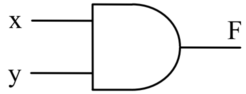
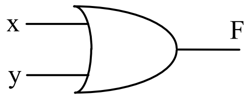
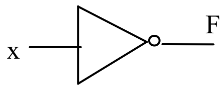
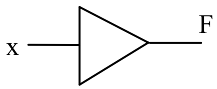
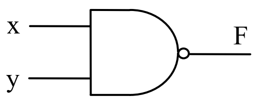
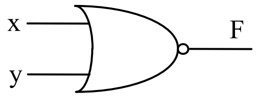
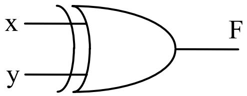
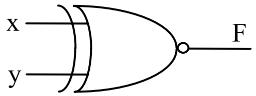
Ψηφιακές Λογικές Πύλες

<table>
<tr><th>Όνομα</th><th>Γραφικό
Σύμβολο</th><th>Αλγεβρική
Συνάρτηση</th><th>Πίνακας
Αληθείας</th></tr>
<tr><td>AND</td><td>
</td><td>$F = xy$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>OR</td><td>
</td><td>$F = x + y$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>NOT</td><td>
</td><td>$F = \overline{x}$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>F</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Απομονωτής</td><td>
</td><td>$F = x$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>F</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>NAND</td><td>
</td><td>$F = \overline{xy}$</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>F</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Gate	Symbol	Expression	Truth table
NOR		$F = \overline{x + y}$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0
XOR		$F = x\overline{y} + \overline{x}y$ $= x \oplus y$	x y | F 0 0 | 0 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0
XNOR		$F = xy + \overline{x}\,\overline{y}$ $= x \odot y$	x y | F 0 0 | 1 0 1 | 0 1 0 | 0 1 1 | 1

Παράδειγμα: Να σχεδιαστεί συνδυαστικό κύκλωμα που να δέχεται είσοδο τριψήφιο αριθμό (μη προσημασμένο) και να δίνει στην έξοδο το τετράγωνό του.

Λύση:

Είσοδοι			Έξοδοι						Δεκαδικός
A_2	A_1	A_0	B_5	B_4	B_3	B_2	B_1	B_0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
0	1	1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	0	0	1	0	0	0	0	16
1	0	1	0	1	1	0	0	1	25
1	1	0	1	0	0	1	0	0	36
1	1	1	1	1	0	0	0	1	49

Από τον πίνακα αληθείας προκύπτουν οι εκφράσεις των μεταβλητών εξόδου B_i συναρτήσει των μεταβλητών εισόδου A_i.

$B_0 = A_0$

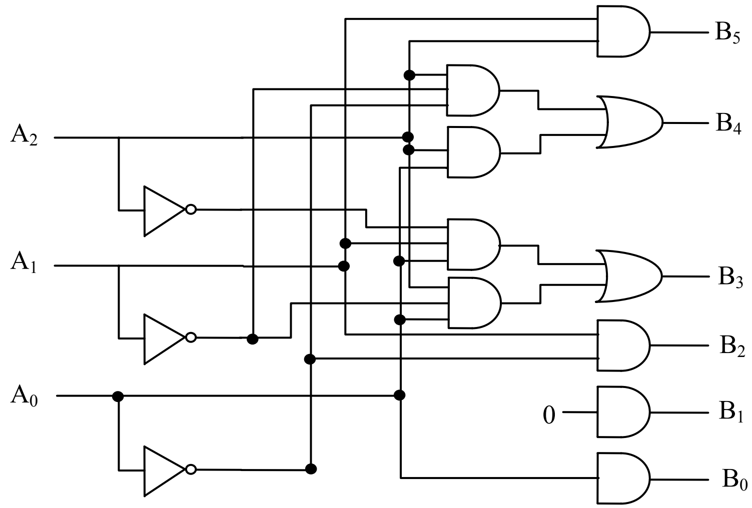
$B_1 = 0$

$B_2 = \overline{A}_2 A_1 \overline{A}_0 + A_2 A_1 \overline{A}_0 = A_1 \overline{A}_0$

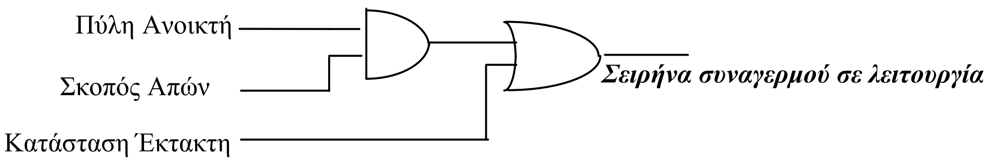
$B_3 = \overline{A}_2 A_1 A_0 + A_2 \overline{A}_1 A_0$

$B_4 = A_2 \overline{A}_1 \overline{A}_0 + A_2 \overline{A}_1 A_0 + A_2 A_1 A_0 = A_2 \overline{A}_1 \overline{A}_0 + A_2 A_0$

$B_5 = A_2 A_1 \overline{A}_0 + A_2 A_1 A_0 = A_2 A_1$



Παράδειγμα



Στο παραπάνω σχήμα, δίνεται το λογικό διάγραμμα που δείχνει πότε ενεργοποιείται η σειρήνα του συναγερμού σε ένα φυλασσόμενο χώρο. Έκτακτη κατάσταση εννοείται η κατάσταση ύπαρξης εισβολέα στην είσοδο της πύλης.

