

ΧΡ. Ν. ΒΑΖΟΥΡΑΣ

Δρ. Ηλγος Μηγ/κός Ε.Μ.Π.

Επ. Καθηγητής Σ.Ν.Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΩΝ – ΚΕΡΑΙΩΝ –
ΡΑΔΙΟΖΕΥΞΕΩΝ



ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2014

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ	5
0.1. Θεμελιώδη ηλεκτρικά και μαγνητικά μεγέθη	5
0.2. Θεμελιώδεις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού	7
0.3. Οριακές συνθήκες.....	8
0.4. Ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα μεγέθη – Ο φασιθέτης (phasor)	11
0.5. Ισχύς – Το διάνυσμα Poynting	14
0.6. Επίπεδα κύματα	16
0.7. Πόλωση	20
ΜΕΡΟΣ Α: ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ	23
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ	25
1.1. Βασικές έννοιες	25
1.1.1. Γενικά	25
1.1.2. Το μοντέλο γραμμής μεταφοράς με κατανεμημένες παραμέτρους.....	26
1.1.3. Οι θεμελιώδεις εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς	29
1.1.4. Η μορφή των κυμάτων στη γραμμή	31
1.2. Τα κυριότερα μεγέθη γραμμής μεταφοράς.....	34
1.2.1. Συντελεστής ανάκλασης – Προσαρμογή.....	34
1.2.2. Αντίσταση εισόδου	36
1.2.3. Απόσβεση ισχύος.....	37
1.2.4. Ανάκλαση ισχύος	38
1.3. Ειδικές περιπτώσεις γραμμών	40
1.3.1. Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες	40
1.3.2. Γραμμή μεταφοράς χωρίς παραμόρφωση	41
1.4. Στάσιμα κύματα σε γραμμή μεταφοράς	43
1.4.1. Προέλευση και μορφή των στασίμων κυμάτων	43
1.4.2. Ο λόγος στασίμου κύματος (SWR).....	48
1.4.3. Η συμπεριφορά των στασίμων κυμάτων ανά περίπτωση φορτίου.....	50
1.5. Εφαρμογές γραμμών μεταφοράς	53
1.5.1. Ο μετασχηματιστής $\lambda/4$	53
1.5.2. Άεργα στοιχεία	54
1.5.3. Μέθοδοι προσαρμογής του φορτίου στη γραμμή μεταφοράς.....	55
1.6. Παραδείγματα.....	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ	71
2.1. Βασικά χαρακτηριστικά των κυματοδηγών	71
2.1.1. Γενικά	71
2.1.2. Κυματοδότηση – Ρυθμοί	72
2.2. Ρυθμοί TE	74
2.2.1. Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στον κυματοδηγό	74

2.2.2.	Συχνότητες αποκοπής.....	78
2.2.3.	Σταθερά διάδοσης - Μήκος κύματος στον κυματοδηγό	79
2.2.4.	Ταχύτητα φάσης και ταχύτητα ομάδας	81
2.2.5.	Χαρακτηριστική αντίσταση κυματοδηγού.....	82
2.3.	Ρυθμοί ΤΜ.....	83
2.4.	Λειτουργία κυματοδηγών στην πράξη	85
2.4.1.	Διέγερση κυματοδηγών	85
2.4.2.	Μονορρυθμική λειτουργία	86
2.4.3.	Ο κύριος ρυθμός TE_{10}	88
2.4.4.	Ισχύς σε κυματοδηγό – Εξασθένηση	91
2.4.5.	Τυποποίηση ορθογωνικών κυματοδηγών	94
2.5.	Παραδείγματα	96
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....		103
3.1.	Γενική θεωρία μικροκυματικών πολυθύρων.....	103
3.1.1.	Εισαγωγικά.....	103
3.1.2.	Κανονικοποιημένες κυματικές τάσεις.....	104
3.1.3.	Οι παράμετροι σκέδασης.....	107
3.1.4.	Ο πίνακας σκέδασης σε ειδικές κατηγορίες πολυθύρων.....	111
3.2.	Παθητικά μικροκυματικά στοιχεία	115
3.2.1.	Εξασθενητής.....	115
3.2.2.	Απομονωτής.....	116
3.2.3.	Κατευθυντικός ζεύκτης.....	118
3.2.4.	Υβριδικό ή μαγικό T	121
3.2.5.	Κυκλοφορητής	123
3.3.	Μικροκυματικές πηγές.....	124
3.3.1.	Λυχνία Klystron με ανακλαστήρα	124
3.3.2.	Δίοδος Gunn.....	131
3.4.	Παραδείγματα	134
ΜΕΡΟΣ Β: ΚΕΡΑΙΕΣ		139
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΟΙ ΚΕΡΑΙΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΚΠΟΜΠΗ		141
4.1.	Βασικά χαρακτηριστικά ακτινοβολίας κεραιών	141
4.1.1.	Γενικά.....	141
4.1.2.	Περιοχές ακτινοβολίας – Το μακρινό πεδίο.....	142
4.2.	Θεμελιώδη μεγέθη.....	147
4.2.1.	Ένταση ακτινοβολίας.....	147
4.2.2.	Το διάγραμμα ακτινοβολίας.....	150
4.2.3.	Κατευθυντικότητα – Κέρδος.....	155
4.3.	Χαρακτηριστικά εισόδου κεραίας.....	160
4.3.1.	Η αντίσταση εισόδου της κεραίας.....	160
4.3.2.	Το ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας εκπομπής	162
4.3.3.	Το εύρος ζώνης κεραίας.....	165
4.4.	Εφαρμογή: Τα δίπολα	166
4.4.1.	Γενικά.....	166

