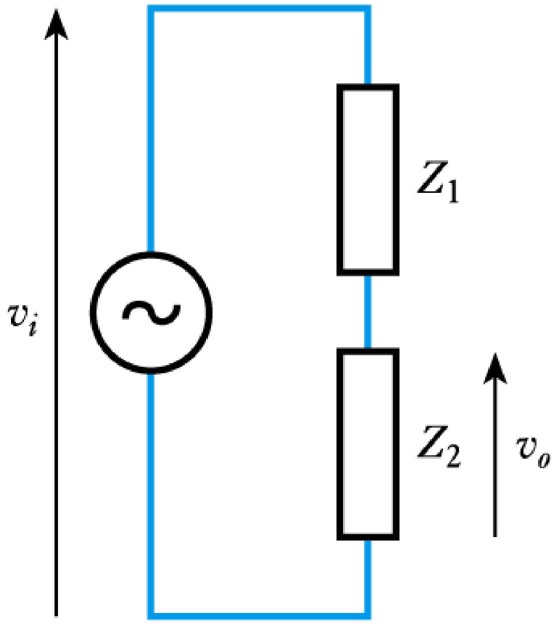
Κυκλώματα RC στο πεδίο της συχνότητας

Για ευκολία μελετάμε το παρακάτω κύκλωμα



Σχήμα 1

Το πηλίκο της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου (Συνάρτηση μεταφοράς). Από το κύκλωμα στο Σχ. 1

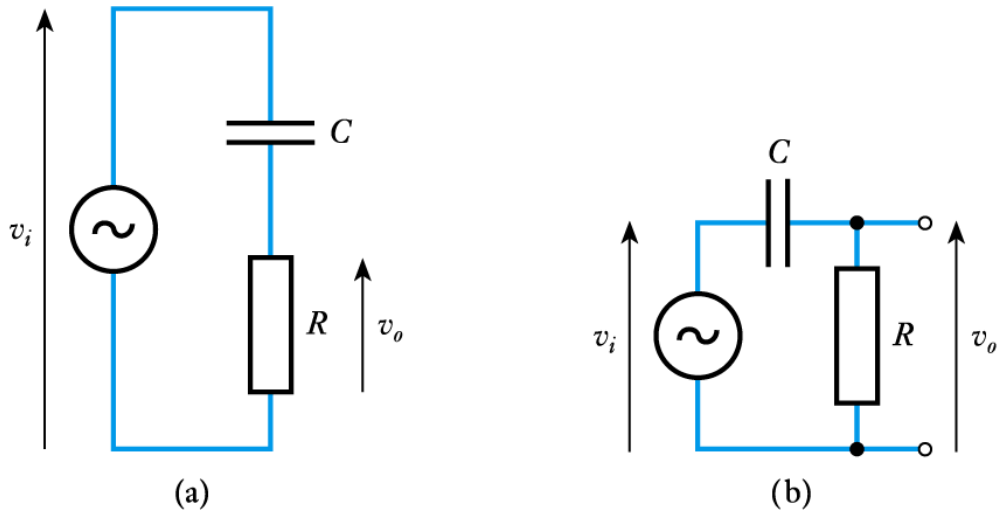
$$v_0 = v_i \times \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (1)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς(απολαβή τάσης) δίδεται από την σχέση

$$\frac{v_0}{v_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (2)$$

Κύκλωμα RC (υψηπερατό φίλτρο)

Θεωρούμε το παρακάτω κύκλωμα Σχήμα 2 το οποίο το αναδιατάσσουμε σε μια ισοδύναμη μορφή



Σχήμα 2. Κύκλωμα RC

Από την εξίσωση (2) προκύπτει οτι η συνάρτηση μεταφορας του κυκλώματος Σχ.2 είναι

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\mathbf{Z_R}}{\mathbf{Z_R} + \mathbf{Z_C}} = \frac{R}{R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega CR}} \tag{3}$$

$$\frac{v_0}{v_s} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j2\pi RCf}{j2\pi RCf + 1} = \frac{f}{\dfrac{2\pi fRC}{2\pi RC} - j\dfrac{1}{2\pi RC}}$$

$$= \frac{f}{f - jf_c} = \frac{f}{f - jf_c} = \frac{1}{1 - j\dfrac{f_c}{f}}$$

$$= \frac{1 - j\dfrac{f_c}{f}}{1 + \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2} - j\frac{\dfrac{f_c}{f}}{1 + \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$$