Α) Περιγράψτε τη λειτουργία του κυκλώματος.

Β) Θεωρώντας τις μεταβλητές x, y και z (πύλη ανοικτή, σκοπός απών, κατάσταση έκτακτη, αντίστοιχα), να δημιουργήσετε τον πίνακα αλήθειας ο οποίος να ενεργοποιεί το συναγερμό (συνάρτηση F) όταν:

(α) η κατάσταση είναι έκτακτη και συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα γεγονότα (ή και τα δύο): Η πύλη είναι ανοικτή ή ο σκοπός είναι απών.

(β) Όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα τα ακόλουθα δύο γεγονότα: Ο σκοπός είναι απών και η πύλη είναι ανοικτή.

Γ) Από τον πίνακα αλήθειας να γραφεί η συνάρτηση σαν άθροισμα γινομένων. Να απλοποιηθεί με τη βοήθεια αξιωμάτων και θεωρημάτων της άλγεβρας Boole. Να υλοποιηθεί το λογικό διάγραμμα της νέας συνάρτησης.

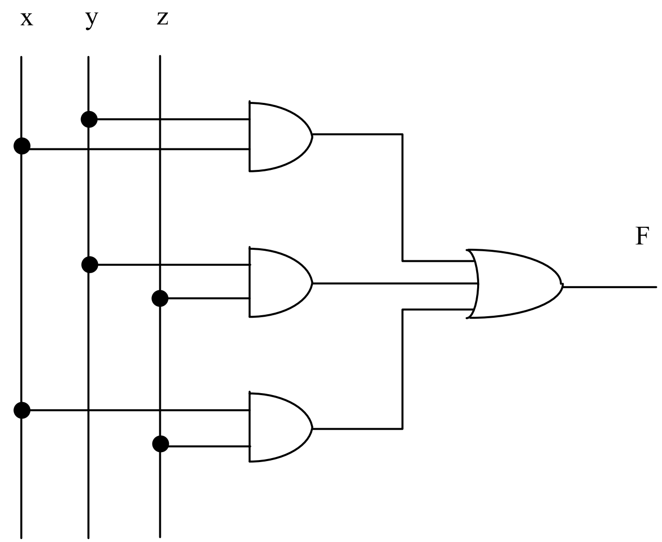
Λύση

Η σειρήνα συναγερμού τίθεται σε λειτουργία όταν: (α) η πύλη είναι ανοικτή και ο σκοπός απών ή (β) όταν η κατάσταση είναι έκτακτη.

$$F = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz + xyz + xyz =$$

$$xz\left(y+\overline{y}\right) + yz\left(\overline{x}+x\right) + xy\left(z+\overline{z}\right) = xz + yz + xy$$

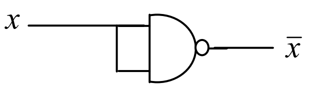
x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



-

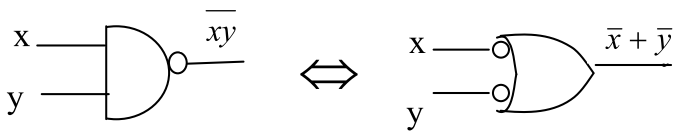
Υλοποίηση Συναρτήσεων με πύλες NAND

Ένα πρόβλημα που πολύ συχνά αντιμετωπίζουμε στην πράξη είναι η υλοποίηση μίας συνάρτησης με ένα και μόνο είδος πυλών. Η πύλη που μπορεί να υλοποιήσει όλες τις πράξεις είναι η NOR καθώς και η NAND. Ας δούμε πώς μπορούν να υλοποιηθούν όλες οι πύλες με τη βοήθεια της NAND.

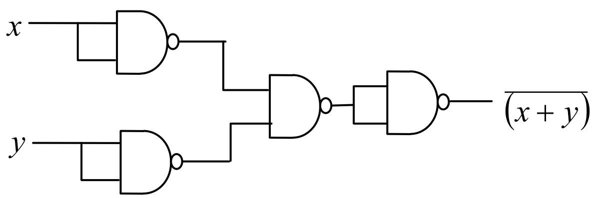


Υλοποίηση της πύλης NOT με NAND.

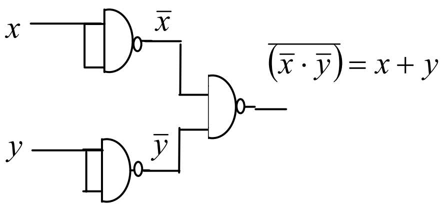
Από τον πίνακα αληθείας της πύλης NAND παρατηρούμε ότι αν οι δύο είσοδοι της πύλης NAND είναι σε κατάσταση 0, τότε η έξοδος είναι 1. Αν και οι δύο είσοδοι είναι σε κατάσταση 1 τότε η έξοδος είναι 0. Αυτή η λογική πράξη είναι η πράξη της αντιστροφής. Επομένως, το λογικό NOT υλοποιείται αν βραχυκυκλώσουμε τις δύο εισόδους της πύλης NAND.



