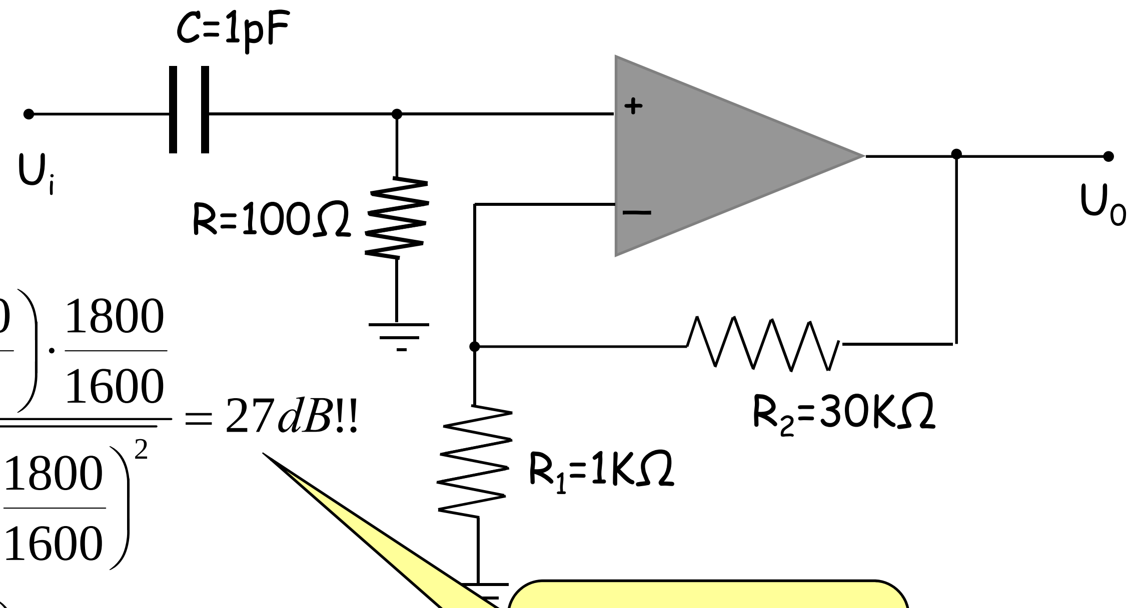
$$20\log\frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{f}{f_H}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_H}\right)^2}}=30\Rightarrow\frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{f}{f_H}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_H}\right)^2}}=10^{3/2}=31.6\overset{f>>f_H}{\Rightarrow}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cong 30$$

Επομένως, επιλέγουμε:
R_2=30 KΩ και R_1=1KΩ

Αν επιλέξουμε συχνότητα αποκοπής **1600 MHz**
και χρησιμοποιήσουμε πυκνωτή 1pF, προκύπτει R=0.1Ω,
η οποία αντίσταση δεν υπάρχει στο εμπόριο.
Επομένως, επιλέγουμε πυκνωτή C=1pF
και προκύπτει η τιμή της αντίστασης R=100Ω

$$f_H=\frac{1}{2\pi\cdot R\cdot C}$$

Σχεδίαση Φίλτρου



$$A_V(1800MHz) = 20\log \frac{\left(1+\frac{30}{1}\right)\cdot\frac{1800}{1600}}{\sqrt{1+\left(\frac{1800}{1600}\right)^2}} = 27dB!!$$

$$A_V(900MHz) = 20\log \frac{\left(1+\frac{30}{1}\right)\cdot\frac{900}{1600}}{\sqrt{1+\left(\frac{900}{1600}\right)^2}} = 24dB!!!!!!!$$

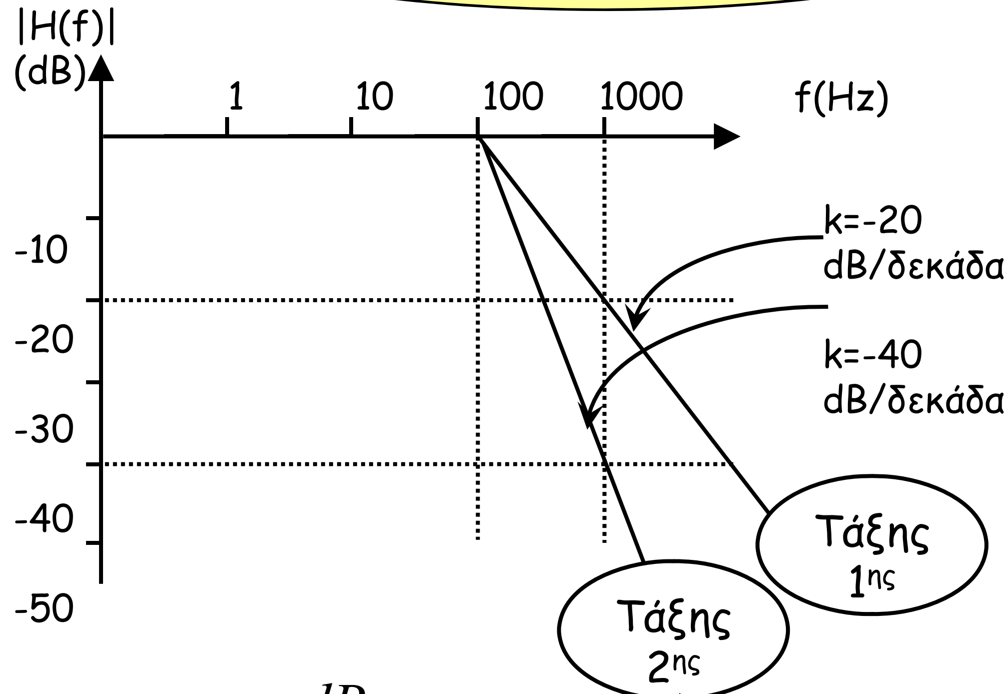
Πρέπει να μεγαλώσουμε την R_2

Τι χρειαζόμαστε ?