Το μέτρο της συνάρτησης μετοφοράς είναι

$$\left|\frac{v_0}{v_s}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}}$$

Η φάση φ της απολαβής (ή συάρτηση αναφοράς είναι)

$$\varphi = -\mathrm{atan}\left(\frac{f_c}{f}\right)$$

Αν μελετήσουνμε την συμπεριοφιρά τηε απολαβής για υψηλές και χαμηλές συχνότητες έχουμε :

Σε υψηλές συχνότητες $\omega \to \infty$ η απολαβή τάσης τείνει στην μονάδα. $\omega \to 0$

Ενώ για χαμηλές συχνότητες $\omega \to 0$ συχνότητες η απολαβή τείνει στο μηδέν.

Το μέτρο της απολαβής   ειναι

$$\left|\frac{v_o}{v_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \qquad (4)$$

Όταν $\frac{1}{\omega C R} = 1$ τότε η απολαβή ειναι

$$\left|\frac{v_o}{v_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \qquad (5)$$

Στην περίπτωσης αυτή η ισχύς μειώνεται κατα το μισό η κατά 3 db. Η συχνότητα που συμβαίνει αυτό λέγεται συχνότητα αποκόπής f_c και συχνότητα υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{1}{\omega_c CR} = 1 \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi\, R\, C} \qquad (6)$$

$$\omega = 2\pi\ f \qquad CR = \frac{1}{2\pi\ f_c}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι και η εξίσωση (3) γράφεται

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega CR}} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{1}{(2\pi f)\left(\dfrac{1}{2\pi f_c}\right)}} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{f_c}{f}} \qquad (7)$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να δουμε την συμεριφορά του κυκλώματος

- Όταν $f >> f_c$ τότε η απολαβή είναι περίπου ίση με 1.

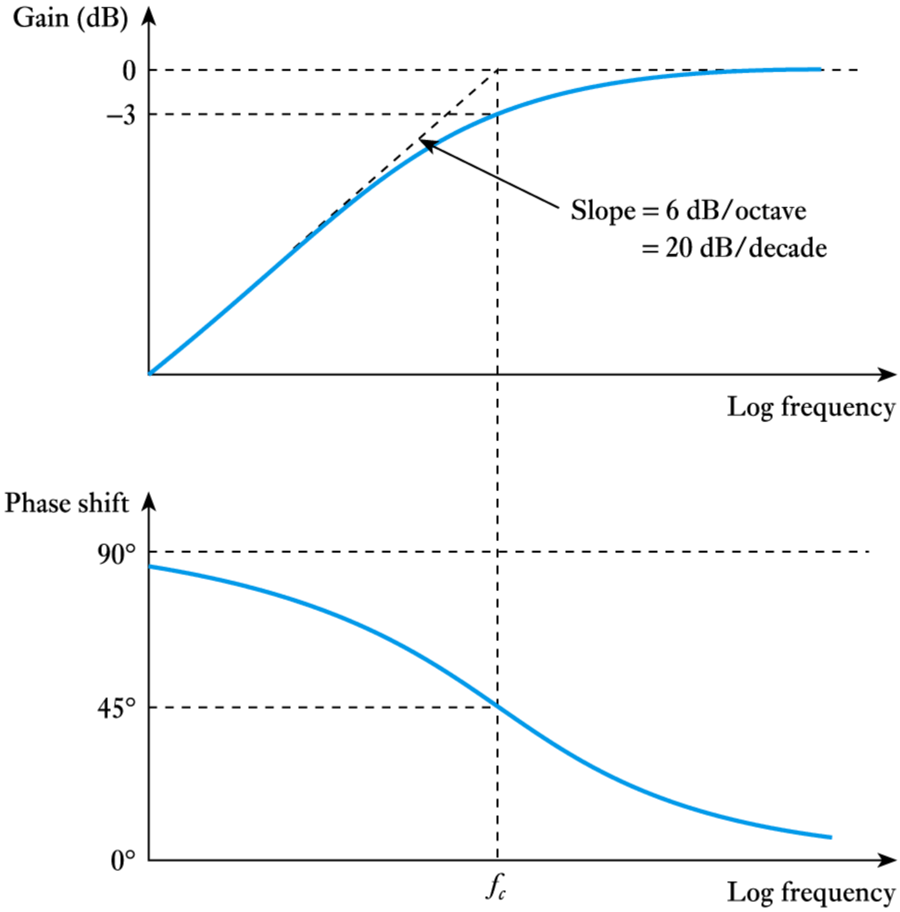
- Όταν $f = f_c$ τότε η απολαβή είναι

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{f_c}{f}} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}} = \frac{1 \times (1 + \mathrm{j})}{(1 - \mathrm{j}) \times (1 + \mathrm{j})} = \frac{(1 + \mathrm{j})}{2} = 0.5 + 0.5\mathrm{j}$$