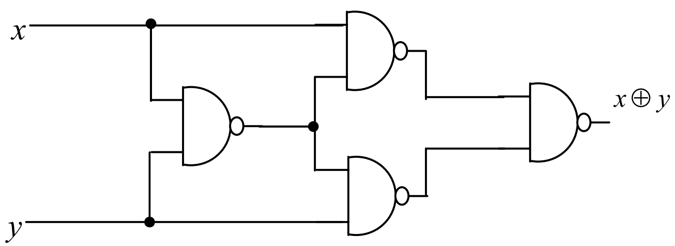
Ισοδυναμία πύλης NAND.

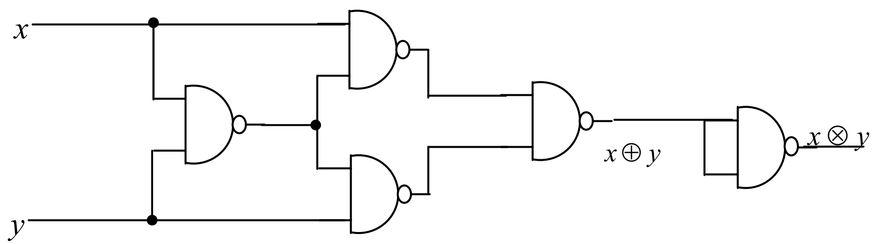


Υλοποίηση πύλης NOR με πύλες NAND.

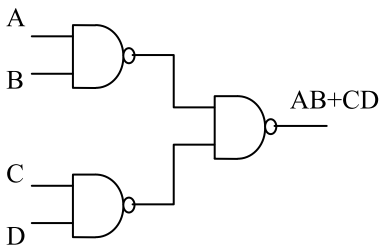


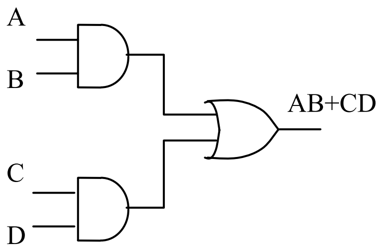
Υλοποίηση της πύλης OR με πύλες NAND.





Υλοποίηση πύλης XOR και XAND με πύλες NAND.



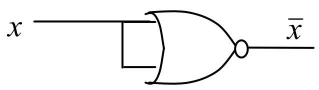


Ισοδύναμα κυκλώματα.

-

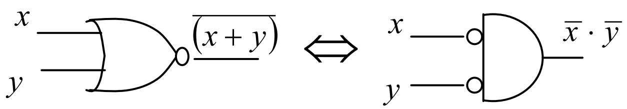
Υλοποίηση Συναρτήσεων με πύλες NOR

Η υλοποίηση μίας συνάρτησης μπορεί επίσης να γίνει χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR. Ας δοκιμάσουμε να δούμε πώς μπορούν να υλοποιηθούν όλες οι πύλες με τη βοήθεια της NOR.

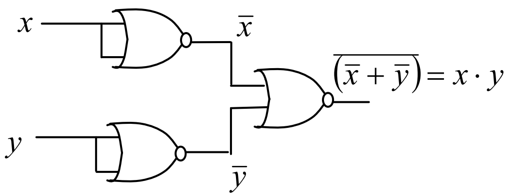


Υλοποίηση της πύλης NOT με NOR.

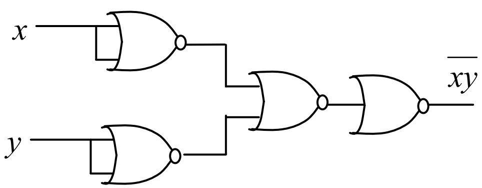
Από τον πίνακα αλήθειας της πύλης NOR παρατηρούμε ότι αν οι δύο είσοδοι της πύλης NOR είναι σε κατάσταση 0, τότε η έξοδος είναι 1. Αν και οι δύο είσοδοι είναι σε κατάσταση 1 τότε η έξοδος είναι 0. Αυτή η λογική πράξη είναι η πράξη της αντιστροφής. Επομένως, το λογικό NOT υλοποιείται αν βραχυκυκλώσουμε τις δύο εισόδους της πύλης NOR.



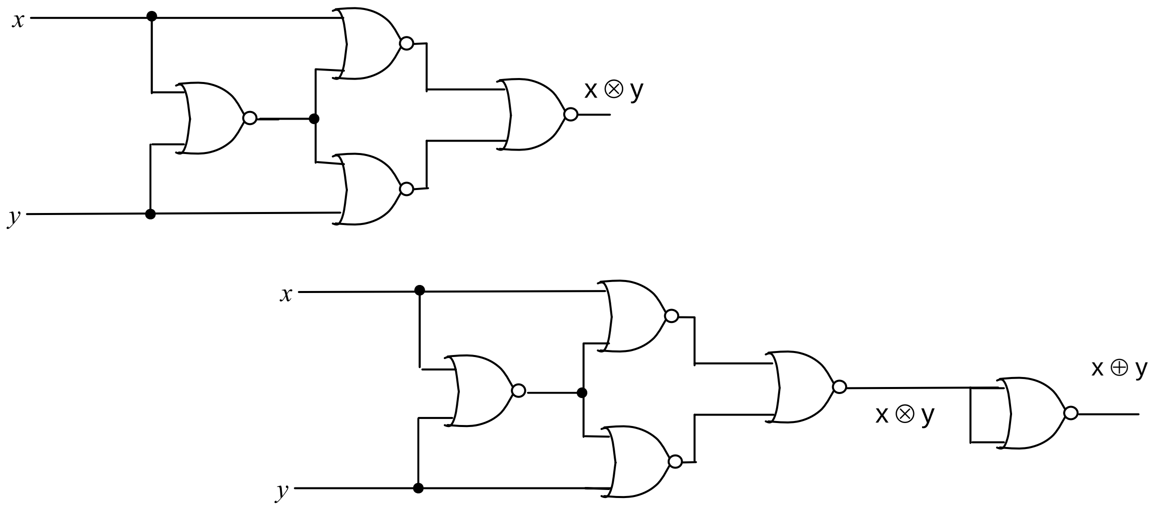
Ισοδυναμία πύλης NOR.