Τάξη Φίλτρου n

Συνήθως ταυτίζεται με τον αριθμό των πηνίων ή πυκνωτών του κυκλώματος

- Η συνάρτηση μεταφοράς H(s) εκφράζεται από μία παράσταση στην οποία ο παρονομαστής είναι ένα πολυώνυμο ως προς s=jw, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια. Ο αλγεβρικός βαθμός αυτού του πολυωνύμου ονομάζεται βαθμός ή τάξη n του φίλτρου.
- Στην πραγματικότητα, το n καθορίζει άμεσα την κλίση (k) της μεταβατικής περιοχής της καμπύλης απόκρισης του φίλτρου. Σε λογαριθμική κλίμακα συχνοτήτων, η κλίση k, σχετίζεται με το βαθμό του φίλτρου n, με βάση τον προσσεγγιστικό τύπο:



$$k = \pm 20 \cdot n \frac{dB}{\delta\varepsilon\kappa\acute{\alpha}\delta\alpha}$$

$$k = \pm 6 \cdot n \frac{dB}{o\kappa\tau\acute{\alpha}\beta\alpha}$$

Πλησιάζει την απόκριση ιδανικού φίλτρου

Μαθηματικά πρότυπα Φίλτρων

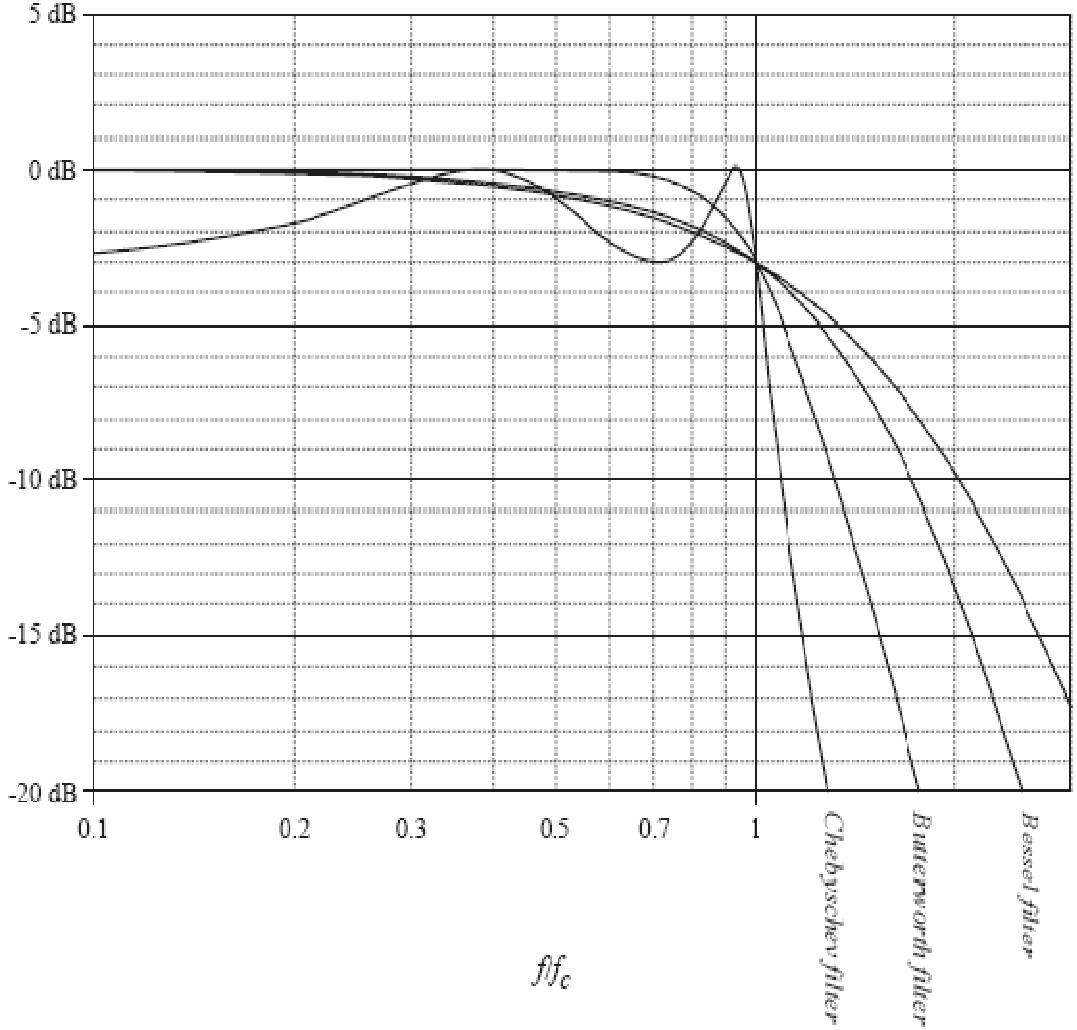
- Η συνάρτηση μεταφοράς για κάθε φίλτρο, στη γενική της μορφή είναι

$$H(s) = H_0 \frac{(s - Z_0)\cdot(s - Z_1)\cdot(s - Z_2)\cdot\ldots\cdot(s - Z_n)}{(s - P_0)\cdot(s - P_1)\cdot(s - P_2)\cdot\ldots\cdot(s - P_n)}$$