4.4.2.	Το ρεύμα στο δίπολο	167
4.4.3.	Το στοιχειώδες δίπολο (Δίπολο Hertz)	168
4.4.4.	Δίπολο οποιουδήποτε μήκους	171
4.4.5.	Το δίπολο $\lambda/2$	172
4.4.6.	Η γενική μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας διπόλου	174
4.5.	Παραδείγματα.....	179
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΛΗΨΗ – ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΕΡΑΙΩΝ		191
5.1.	Γενικά	191
5.2.	Το θεώρημα της αμοιβαιότητας	192
5.2.1.	Η γενική μορφή	192
5.2.2.	Η κυκλωματική μορφή	194
5.3.	Ισοδύναμα κυκλώματα	195
5.3.1.	Ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας λήψης	195
5.3.2.	Ισοδύναμο κύκλωμα κεραιών σε αλληλεπίδραση.....	197
5.4.	Ενεργός επιφάνεια κεραίας	201
5.4.1.	Ορισμοί.....	201
5.4.2.	Ενεργός επιφάνεια και κατευθυντικότητα – κέρδος.....	204
5.5.	Βασικές εξισώσεις ασύρματων ζεύξεων	207
5.5.1.	Η εξίσωση του Friis.....	207
5.5.2.	Η επίδραση της πόλωσης.....	209
5.5.3.	Προϋπολογισμός ζεύξης (Link budget).....	211
5.5.4.	Η εξίσωση του ραντάρ	215
5.6.	Παραδείγματα.....	217
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΕΣ		229
6.1.	Βασική θεωρία στοιχειοκεραιών	229
6.1.1.	Γενικά	229
6.1.2.	Το διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας	229
6.2.	Γραμμικές στοιχειοκεραίες.....	233
6.2.1.	Γενικά	233
6.2.2.	Ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες	237
6.3.	Τροφοδότηση στοιχειοκεραιών	244
6.3.1.	Γενικά	244
6.3.2.	Η μέθοδος των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων.....	244
6.4.	Παραδείγματα.....	246
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ		261
7.1.	Θεωρητικό υπόβαθρο	261
7.1.1.	Εισαγωγικές παρατηρήσεις	261
7.1.2.	Η πολωνυμική μορφή του παράγοντα διάταξης.....	262
7.1.3.	Ειδικές περιπτώσεις: Διωνυμική και τριγωνική στοιχειοκεραία.....	266
7.2.	Η μέθοδος Schelkunoff.....	269
7.3.	Η μέθοδος των πολωνύμων Chebyshev	274
7.3.1.	Γενικά	274
7.3.2.	Ιδιότητες των πολωνύμων Chebyshev.....	275