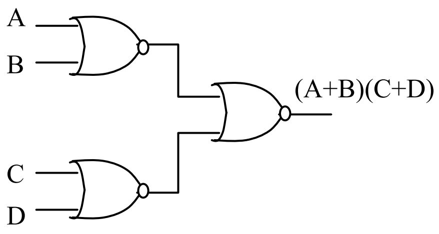
Υλοποίηση της πύλης AND με πύλες NOR.

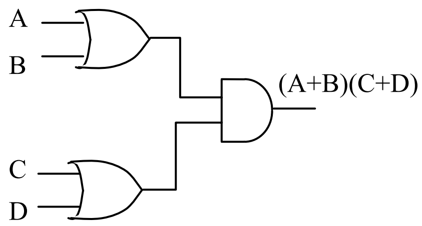


Υλοποίηση πύλης NAND με πύλες NOR.



Υλοποίηση πύλης XAND και XOR με πύλες NOR.





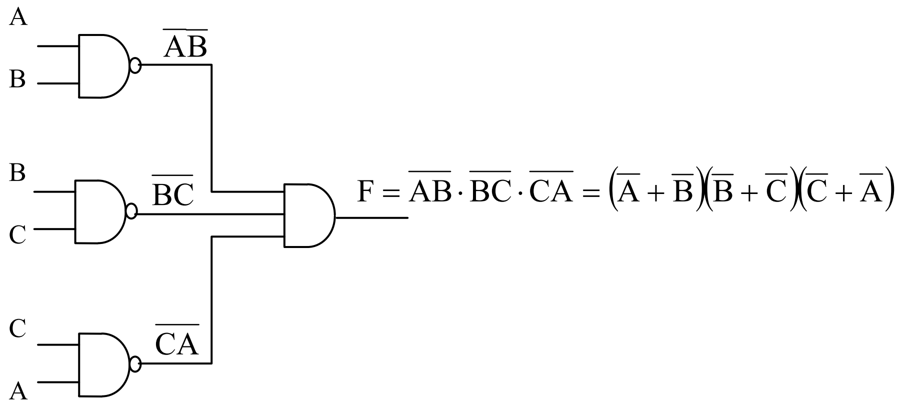
Ισοδύναμα κυκλώματα.

-

Παράδειγμα:

Δίνεται η λογική συνάρτηση $F=\left(\overline{A}+\overline{B}\right)\left(\overline{B}+\overline{C}\right)\left(\overline{C}+\overline{A}\right)$. Να σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα με πύλες NAND-AND.

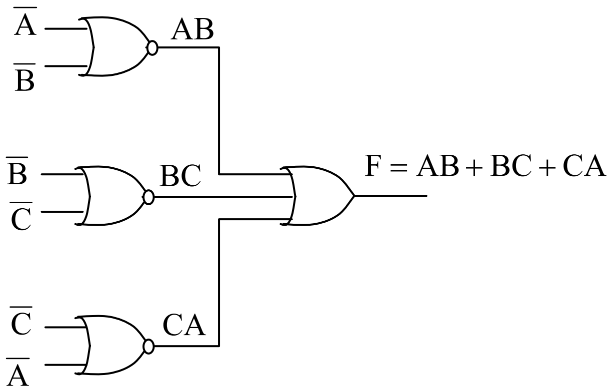
Λύση



Παράδειγμα:

Δίνεται η λογική συνάρτηση $F=AB+BC+CA$. Να σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα με πύλες NOR-OR.

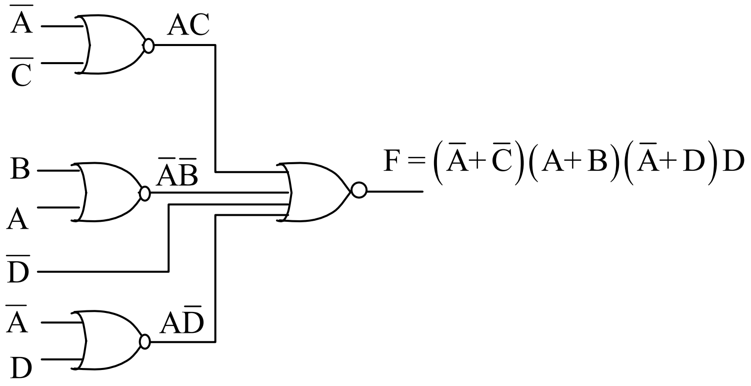
Λύση



Παράδειγμα:

Δίνεται η λογική συνάρτηση $F=\left(\overline{A}+\overline{C}\right)\left(A+B\right)\left(\overline{A}+D\right)\cdot D$. Να σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα μόνο με πύλες NOR.