- Ο σχεδιαστής ενός φίλτρου πρέπει να γνωρίζει τουλάχιστον τις ακόλουθες προδιαγραφές:
  - Τη συχνότητα ή τις συχνότητες αποκοπής
  - Την εξασθένιση σε dB στη ζώνη απόρριψης
  - Την επιτρεπόμενη ή όχι κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης
- Στη μαθηματική ανάλυση των φίλτρων έχουν αναπτυχθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα (πρότυπα) και κυκλώματα, με τα οποία προσπαθούμε να πετύχουμε μιά όσο το δυνατό καλύτερη προσομοίωση της συμπεριφοράς των ιδανικών φίλτρων. Τα μοντέλα αυτά ταξινομούνται στις εξής 4 οικογένειες: Τα φίλτρα **Butterworth**, τα φίλτρα **Chebyshev**, τα φίλτρα **Bessel** και τα **ελλειπτικά** (Cauer) φίλτρα.

Σύγκριση αποκρίσεων φίλτρων $5^{ης}$ τάξης

Για λόγους περιορισμού της ύλης, θα μελετήσουμε μόνο τα φίλτρα Butterworth τα οποία λέγονται και μέγιστου επίπεδου κέρδους (maximally flat)



Πολυώνυμα Butterworth

Μια συνήθης προσέγγιση για ένα βαθυπερατό φίλτρο:

$$\frac{A_V(s)}{A_{V0}} = \frac{1}{B_n(s)}$$

Η οποία χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα Butterworth

n	Παράγοντες των πολυωνύμων $B_n(s)$
1	(s/ω_o+1)
2	$s/\omega_o^2+1.414s/\omega_o+1$
3	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+s/\omega_o+1)$
4	$(s/\omega_o^2+0.7654s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.8478s/\omega_o+1)$
5	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+0.6180s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.6180s/\omega_o+1)$
6	$(s/\omega_o^2+0.5176s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.414s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.9318s/\omega_o+1)$
7	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+0.4450s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.247s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.8022s/\omega_o+1)$
8	$(s/\omega_o^2+0.3986s/\omega_o+1)(s^2+1.111s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.6630s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.9622s/\omega_o+1)$

Συνάρτηση μεταφοράς ενεργού φίλτρου 2ης τάξης

Φίλτρο 1ης τάξης

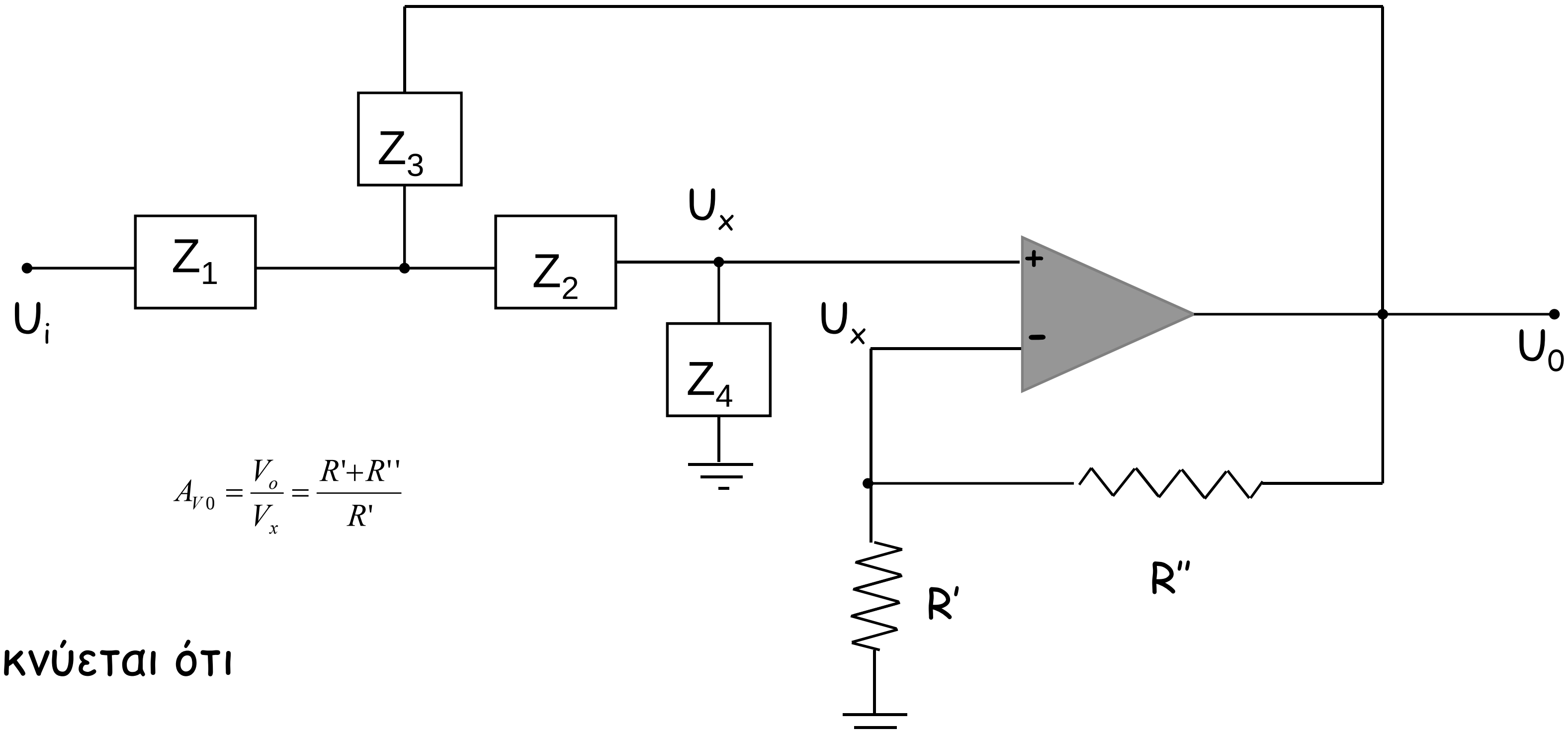
$$\frac{\dfrac{A_V(s)}{A_{V0}}}{} = \frac{1}{s/\omega_0 + 1}$$