7.3.3.	Η βασική αρχή της μεθόδου.....	277
7.3.4.	Μετωπικές στοιχειοκεραίες: Η μέθοδος Dolph	278
7.3.5.	Επέκταση: Η μέθοδος Riblet.....	285
7.4.	Η μέθοδος των αθροισμάτων Fourier	291
7.5.	Παραδείγματα	292
ΜΕΡΟΣ Γ: ΡΑΔΙΟΖΕΥΞΕΙΣ.....		303
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ ΓΗΣ		305
8.1.	Γενικά για τη διάδοση ραδιοκυμάτων στην ατμόσφαιρα	305
8.1.1.	Κατηγοριοποίηση των ραδιοκυμάτων – Ζώνες συχνοτήτων	305
8.1.2.	Οι περιοχές της ατμόσφαιρας.....	306
8.1.3.	Οι κυριότεροι μηχανισμοί διάδοσης κυμάτων στην ατμόσφαιρα.....	307
8.2.	Κύματα εδάφους.....	309
8.2.1.	Ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων από διηλεκτρική επιφάνεια.....	309
8.2.2.	Ανάκλαση κύματος από επίπεδη γη.....	312
8.2.3.	Κατακόρυφο δίπολο πάνω από επίπεδο έδαφος – Το κύμα επιφανείας και το κύμα χώρου	316
8.2.4.	Η περίπτωση οριζόντιου διπόλου.....	322
8.2.5.	Διάδοση στην επιφάνεια της γης: κεραίες πάνω στο έδαφος.....	324
8.2.6.	Διάδοση πάνω από τη γη: κεραίες ανυψωμένες.....	326
8.2.7.	Οπτικός ορίζοντας – Επίδραση της καμπυλότητας της γης.....	330
8.3.	Τροποσφαιρική διάδοση	338
8.3.1.	Γενικά.....	338
8.3.2.	Διηλεκτρικά χαρακτηριστικά της τροπόσφαιρας.....	340
8.3.3.	Ομαλή τροποσφαιρική διάθλαση – Ραδιοηλεκτρικός ορίζοντας.....	342

ΕΙΣΑΓΩΓΗ: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Η λειτουργία των συστημάτων ασύρματων τηλεπικοινωνιών, καθώς και άλλων σημαντικών ηλεκτρονικών συστημάτων (π.χ. radar, ραδιοναυτιλίας, Η/Ν πολέμου) βασίζεται στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Στα κατωτέρω υπενθυμίζονται συνοπτικά οι κυριότερες φυσικές έννοιες που αφορούν στα κύματα αυτά και χρησιμεύουν στη μελέτη των συστημάτων υψηλών συχνοτήτων.

0.1. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Οι πηγές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι τα φορτία και τα ρεύματα (κινούμενα φορτία). Η κατανομή των πηγών στο χώρο περιγράφεται από τα φυσικά μεγέθη των (χωρικών) πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος:

$$\text{Πυκνότητα φορτίου:} \quad \rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad [\text{σε Cb/m}^3]$$

όπου ΔV τυχόν στοιχειώδης όγκος και ΔQ το φορτίο που περιέχει αυτός, στη δεδομένη θέση και χρονική στιγμή. Πρόκειται για βαθμωτό μέγεθος, το οποίο γενικά είναι συνάρτηση του χρόνου t , καθώς και της θέσης (που εκφράζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, όπου $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ τα μοναδιαία διανύσματα των τριών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων).

Αν είναι γνωστή η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σημείο μιας περιοχής όγκου V , τότε το συνολικό φορτίο που περιέχει ο όγκος αυτός είναι

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (\text{E.1})$$

όπου dV ο (απειροστός) όγκος ενός στοιχειώδους τμήματος της περιοχής.

$$\text{Πυκνότητα ρεύματος:} \quad \vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad [\text{σε A/m}^2]$$

όπου $\rho(\vec{r}, t)$ η πυκνότητα κινούμενου φορτίου και $\vec{v}(\vec{r}, t)$ η ταχύτητά του, και προφανώς το μέγεθος είναι διανυσματικό.

Αν θεωρηθεί επιφάνεια S , και δίνεται η πυκνότητα ρεύματος σε κάθε σημείο αυτής, τότε η ολική ένταση ρεύματος διαμέσου της S είναι

$$i(t) = \iint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{E.2})$$

όπου $d\vec{S}$ το εμβαδό ενός στοιχειώδους τμήματος της επιφάνειας S , θεωρούμενο ως διάνυσμα με διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια στο συγκεκριμένο σημείο. Η ουσία της (E.2) μπορεί να διατυπωθεί λέγοντας ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάποια επιφάνεια ισούται με τη **ροή** του διανύσματος της πυκνότητας ρεύματος διαμέσου της επιφάνειας αυτής. Πιο γενικά, ένα ολοκλήρωμα της μορφής της (E.2) που αφορά σε κάποιο διανυσματικό μέγεθος λέγεται **ολοκλήρωμα ροής**. Θα δούμε στα αμέσως επόμενα το παράδειγμα της ηλεκτρικής και της μαγνητικής ροής.