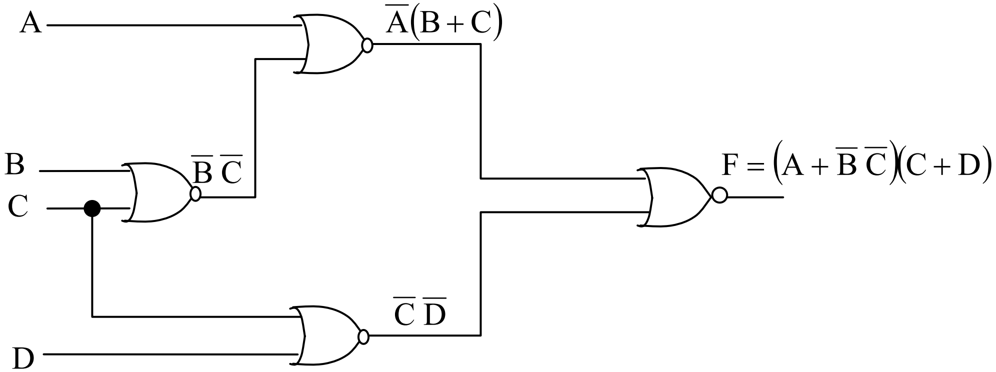
Λύση



Παράδειγμα:

Δίνεται η λογική συνάρτηση $F=\left(A+\overline{B}\,\overline{C}\right)\left(C+D\right)$. Να σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα μόνο με πύλες NOR.

Λύση

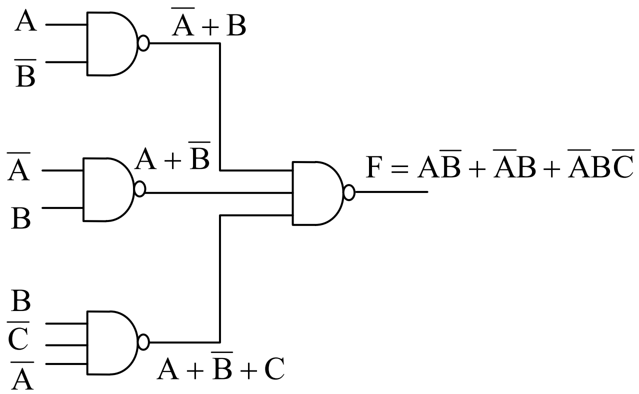


-

Παράδειγμα:

Δίνεται η λογική συνάρτηση $F = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + \overline{A}B$. Να σχεδιαστεί το λογικό κύκλωμα μόνο με πύλες NAND.

Λύση



Απλοποίηση λογικών συναρτήσεων με τη μέθοδο Karnaugh

Ο χάρτης Karnaugh είναι ένα διάγραμμα αποτελούμενο από τετράγωνα. Κάθε τετράγωνο παριστάνει έναν ελαχιστόρο (minterm). Έτσι, η μέθοδος ουσιαστικά συνίσταται στη χάραξη ενός ορθογωνικού διαγράμματος το οποίο περιέχει τόσα τετράγωνα όσα και οι δυνατοί συνδυασμοί των μεταβλητών (δηλαδή για *n* μεταβλητές θα περιέχει 2^n τεράγωνα). Επειδή κάθε συνάρτηση Boole μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ελαχιστόρων, έπεται ότι μια συνάρτηση Boole αναγνωρίζεται γραφικά στο χάρτη από την περιοχή που καλύπτουν τα τετράγωνα των ελαιχστόρων που περιέχονται στη συνάρτηση.

x y	0	1
0	0	1
1	2	3

Χάρτης Karnaugh για δύο μεταβλητές

Χάρτης Karnaugh για τρεις μεταβλητές

y x z	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Στο σχήμα φαίνεται ο χάρτης Karnaugh για τρεις μεταβλητές, ο οποίος αποτελείται από $2^3 = 8$ τετράγωνα (4 στήλες και 2 γραμμές).
Η διάταξη των συνδυασμών είναι κατά τρόπον ώστε όταν περνάμε από τη μία στήλη στην άλλη να μεταβάλλεται μόνο μία δυαδική μεταβλητή δηλαδή 00 → 01 → 11 → 10. Δύο στήλες αυτού του είδους ονομάζονται *γειτονικές στήλες* και είναι αυτές που προκύπτουν διά μιας μόνο μεταβολής δυαδικής μεταβλητής. **Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι γειτονικές και η πρώτη με την τελευταία στήλη, διότι γίνεται μία μόνο μεταβολή δυαδικής μεταβλητής όταν περνάμε από τη μία στήλη στην άλλη, εν προκειμένω μάλιστα μεταβάλλεται η μεταβλητή y (από 0 σε 1).**

-

Χάρτης Karnaugh για τέσσερις μεταβλητές

y x / w z	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Απλοποίηση με τη μέθοδο Karnaugh

Η μέθοδος Karnaugh συνίσταται στη χρήση του Αξιώματος 5(α) $x + \overline{x} = 1$**, προς απλοποίηση όρων ανά δύο σύμφωνα με το ακόλουθο σκεπτικό:**

α) Δύο όροι που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατά την τιμή μιας μεταβλητής, **οι οποίοι δηλαδή είναι γειτονικοί στο χάρτη Karnaugh**, απλοποιούνται διότι

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ όπου ($\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ και $\mathbf{C} = \mathbf{x}$)

β) Τέσσερις όροι στους οποίους οι δύο μεταβλητές παίρνουν και τους τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές διατηρούν την ίδια πάντοτε τιμή απλοποιούνται εξαφανίζοντας τις δύο πρώτες μεταβλητές.