Φίλτρο 2ης τάξης

$$\frac{A_V(s)}{A_{V0}} = \frac{1}{\left(s/\omega_0\right)^2 + 2k\left(s/\omega_0\right) + 1}$$

Όπου k είναι το μισό του συντελεστή του s του πίνακα για τα πολυώνυμα Butterworth
k=0,707

Γενικευμένο πρότυπο ενεργού φίλτρου 2ης τάξης



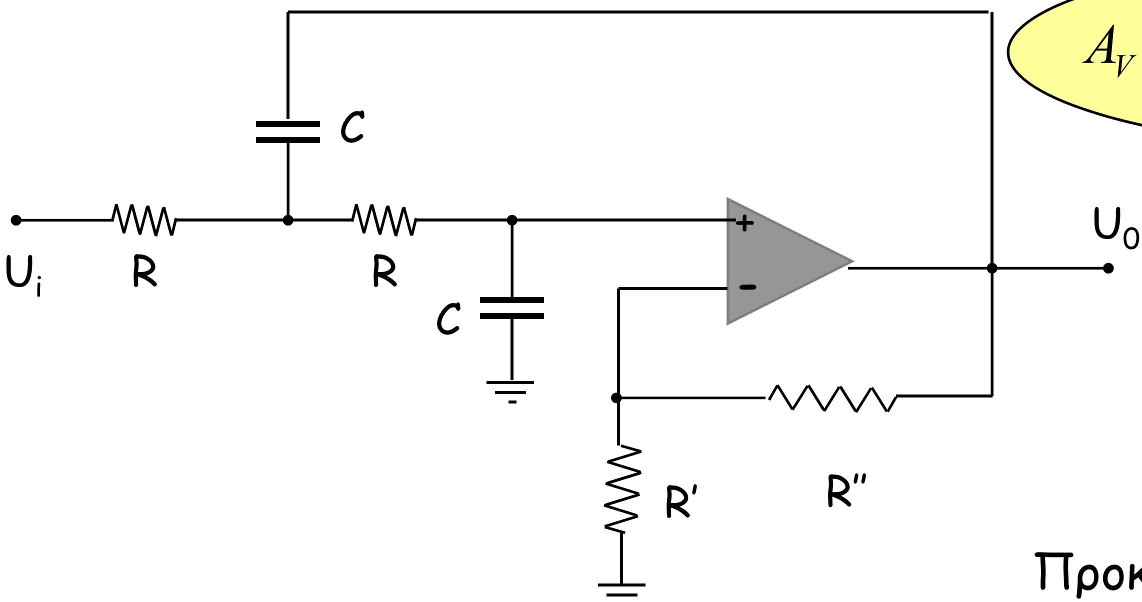
$$A_{V0} = \frac{V_o}{V_x} = \frac{R' + R''}{R'}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$A_V(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A_{V0} Z_3 Z_4}{Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_4) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 (1 - A_{V0})}$$

Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο 2ης τάξης

- Για λειτουργία βαθυπερατού φίλτρου πρέπει οι Z_1 και Z_2 να είναι αντιστάσεις και οι Z_3 και Z_4 να είναι χωρητικότητες.
- Το αντίστροφο για λειτουργία υψιπερατού φίλτρου
- Έστω $Z_1=Z_2=R$ και $Z_3=Z_4=C$



$$A_V(s) = A_{V0}\frac{\omega_0^2}{s^2 + (3 - A_{V0})\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$A_{V0} = \frac{R' + R''}{R'}$$