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία περιγράφονται, ως γνωστόν, από τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Για τη διατύπωση των θεμελιωδών εξισώσεων είναι σκόπιμη η εισαγωγή δύο ακόμη διανυσματικών μεγεθών, της διηλεκτρικής μετατόπισης και της μαγνητικής επαγωγής. Τα βασικά πεδιακά μεγέθη είναι, λοιπόν, τα ακόλουθα

$\vec{E}(\vec{r}, t)$: ένταση ηλεκτρικού πεδίου [σε V/m]

$\vec{H}(\vec{r}, t)$: ένταση μαγνητικού πεδίου [σε A/m]

$\vec{D}(\vec{r}, t)$: διηλεκτρική μετατόπιση [σε Cb/m²]

$\vec{B}(\vec{r}, t)$: μαγνητική επαγωγή [σε T (Tesla) = V·sec/m²]

Ο λόγος ύπαρξης των μεγεθών \vec{D} και \vec{B} είναι ότι μέσω αυτών υπολογίζονται η ηλεκτρική και η μαγνητική ροή (οι οποίες, όπως θα δούμε, παίζουν βασικό ρόλο στους νόμους του Maxwell) ως εξής:

$$\text{Ηλεκτρική ροή:} \quad \Psi_E(t) = \iint_S \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Μαγνητική ροή:} \quad \Psi_M(t) = \iint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

δηλ. η διηλεκτρική μετατόπιση είναι η πυκνότητα της ηλεκτρικής ροής και η μαγνητική επαγωγή είναι η πυκνότητα της μαγνητικής ροής (κατά τον ίδιο τρόπο, η \vec{J} είναι η πυκνότητα ροής του ηλεκτρικού ρεύματος). Τα ανωτέρω μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους μέσω των λεγόμενων **συντακτικών σχέσεων**, οι οποίες σε υλικά ομογενή και ισοτροπικά παίρνουν την απλή μορφή

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{E.4})$$

όπου υπεισέρχονται οι παράμετροι

ε: διηλεκτρική επιτρεπτότητα του υλικού [σε F/m]

μ: μαγνητική διαπερατότητα του υλικού [σε H/m]

Οι παράμετροι ε και μ χαρακτηρίζουν τις ιδιότητες του υλικού στο οποίο αναπτύσσονται τα πεδία, και είναι βαθμωτές σταθερές για την προαναφερθείσα περίπτωση ομογενών και ισοτροπικών υλικών. (Σε αντιδιαστολή, ανομοιογενή λέγονται τα υλικά των οποίων οι ιδιότητες δεν είναι παντού οι ίδιες, δηλ. οι ανωτέρω παράμετροι ε και μ μεταβάλλονται στο χώρο, και ανισοτροπικά εκείνα των οποίων οι ιδιότητες εξαρτώνται από τη διεύθυνση και φορά των πεδίων, και συνεπώς οι εν λόγω παράμετροι δεν είναι βαθμωτά μεγέθη αλλά πρέπει να περιγραφούν ως πίνακες 3×3.) Στην περίπτωση αυτή, η οποία και θα μας χρειασθεί στα επόμενα, είναι προφανές ότι και μόνο τα διανύσματα \vec{E} , \vec{H} επαρκούν για την πλήρη περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Ειδικά αν το υλικό είναι κενό ή αέρας (που ενδιαφέρει για τη μελέτη των κεραιών) οι σταθερές παίρνουν τις τιμές κενού :

$$\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Όπως έγινε φανερό από τα προηγούμενα, οι συντακτικές σχέσεις (E.3) και (E.4) συνδέουν τις πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής ροής με τις εντάσεις πεδίων. Μια αντίστοιχη σχέση ισχύει για την πυκνότητα ρεύματος (δηλ. την πυκνότητα ροής του ηλεκτρικού ρεύματος), και δεν είναι άλλη από τον νόμο του Ohm, στη μικροσκοπική (σημειακή) μορφή του

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{E.5})$$

Η γνωστή μακροσκοπική μορφή του νόμου, $i = v/R$, αποδεικνύεται εύκολα με βάση τη μικροσκοπική μορφή, που είναι και η θεμελιώδης. Η παράμετρος σ είναι η ειδική αγωγιμότητα του υλικού [σε S/m όπου 1 S (Siemens ή mho) = 1 Ω^{-1}].

0.2. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα είναι, ως γνωστόν, οι 4 νόμοι του Maxwell, οι οποίοι μπορούν να διατυπωθούν είτε στην ολοκληρωτική είτε στη διαφορική (σημειακή) μορφή. Οι δύο μορφές είναι ισοδύναμες, αλλά η δεύτερη είναι πολύ χρησιμότερη. Σε αυτές πρέπει να προστεθεί η αρχή διατήρησης του φορτίου, η οποία επίσης διατυπώνεται σε δύο εναλλακτικές μορφές.