- Όταν $f << f_c$ τότε

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\dfrac{f_c}{f}} \approx \frac{1}{-\mathrm{j}\dfrac{f_c}{f}} = \mathrm{j}\frac{f}{f_c}$$

Η απόκριση συχνότητας

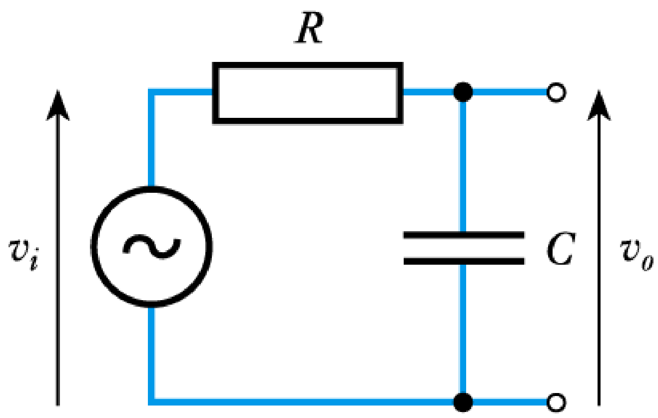


Σχήμα 3. Καμπύλες απόκρισης

Στις χαμηλές συχνότήτες η απολαβή μεταβάλλεται γραμμικά με την συχνότητα . Αν η συχνότητα διαπλασιαστεί η μεταβολή είναι -6dB/octave.

Κύκλωμα RC (χαμηλοπερατό ίλτρο)

Μεταθέτοντας την αντίσταση με τον πυκνωτή προκύπτει το κύκλωμα



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\mathbf{Z_C}}{\mathbf{Z_R} + \mathbf{Z_C}} = \frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}{R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega CR} \tag{8}$$

Από την σχέση (8) φαίνεται εύκολα ότι σε υψηλές συχνότητες η απολαβή τάσης τείνει στο μηδέν. Ενώ για χαμηλές συχνότητες η απολαβή τείνει στην 1.

Με ανάλυση παρόμοια με την προηγούμενη προκύπτει ότι

$$\left|\frac{v_0}{v_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \tag{9}$$

Όταν $\omega C R = 1$ τότε

$$\left|\frac{v_0}{v_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \tag{10}$$

Η συχνότητα που συμβαίνει αυτό ανομάζετια συνχότητα αποκοπής

$$f_c = \frac{1}{2\pi\, R\, C} \tag{11}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\omega = 2\pi\ f$ και $CR = \dfrac{1}{2\pi\ f_c}$ η εξίσωση (8) γράφεται

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega CR} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_c}} \tag{12}$$

Μια πιο λεπτομερή ανάλυση της απολαβής (ή συνάρτησης μεταφοράς)

$$\frac{v_{out}}{v_s} = \frac{Z_C}{Z_C + R} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sRC + 1}$$

Θέτουμε $s = j\omega$ προκύπτει

$$H(j\omega) = \frac{v_{out}}{v_s} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{j2\pi fRC + 1} = \frac{\frac{1}{2\pi RC}}{jf + \frac{1}{2\pi RC}} = \frac{f_c}{jf + f_c}$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} = \frac{1 - j\frac{f}{f_c}}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} - j\frac{\frac{f}{f_c}}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}$$

Η φάση της συνάρτησης μεταφοράς είναι

$$\varphi = -\mathrm{atan}\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να δουμε την συμεριφορά του κυκλώματος

- Όταν $f << f_c$ τότε η απολαβή είναι περίπου ίση με 1
- Όταν $f = f_c$ τότε η απολαβή είναι

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}} = \frac{(1 - j)(1 + j)}{(1 + j)} = \frac{(1 - j)}{2} = 0.5 + 0.5j$$

- Όταν $f >> f_c$ τότε

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{f}{f_c}} \approx \frac{1}{\mathrm{j}\frac{f}{f_c}} = -\mathrm{j}\frac{f_c}{f}$$

Η απόκριση συχνότητας