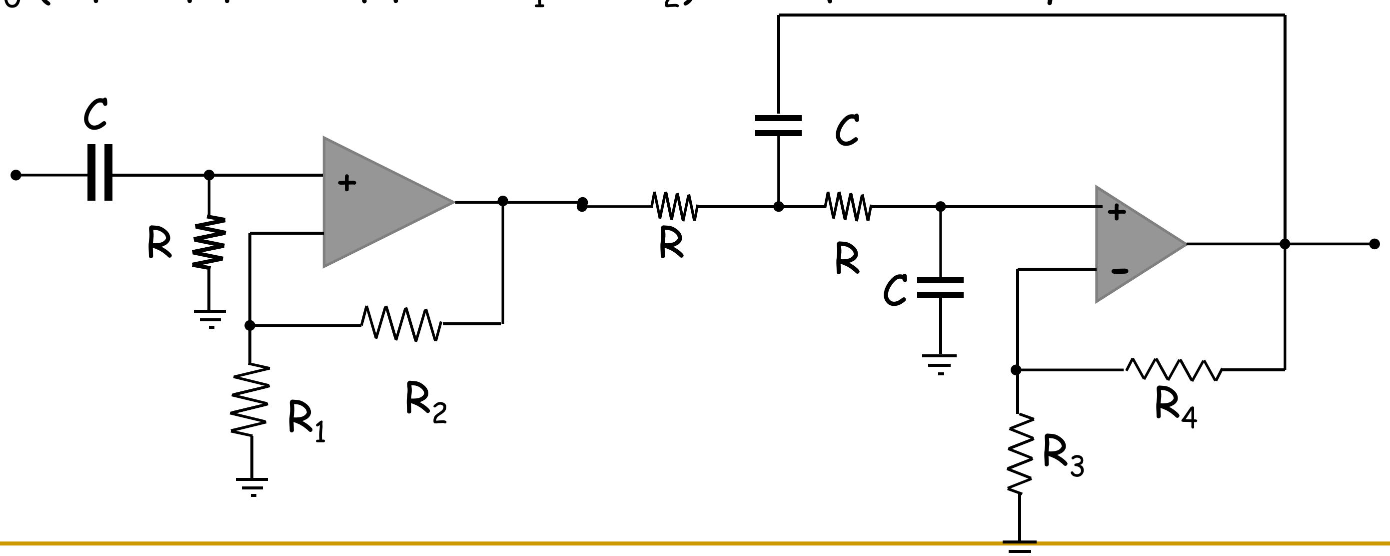
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Προκύπτει ότι $3\text{-}A_{V0}=2k=1.414$

Συνδέοντας σε σειρά τέτοια κυκλώματα σχεδιάζουμε φίλτρα Butterworth άρτιας τάξης

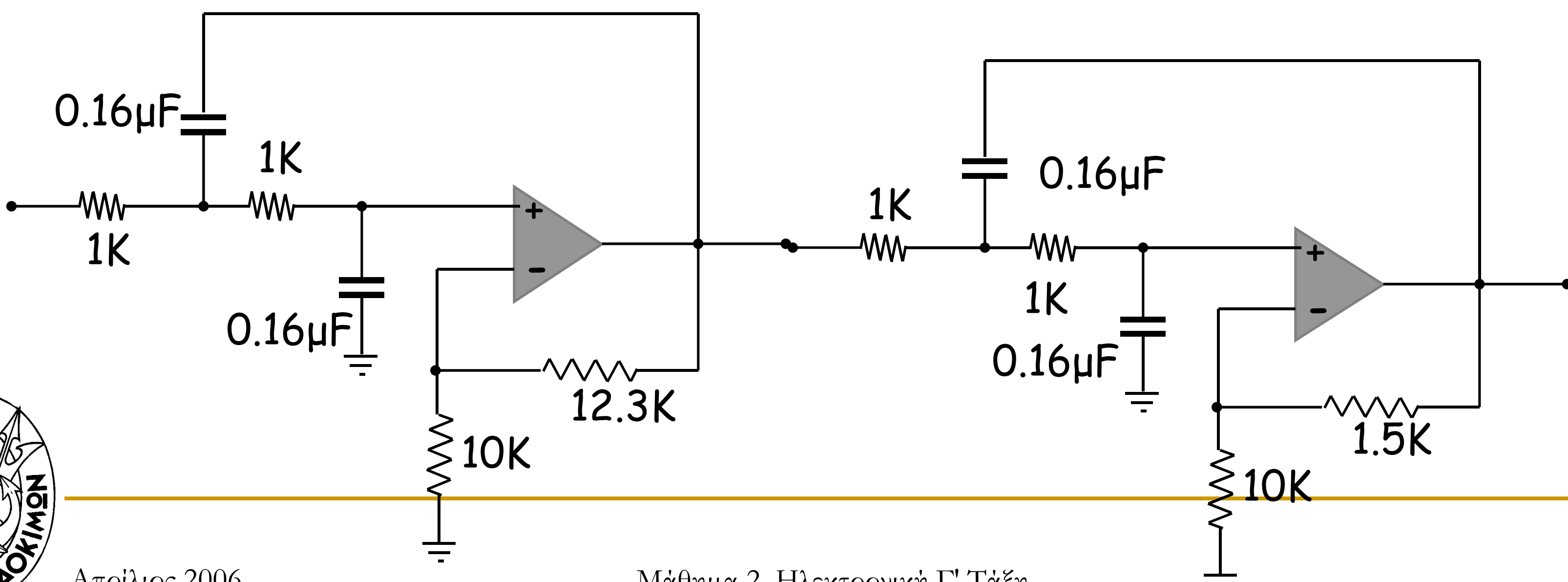
Βαθυπερατό φίλτρο $3^{ης}$ τάξης

- Για να σχεδιάσουμε βαθυπερατό φίλτρο περιττής τάξης αρκεί να συνδέσουμε ένα βαθυπερατό φίλτρο $1^{ου}$ βαθμού σε σειρά με βαθμίδες βαθυπερατού φίλτρου $2^{ης}$ τάξης.
- Τα R και C επιλέγονται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$
- Το A_{V0} του φίλτρου $2^{ης}$ τάξης (δηλαδή η επιλογή των R_3 και R_4) επιλέγεται ώστε να προκύψει 2k=1 (n=3)
- Το A_{V0} (δηλαδή η επιλογή των R_1 και R_2) επιλέγεται αυθαίρετα.