	Ολοκληρωτική μορφή	Διαφορική μορφή
Εξισώσεις Maxwell		
Νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο	$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
Νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Νόμος της επαγωγής (Faraday)	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Νόμος Ampère-Maxwell	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i + \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{D} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Αρχή διατήρησης φορτίου		
	$\oiint \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Στις παραπάνω εξισώσεις υπαισέρχεται ο διανυσματικός τελεστής ∇ (ανάδελτα), ο οποίος μπορεί να γραφεί τυπικά στη μορφή

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{E.6})$$

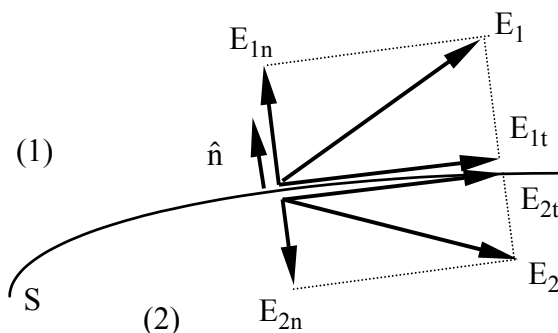
Η έννοια της έκφρασης αυτής είναι ότι εκτελείται η πράξη του εσωτερικού ή εξωτερικού γινομένου με βάση τα μοναδιαία διανύσματα της (E.6), και στη συνέχεια οι τελεστές των μερικών παραγωγίσεων επιδρούν στις κατάλληλες συνιστώσες του διανύσματος επί του οποίου ενεργεί ο τελεστής ∇ . Εκφράσεις για τον τελεστή αυτόν, αν και λιγότερο απλές, υπάρχουν και στα άλλα συστήματα συντεταγμένων (π.χ. κυλινδρικό, σφαιρικό).

0.3. ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα με πρακτικό ενδιαφέρον συνήθως δεν αναφέρονται σε απεριόριστο και ομογενή χώρο αλλά σε διατάξεις πεπερασμένων διαστάσεων, αποτελούμενες από διάφορα υλικά σε διάφορες γεωμετρίες. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απαραίτητη η γνώση της συμπεριφοράς των πεδίων στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ των διαφόρων υλικών. Η συμπεριφορά αυτή διέπεται από τις λεγόμενες **οριακές** (ή **συνοριακές**) **συνθήκες**.

Για τη διατύπωση των οριακών συνθηκών ας θεωρήσουμε τη διαχωριστική επιφάνεια, έστω S , μεταξύ δύο διαφορετικών υλικών (1) και (2) με ηλεκτρικές και μαγνητικές

σταθερές ϵ_1 , μ_1 και ϵ_2 , μ_2 αντίστοιχα (βλ. το Σχ. E.1). Λόγω της ασυνέχειας στις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες είναι δυνατόν να υπάρχει ασυνέχεια στα πεδία πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια S (ενώ αλλιώς οι εξισώσεις Maxwell θα επέβαλλαν τα πεδία να είναι συνεχή). Δηλ. αν θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια S έχει δύο “όψεις”, τότε οι τιμές των πεδίων θα είναι εν γένει διαφορετικές σε κάθε όψη, και ας συμβολισθούν με $\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1$ και $\vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2$ αντίστοιχα.



Σχ. E.1: Πεδιακές συνιστώσες σε διαχωριστική επιφάνεια

Ας ονομάσουμε \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της S , με φορά από την περιοχή (2) προς την (1). Τότε καθένα από τα πεδία στις δύο όψεις της επιφάνειας S , π.χ. \vec{E}_1 και \vec{E}_2 , μπορεί να αναλυθεί σε μία συνιστώσα κάθετη στην επιφάνεια (\vec{E}_{1n} ή \vec{E}_{2n}) και μία συνιστώσα εφαπτομενική στην επιφάνεια (\vec{E}_{1t} ή \vec{E}_{2t}), όπως στο Σχ. E.1. Μπορούμε να ορίσουμε με E_{1n} και E_{2n} τις αλγεβρικές τιμές των κάθετων συνιστωσών αναφορικά με το διάνυσμα \hat{n} , δηλ.

$$\vec{E}_{1n} = E_{1n} \hat{n} \quad , \quad \vec{E}_{2n} = E_{2n} \hat{n}$$

Παρατηρούμε ότι οι συγκεκριμένες φορές του Σχ. E.1 σημαίνουν θετική τιμή της E_{1n} και αρνητική της E_{2n} . Μπορούν επίσης να ορισθούν αλγεβρικές τιμές (π.χ. E_{1t} και E_{2t}) και για τις εφαπτομενικές συνιστώσες, αυτές είναι όμως λιγότερο χρήσιμες επειδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες δεν είναι αναγκαστικά συγγραμμικές, δηλ. ίδιας διεύθυνσης (όπως οι κάθετες): θα έπρεπε λοιπόν να ορισθούν αναφορικά με κάποια εφαπτόμενα διανύσματα \hat{i}_1 και \hat{i}_2 , όχι αναγκαστικά τα ίδια. Ειδικότερα, προκύπτει ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} έχουν την ίδια διεύθυνση ενώ του μαγνητικού όχι.