<u>Παράδειγμα:</u> $\overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{C} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}}$

Παρατηρούμε ότι οι τέσσερις αυτοί όροι αντιστοιχούν στο χάρτη Karnaugh σε τέσσερα τετράγωνα τα οποία σχηματίζουν ένα ευρύτερο τετράγωνο ή μία γραμμή, ανάλογα με τη διάταξη των μεταβλητών Α, Β, C, πάνω στο χάρτη.

Είναι πολλές φορές δυνατό να παρουσιαστούν όροι συγκεντρωμένοι ανά 8, δηλαδή τα 8 τετράγωνα που αντιστοιχούν σ' αυτούς τους όρους να σχηματίζουν ορθογώνιο. Και στην περίπτωση αυτή επιτρέπεται να απλοποιηθούν τρεις μεταβλητές. Σκοπός μας είναι να απλοποιηθούν όσο το δυνατόν περισσότερες μεταβλητές.

-

Η γενική μέθοδος για να το πετύχουμε συνίσταται στα εξής:

1) Αναζητούνται πάνω στο χάρτη Karnaugh **όλα τα 1 τα οποία δεν γειτονεύουν με κανένα άλλο**, απομονώνονται και γράφεται η έκφραση των αντίστοιχων όρων της συνάρτησης.

2) Αναζητούνται στη συνέχεια **ομάδες τετραγώνων** τα οποία είναι γειτονικά μεταξύ τους. Ο αριθμός των τετραγώνων τα οποία αποτελούν την κάθε ομάδα πρέπει να είναι **2^n όπου *n* ακέραιος**, το δε σχήμα το οποίο σχηματίζουν τα τετράγωνα της ομάδας πάνω στο χάρτη Karnaugh είναι **ευθεία γραμμή ή τετράγωνο ή ορθογώνιο**. **Από 2^n τα οποία έχουν την ιδιότητα αυτή απλοποιούνται *n* μεταβλητές.**

Κατ' αυτόν τον τρόπο από 2 ή 4 ή 8 τετράγωνα απλοποιούνται αντίστοιχα 1 ή 2 ή 3 μεταβλητές. Προκειμένου να αποφασιστεί ποια μεταβλητή απλοποιείται, αναζητείται η μεταβλητή που μεταβάλλεται όταν περνάμε, κάθετα ή οριζόντια, από το ένα τετράγωνο της ομάδας στο άλλο. Οι υπόλοιπες μεταβλητές αποτελούν την έκφραση της ομάδας των 2 ή 4 ή όρων. Ας σημειωθεί ότι κάθε τετράγωνο μπορεί να ανήκει συγχρόνως σε πολλές ομάδες, διότι ισχύει το Θεώρημα 1(α)

$$A + A + A + \ldots + A = A$$

Είναι συμφέρον εξάλλου, να αναζητούνται **ομάδες όσο το δυνατό περισσότερων τετραγώνων** διότι τότε επιτυγχάνεται απλοποίηση περισσότερων μεταβλητών. Για την αναγραφή της αλγεβρικής έκφρασης του κάθε όρου της συνάρτησης ακολουθείται ο εξής κανόνας: Εφόσον η μεταβλητή x έχει την τιμή 1 γράφουμε x, εφόσον δε έχει την τιμή 0 γράφουμε $\overline{x}$.

Απλοποίηση συνάρτησης δύο μεταβλητών

Δίνεται η συνάρτηση

$$F = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}x + y\overline{x}$$

Να απλοποιηθεί.

y \ x	0	1
0	1 $_{0}$	1 $_{1}$
1	1 $_{2}$	$_{3}$

$$\mathbf{F = \overline{x} + \overline{y}}$$

Απλοποίηση συνάρτησης τριών μεταβλητών

Δίνεται η συνάρτηση

$$F = \overline{z}\,\overline{y}\,\overline{x} + \overline{z}y\overline{x} + \overline{z}\,\overline{y}x + z\overline{y}\,\overline{x} + z\overline{y}x$$

Να απλοποιηθεί.

z \ y x	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	1 $_{1}$	$_{3}$	1 $_{2}$
1	1 $_{4}$	1 $_{5}$	$_{7}$	$_{6}$

$$\mathbf{F = \overline{y} + \overline{z}\overline{x}}$$

-

Απλοποίηση συνάρτησης τεσσάρων μεταβλητών

Δίνεται η συνάρτηση

$$F = w\overline{y}\overline{x} + \overline{z}y\overline{x} + zy\overline{x} + w\overline{z}\overline{y}x + \overline{w}z\overline{y}x$$

Να απλοποιηθεί.

wz \ yx	00	01	11	10
00	0	1	3	1 2
01	4	1 5	7	1 6
11	1 12	13	15	1 14
10	1 8	1 9	11	1 10

$$\mathbf{F = w\overline{x} + y\overline{x} + w\overline{z}\,\overline{y} + \overline{w}z\overline{y}x}$$

Παρατηρήσεις

1) Πρέπει να σημειωθεί ότι η απλοποίηση με τη μέθοδο του χάρτη Karnaugh δεν οδηγεί υποχρεωτικά σε μία και μόνη λύση. Είναι δυνατό να επιτευχθούν πολλές λύσεις ισοδύναμες μεταξύ τους.