Βαθυπερατό φίλτρο 4ης τάξης

- Να σχεδιαστεί βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με κέρδος πάνω από 4 dB σε χαμηλές συχνότητες, με συχνότητα αποκοπής 1KHz και με κλίση στις υψηλές συχνότητες 24dB/οκτάβα
  - N=4
  - $A_{V1}=3-2k_1=2.235$ και $A_{V2}=3-2k_2=1.152$
  - $f_0 = \dfrac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}, R = 1K\Omega$



Επιστρέφουμε στο πρόβλημα

- Να σχεδιαστεί φίλτρο που να επιτρέπει μόνο στη συχνότητα της COSMOTE να διέρχεται αλλά όχι τη συχνότητα της VODAFONE.
- Συγχρόνως, να ενισχύει το σήμα της COSMOTE κατά 30dB και να απορρίπτει το σήμα της VODAFONE κατά τουλάχιστον 20 dB.
- Δίνονται τα πολυώνυμα Butterworth 1ης ως 5ης τάξης.

Από τη μελέτη του βαθυπερατού φίλτρου 4ης τάξης προκύπτει ότι το συνολικό κέρδος του βαθυπερατού φίλτρου σε χαμηλές συχνότητες είναι

$$A_{V1} \cdot A_{V2} = 2.235 \cdot 1.12 = 2.5 \approx 8dB$$

Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε φίλτρο περιττής τάξης ώστε να ελέγξουμε το κέρδος. Επιλέγουμε σχεδίαση Butterworth 5ης τάξης. Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι $2k_1$=0.618 και $2k_2$=1.618

Οπότε προκύπτει A_{V2}=2.382 και A_{V3}=1.382

Ας θυμηθούμε ότι μετατρέπουμε το βαθυπερατό σε υψιπερατό με ανταλλαγή των R και C