Έστω επίσης ρ_s και \vec{J}_s η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (σε Cb/m^2) και ρεύματος (σε A/m), αντίστοιχα, που τυχόν υπάρχουν πάνω στην επιφάνεια S . Το διάνυσμα \vec{J}_s έχει διεύθυνση εφαπτομενική στην S .

Οι οριακές συνθήκες (Ο.Σ.) διατυπώνονται ως εξής:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \Leftrightarrow D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \Leftrightarrow \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \Leftrightarrow E_{1t} - E_{2t} = 0 \Leftrightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \Leftrightarrow B_{1n} - B_{2n} = 0 \Leftrightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \Leftrightarrow \begin{cases} H_{1t,x} - H_{2t,x} = J_{s,x} \\ H_{1t,y} - H_{2t,y} = J_{s,y} \end{cases}$$

όπου, στην τελευταία Ο.Σ., οι (κάθετες μεταξύ τους) διευθύνσεις x και y ορίζονται πάνω στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας S.

Δηλαδή οι Ο.Σ. λένε ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του \vec{E} και η κάθετη συνιστώσα του \vec{B} είναι πάντοτε συνεχείς καθώς περνάμε από το ένα υλικό στο άλλο, ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα του \vec{H} και η κάθετη του \vec{D} μπορούν να είναι ασυνεχείς αν υπάρχουν επιφανειακές κατανομές πηγών στη διαχωριστική επιφάνεια.

Ειδική περίπτωση: Επιφάνεια τέλειου αγωγού

Έστω ότι το υλικό (2) είναι τέλειος αγωγός (δηλ. με άπειρη αγωγιμότητα). Σε έναν τέλειο αγωγό δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθούν ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία (παρά μόνο ρεύματα στην επιφάνειά του). Δηλ. ισχύει:

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_2 = 0 \quad , \quad \vec{H}_2 = \vec{B}_2 = 0$$

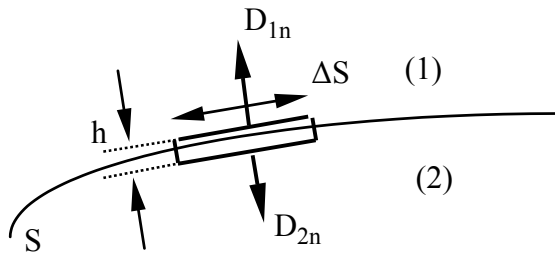
Τότε οι ανωτέρω Ο.Σ. παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} E_{1t} &= 0 & D_{1n} &= \varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s \\ B_{1n} &= \mu_1 H_{1n} = 0 & H_{1t,x} &= J_{s,x} \quad , \quad H_{1t,y} = J_{s,y} \end{aligned}$$

η οποία δείχνει ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου οφείλουν να μηδενίζονται στα τοιχώματα του αγωγού (και η απαίτηση αυτή χρησιμεύει στον προσδιορισμό της λύσης του εκάστοτε προβλήματος), ενώ η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η εφαπτομενική του μαγνητικού χρησιμοποιούνται αφού λυθεί το πεδιακό πρόβλημα για τον υπολογισμό (εφόσον είναι επιθυμητό) των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος στην επιφάνεια του αγωγού. Η ειδική περίπτωση αυτή είναι σημαντική διότι στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα που εμπλέκουν αγωγούς γίνεται για απλοποίηση η παραδοχή ότι οι αγωγοί είναι τέλειοι, χωρίς να βλάπτεται πολύ η ακρίβεια της λύσης.

Απόδειξη των Οριακών Συνθηκών

Οι Ο.Σ. ουσιαστικά μπορούν να αποδειχθούν από τις εξισώσεις Maxwell. Π.χ. για την πρώτη των Ο.Σ. έστω ο στοιχειώδης όγκος $\Delta V = h\Delta S$ του Σχ. Ε.2.



Ξεκινάμε από τον νόμο του Gauss:

$$\Delta Q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $h \rightarrow 0$ και ότι η πλευρά ΔS είναι εφαπτομενική, τότε όλη η ροή προέρχεται από τις δύο πλευρές ΔS , οπότε

$$\text{Σχ. E.2: Απόδειξη της πρώτης Ο.Σ.} \quad \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = (D_{1n} - D_{2n})\Delta S$$

και άρα $(D_{1n} - D_{2n})\Delta S = \Delta Q \Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = \Delta Q/\Delta S = \rho_s$.