Παράδειγμα :

z \ y x	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1		1

z \ y x	00	01	11	10
0	1	1		1
1		1		1

Χάρτης Karnaugh συνάρτησης F τριών μεταβλητών και δύο διαφορετικές απλοποιήσεις της.

α) Το Σχ. 7α οδηγεί στην έκφραση

$$F = \overline{z}\,\overline{y} + \overline{y}x + y\overline{x}$$

β) Το Σχ. 7β οδηγεί στην έκφραση

$$F = \overline{z}\,\overline{x} + \overline{y}x + y\overline{x}$$

Οι δύο αυτές εκφράσεις είναι ισοδύναμες.

2) Αντί να θεωρούμε τα τετράγωνα για τα οποία είναι F = 1, μπορούμε να θεωρούμε εκείνα για τα οποία είναι F = 0 και να υπολογίζεται η έκφραση της $\overline{F}$.

Παράδειγμα:

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει

$$\overline{F} = z\overline{y}\,\overline{x} + yx$$

Άρα είναι και

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{z\overline{y}\,\overline{x} + yx} = \overline{(yx)} \cdot \overline{(z\overline{y}\,\overline{x})} = (\overline{y} + \overline{x}) \cdot (\overline{z} + y + x)$$

<u>**Σημαντικό:**</u> Με υπολογισμό της έκφρασης της συνάρτησης από το χάρτη Karnaugh με την ομαδοποίηση των 1 διευκολύνεται πολύ η κατασκευή του αντίστοιχου κυκλώματος αποκλειστικά με πύλες NAND.
Με υπολογισμό της έκφρασης της συνάρτησης από το χάρτη Karnaugh με την ομαδοποίηση των 0 διευκολύνεται πολύ η κατασκευή του αντίστοιχου κυκλώματος αποκλειστικά με πύλες NOR.

-

Αδιάφοροι όροι (Don’t care)

Πολλές φορές υπάρχουν σε μια συνάρτηση πλεονάζοντες όροι, των οποίων η τιμή δεν μας ενδιαφέρει αν θα είναι 1 ή 0. Οι όροι αυτοί ονομάζονται αδιάφοροι όροι. Οι αδιάφοροι όροι παριστάνονται με το σύμβολο X.

Παρ’ όλο που η τιμή των αδιάφορων όρων δεν έχει σημασία για τη λογική συνάρτηση, ωστόσο μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην απλοποίηση της λογικής συνάρτησης. Γι’ αυτό τους δίνουμε άλλοτε την τιμή 0 και άλλοτε την τιμή 1, έτσι ώστε να σχηματίζουμε όσο το δυνατόν λιγότερες και συγχρόνως μεγαλύτερες ομάδες γειτονικών τετραγωνιδίων στον πίνακα Karnaugh.

Παράδειγμα: Να απλοποιηθεί η συνάρτηση της οποίας δίνεται παρακάτω ο πίνακας αληθείας.

A	B	C	F
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	X

C \ AB	00	01	11	10
0	X	0	1	0
1	1	1	X	1

Από τον πίνακα Karnaugh προκύπτει η απλοποιημένη συνάρτηση: $F = C + AB$.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(1) Σε κάθε ομάδα που σχηματίζουμε πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας μη αδιάφορος όρος (1 ή 0) ανάλογα με το αν ομαδοποιώ 1 ή 0. Δηλαδή δεν επιτρέπεται να σχηματίσουμε ομάδα που να περιέχει μόνο αδιάφορους όρους.

(2) Δίνω την τιμή 1 ή 0 στους αδιάφορους όρους που ομαδοποιώ και μόνο σε αυτούς.

Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας αληθείας μιας συνάρτησης. Να βρεθεί η απλοποιημένη συνάρτηση με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.

A	**B**	**C**	**D**	**F**
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Από τον πίνακα αληθείας εξάγεται η λογική συνάρτηση:

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}BCD + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\overline{B}C\overline{D} + ABCD = \sum(0,1,2,7,8,9,10,15)$$

-

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Άρα η απλοποιημένη συνάρτηση είναι: $F = BCD + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{D}$.

Παράδειγμα:

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση ως γινόμενο μεγιστόρων $\mathrm{F} = \prod(0,3,4,5,6,7,11,13,14,15)$. Να βρεθεί η απλοποιημένη συνάρτηση με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Ομαδοποιώντας τους μηδενικούς όρους βρίσκουμε την απλοποιημένη συνάρτηση $F = (\overline{C} + \overline{D})(\overline{B} + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C})(A + C + D)$.