Κύκλωμα ενεργού υψιπερατού φίλτρου Sallen-Key 5ης τάξης

Επιλέγουμε R_1=1KΩ και R_2=20KΩ οπότε προκύπτει

A_{V1}=21=26dB

R_3=1KΩ και R_4=1.3KΩ οπότε προκύπτει

A_{V2}=2.3=7.2dB

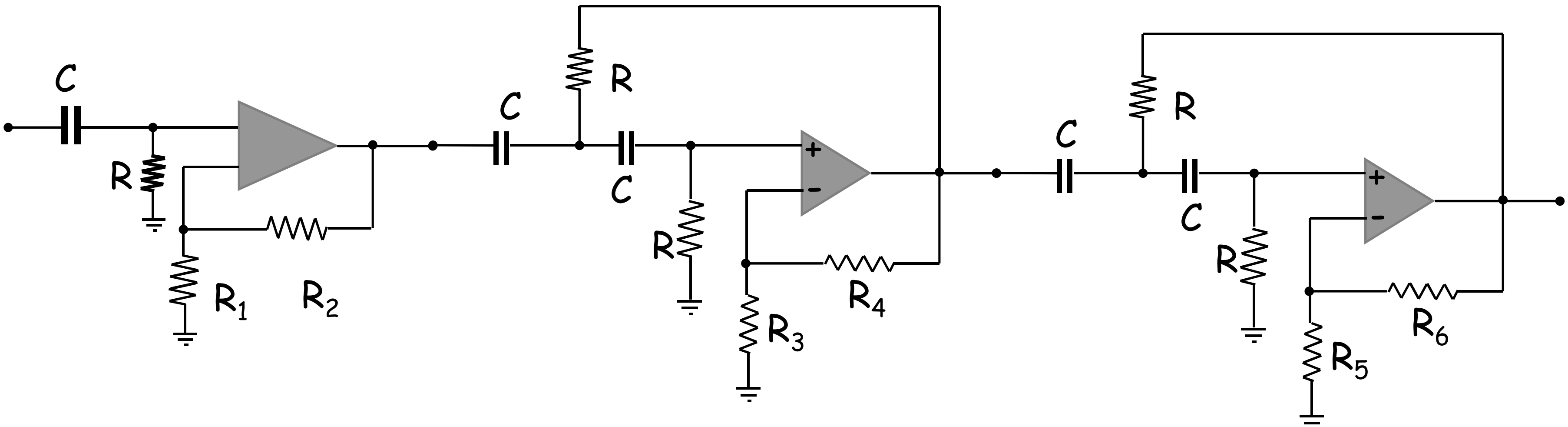
R_5=1KΩ και R_6=300Ω οπότε προκύπτει

A_{V3}=1.3=2.3dB

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} \approx 1.6GHz$$

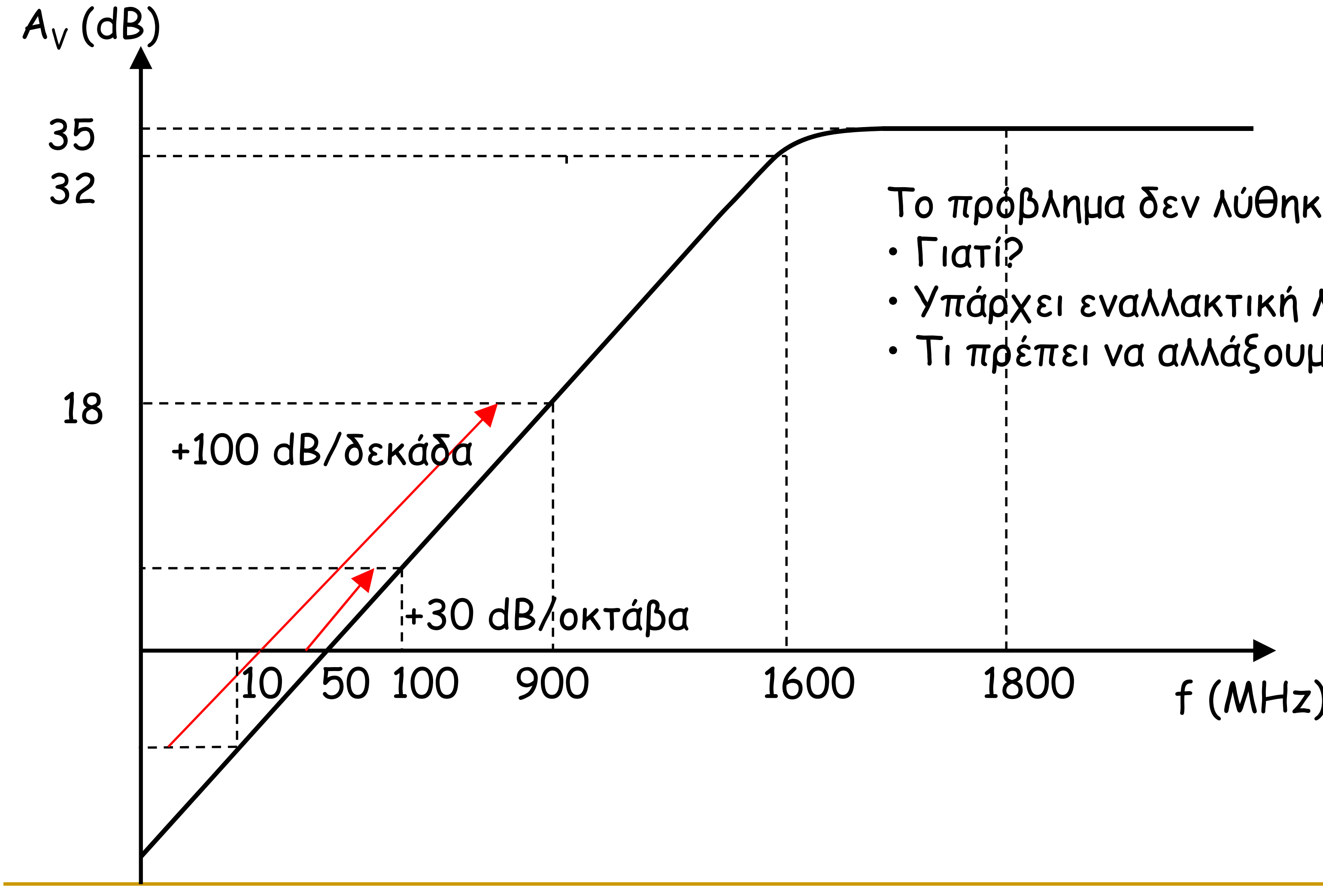
$$R = 1K\Omega$$

$$C = 100nF$$



$$A_{V0} = A_{V1} + A_{V2} + A_{V3} \approx 35dB$$

Απόκριση Συχνότητας



Το πρόβλημα δεν λύθηκε!!

- Γιατί?
- Υπάρχει εναλλακτική λύση?
- Τι πρέπει να αλλάξουμε?