0.4. ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΜΕΓΕΘΗ – Ο ΦΑΣΙΘΕΤΗΣ (PHASOR)

Φασιθέτης (phasor) λέγεται ο παραστατικός μιγαδικός αριθμός που χρησιμοποιείται για την περιγραφή ημιτονοειδώς μεταβαλλομένων μεγεθών της ίδιας συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, έστω ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενο μέγεθος που είναι γενικά συνάρτηση και του χώρου και του χρόνου, δηλ. εξαρτάται από τη θέση και από τη χρονική στιγμή

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

όπου $\psi_0(\vec{r})$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης (σε τυχόν σημείο του χώρου), ενώ η γωνία $\phi(\vec{r})$ (στο εξής απλώς ϕ) είναι, ως γνωστόν, η σταθερά φάσης της ταλάντωσης.

Παρατηρούμε ότι η ανωτέρω έκφραση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\psi_0(\vec{r}) e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = \text{Re}\left\{\psi_0(\vec{r}) e^{j\phi} e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\overset{\circ}{\psi}(\vec{r}) e^{j\omega t}\right\} \quad (\text{E.7})$$

όπου ορίσαμε την ποσότητα

$$\overset{\circ}{\psi}(\vec{r}) \stackrel{\Delta}{=} \psi_0(\vec{r}) e^{j\phi} = \psi_0(\vec{r}) \exp[j\phi] \quad (\text{E.8})$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\overset{\circ}{\psi}(\vec{r})$ είναι ο **phasor (φασιθέτης)** του μεγέθους $\psi(\vec{r}, t)$. Όπως είναι γνωστό, η έννοια του φασιθέτη ορίζεται στη θεωρία των εναλλασσομένων ρευμάτων χαμηλής συχνότητας (συχνά και με άλλες ονομασίες όπως **παραστατικός μιγαδικός** ή **στροφέας**) και με τη μόνη διαφορά ότι εκεί εφαρμόζεται ως επί το πλείστον σε μέγεθος $\psi(t)$ που δεν εξαρτώνται από τη θέση παρά μόνο από τη χρονική στιγμή (π.χ. τάσεις ή ρεύματα σε ορισμένο σημείο κυκλώματος).

Αν όλα τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα (εναλλασσόμενα) με την ίδια (κυκλική) συχνότητα ω , τότε ο ανωτέρω παράγοντας $\exp[j\omega t]$ είναι κοινός σε όλα. Έτσι τον παραλείπουμε και παριστάνουμε τα εναλλασσόμενα

μεγέθη με τους φασιθέτες αυτών. Αυτό σημαίνει ότι η χρονική εξάρτηση δεν γράφεται αλλά εξυπακούεται ότι είναι κοινή για όλα τα εν λόγω μεγέθη. Συνήθως (στη θεωρία των H/M κυμάτων) παραλείπουμε και τον μικρό κύκλο και γράφουμε $\psi(\vec{r})$ αντί $\psi(\vec{r})$. Η σύμβαση που θα χρησιμοποιήσουμε για τον συμβολισμό στα επόμενα είναι ότι όπου υπάρχει χρονική εξάρτηση (t) υπονοείται πραγματικό μέγεθος ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενο, δηλ. η στιγμιαία τιμή του, ενώ όπου δεν υπάρχει υπονοείται ο αντίστοιχος μιγαδικός φασιθέτης αυτού.

Αν η στιγμιαία τιμή $\psi(\vec{r}, t)$ είναι γνωστή, τότε ο φασιθέτης $\psi(\vec{r})$ υπολογίζεται με βάση την (E.8), από το πλάτος και τη σταθερά φάσης της ταλάντωσης. Η μετάβαση από τον φασιθέτη στη στιγμιαία τιμή γίνεται με διαδικασία αντίστροφη της προηγούμενης, δηλ. πολλαπλασιάζεται ο φασιθέτης με τον μιγαδικό παράγοντα της χρονικής μεταβολής $\exp[j\omega t]$ και στη συνέχεια λαμβάνεται το πραγματικό μέρος. Ουσιαστικά πρόκειται για εφαρμογή της (E.7):

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\psi(\vec{r}) \exp[j\omega t]\}$$

Η βασική ιδιότητα των φασιθετών προκύπτει από την παρατήρηση ότι

$$\frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \text{Re}\{j\omega \psi_0(\vec{r}) \exp[j(\omega t + \phi)]\} = \text{Re}\{j\omega \psi(\vec{r}) \exp[j\omega t]\} \quad (\text{E.9})$$

η οποία σημαίνει ότι αν $\psi(\vec{r})$ είναι ο φασιθέτης του μεγέθους $\psi(\vec{r}, t)$, τότε $j\omega \psi(\vec{r})$ είναι ο φασιθέτης της χρονικής παραγώγου $\partial \psi(\vec{r}, t)/\partial t$. Με άλλα λόγια: η χρήση φασιθετών μετατρέπει τη χρονική παραγωγή $\partial/\partial t$ σε πολλαπλασιασμό επί $j\omega$.