-

Παράδειγμα:

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση ως άθροισμα ελαχιστόρων $F = \sum(0,1,3,6,9,11,12,13,15)$. Να βρεθεί η απλοποιημένη συνάρτηση με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.

Λύση

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Ομαδοποιώντας τους όρους με 1, βρίσκουμε την απλοποιημένη συνάρτηση $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}D + AD + AB\overline{C} + \overline{A}BC\overline{D}$.

Παράδειγμα:

Από τον παρακάτω πίνακα Karnaugh να εξαχθούν δύο συναρτήσεις: Η F_1 ως άθροισμα γινομένων και η F_2 ως γινόμενο αθροισμάτων.

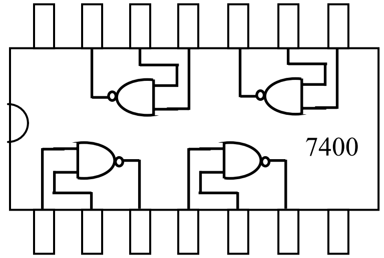
Λύση

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	X
01	0	0	0	0
11	X	X	X	0
10	0	1	X	1

$F_1 = B\overline{D} + A\overline{D}$ $\qquad F_2 = \overline{D}(A + B)$

-

Παράδειγμα:



Μία μικρή εταιρεία έχει 14 μετοχές και για κάθε μετοχή δίνει μία ψήφο σ' αυτόν που την έχει. Αυτές τις μετοχές τις έχουν 4 άτομα ως εξής:
Ο κ. x έχει 1 μετοχή
Ο κ. y έχει 6 μετοχές
Η κ. z έχει 5 μετοχές και
Ο κ. w έχει 2 μετοχές
Καθένας από αυτούς τους τέσσερις έχει έναν διακόπτη που τον κλείνει (βραχυκύκλωμα) για να ψηφίσει ΝΑΙ ή τον ανοίγει για να ψηφίσει ΟΧΙ. Θέλουμε να σχεδιάσουμε κύκλωμα που να δείχνει αν το αποτέλεσμα μιας ψηφοφορίας είναι ΝΑΙ ή ΟΧΙ. Στην περίπτωση ισοψηφίας το αποτέλεσμα να είναι ΝΑΙ.

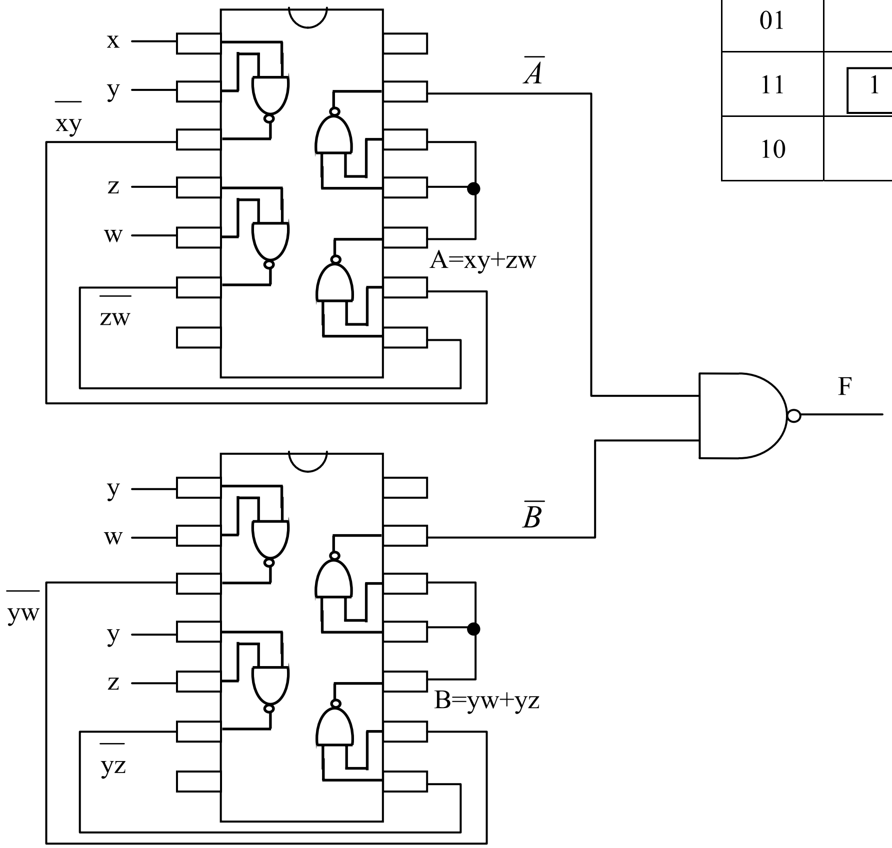
Έχετε στη διάθεσή σας δύο ολοκληρωμένα 7400 των οποίων η διάταξη φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και μία πύλη NAND.
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Να γίνει απλοποίηση με χρήση του χάρτη Karnaugh.

Λύση

Καταστρώνουμε τον πίνακα αληθείας με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος. Στη συνέχεια απλοποιούμε με τη βοήθεια του χάρτη Karnaugh.

1	**6**	**5**	**2**	
x	**y**	**z**	**w**	**F**
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

xy \ zw	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10			1	



Η απλοποιημένη συνάρτηση είναι: $F = xy + zw + yw + yz$.

-