Ορολογία φίλτρων

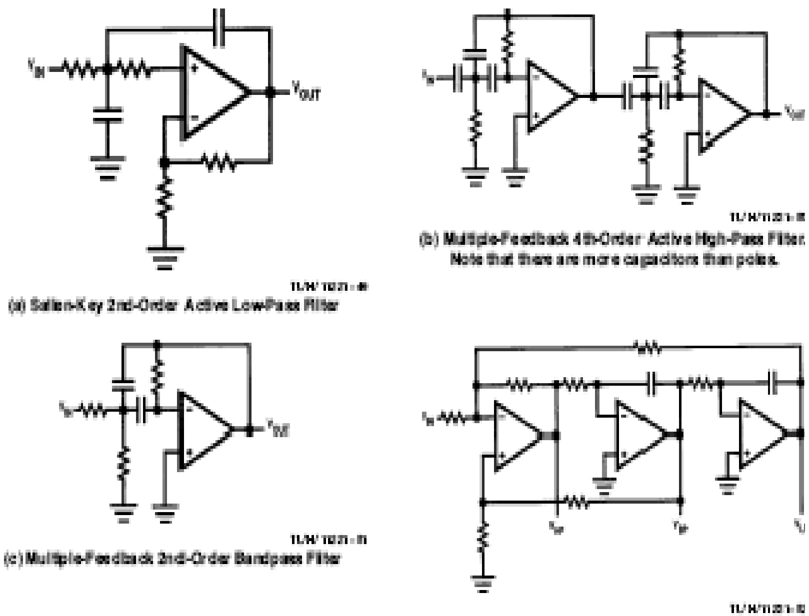
- *Ενεργό-Παθητικό φίλτρο (Active-Passive Filter)*
- *Ψηφιακό-Αναλογικό φίλτρο (Digital – Analog Filter)*
- *Βαθυπερατό (Low Pass: LPF)-Ζωνοπερατό (BandPass: BPF)-Ζωνοαποκοπτικό (BandReject)-Υψιπερατό (HighPass: HPF) φίλτρο*
- *Λόγος Σήματος-προς-Θόρυβο (Signal-to-Noise Ratio)*
- *Εύρος Ζώνης Διέλευσης (Band Pass)*
- *Συχνότητα Αποκοπής (Cutt-off Frequency)*
- *Οκτάβα (octave)-Δεκάδα (decade)*
- *Κλίση φίλτρου στη ζώνη αποκοπής (band reject slope)*
- *Κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (ripple)*
- *Τάξη φίλτρου (filter order)*
- *Παράγοντας Q (Q factor)*
- *Απόρριψη σήματος (Signal rejection)*

Κεντρική συχνότητα

$$Q = f_C \big/ \left(f_H - f_L\right)$$

Εύρος Ζώνης

Κυκλώματα για μελέτη



(a) Sallen-Key 2nd-Order Active Low-Pass Filter

(b) Multiple-Feedback 4th-Order Active High-Pass Filter. Note that there are more capacitors than poles.

(c) Multiple-Feedback 2nd-Order Bandpass Filter

(d) Universal State-Variable 2nd-Order Active Filter

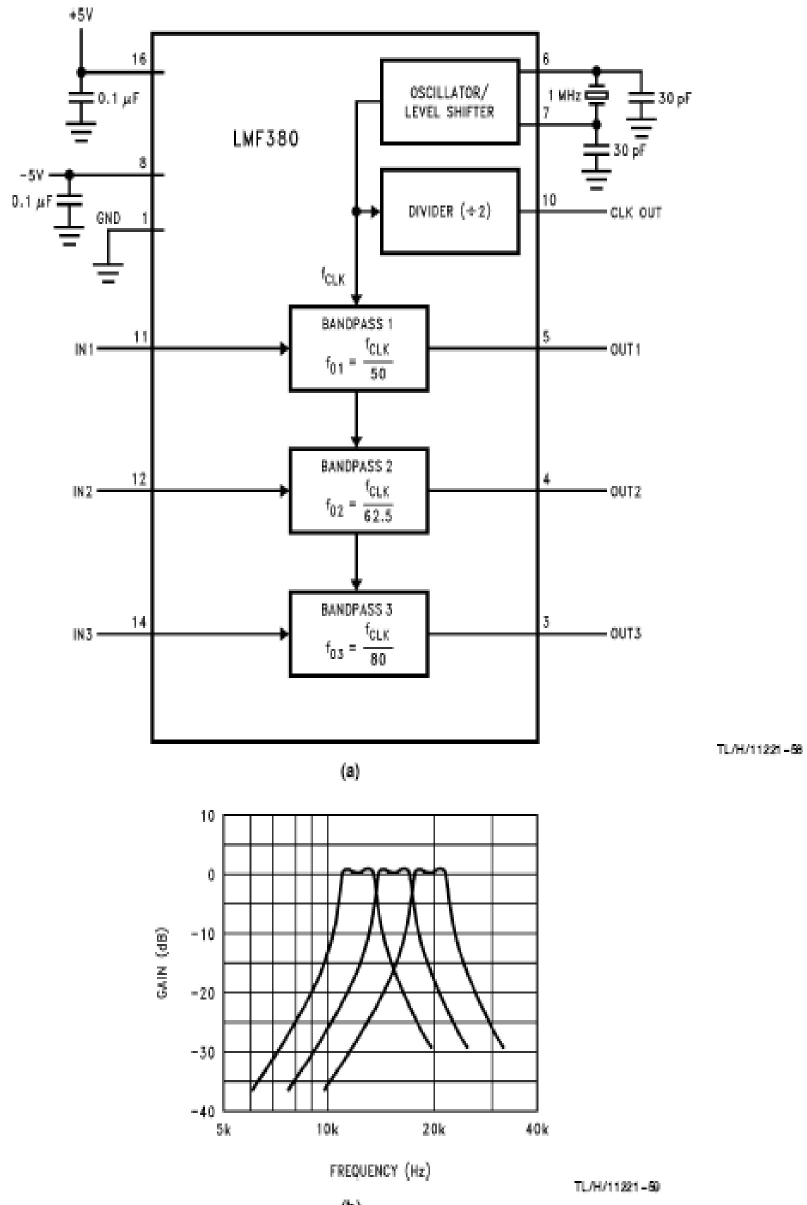


FIGURE 36. LMF380 one-third octave filter array. (a) Typical application circuit for the top audio octave. The clock is generated with the aid of the external crystal and two 30 pF capacitors. (b) Response curves for the three filters.