Για διανυσματικά μεγέθη, π.χ. το \vec{E} , μπορούν να ορισθούν φασιθέτες με ανάλογο τρόπο

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\vec{E}(\vec{r}) \exp[j\omega t]\} \quad (\text{E.10})$$

όπου το διάνυσμα $\vec{E}(\vec{r})$ είναι ο φασιθέτης του μεγέθους $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Πρόκειται βέβαια για διάνυσμα με μιγαδικές συνιστώσες:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= E_x(\vec{r}) \hat{x} + E_y(\vec{r}) \hat{y} + E_z(\vec{r}) \hat{z} = \\ &= |E_x(\vec{r})| \exp[j\phi_x] \hat{x} + |E_y(\vec{r})| \exp[j\phi_y] \hat{y} + |E_z(\vec{r})| \exp[j\phi_z] \hat{z} \end{aligned}$$

Δηλαδή η ανωτέρω εξίσωση (E.10) περιγράφει τρεις ταλαντώσεις, μία για κάθε συνιστώσα, και καθεμία ταλάντωση έχει το αντίστοιχο μέτρο και σταθερά φάσης:

$$E_x(\vec{r}, t) = \text{Re}\{E_x(\vec{r}) \exp[j\omega t]\} = |E_x(\vec{r})| \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \text{Re}\{E_y(\vec{r}) \exp[j\omega t]\} = |E_y(\vec{r})| \cos(\omega t + \phi_y)$$

$$E_z(\vec{r}, t) = \text{Re}\{E_z(\vec{r}) \exp[j\omega t]\} = |E_z(\vec{r})| \cos(\omega t + \varphi_z)$$

Οι εξισώσεις Maxwell στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (ΗΜΚ)

Αν βρισκόμαστε στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση, δηλ. αν όλα τα πεδία (και φυσικά οι πηγές) είναι εναλλασσόμενα με την ίδια συχνότητα ω , τότε οι εξισώσεις Maxwell μπορούν να γραφούν με χρήση των φασιθετών των πεδίων. Με τη βοήθεια της βασικής ιδιότητας (E.9), οι εξισώσεις Maxwell λαμβάνουν τη μορφή

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega \left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) \vec{E} \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_c \vec{E}$$

όπου στην τελευταία έχει τεθεί

$$\epsilon_c = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

Η ποσότητα ϵ_c λέγεται μγαδική διηλεκτρική σταθερά και ενσωματώνει τις διηλεκτρικές και τις αγώγιμες ιδιότητες του υλικού. Περιγράφει, λοιπόν, όλα τα γραμμικά και ιστροπικά διηλεκτρικά, είτε χωρίς αγωγιμότητα (ιδανικά διηλεκτρικά), είτε με αγωγιμότητα (διηλεκτρικά με απώλειες).

Το μέτρο φασιθέτη - Πλάτος και ενεργός τιμή

Εδώ θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι στα προηγούμενα οι φασιθέτες ορίσθηκαν με τη σύμβαση

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) \exp[j\varphi] \Rightarrow |\psi(\vec{r})| = \psi_0(\vec{r})$$

δηλαδή ότι το μέτρο του φασιθέτη ισούται με το πλάτος της ημιτονοειδούς ταλάντωσης. Μπορούν όμως να ορισθούν και με τη σύμβαση

$$|\psi(\vec{r})| = \frac{\psi_0(\vec{r})}{\sqrt{2}}$$

δηλαδή το μέτρο του φασιθέτη να ισούται με την ενεργό τιμή του ημιτονοειδούς μεγέθους. Οπότε ισχύει

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\psi_0(\vec{r})}{\sqrt{2}} \exp[j\varphi]$$

και

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}\{\sqrt{2} \psi(\vec{r}) \exp[j\omega t]\}$$

Η σύμβαση αυτή είναι συνηθισμένη στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα για τον ίδιο λόγο που συνηθίζεται (ως γνωστόν) και στα εναλλασσόμενα ρεύματα, επειδή απαλλάσσει τις εξισώσεις της ισχύος από τον παράγοντα $\frac{1}{2}$. Οι υπόλοιπες ιδιότητες των φασιθετών εξακολουθούν να ισχύουν αμετάβλητες, π.χ. οι εξισώσεις Maxwell έχουν την ίδια μορφή που αναφέρεται και προηγουμένως.

0.5. ΙΣΧΥΣ – ΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ Poynting

Το διάνυσμα Poynting \vec{P} εκφράζει την πυκνότητα ισχύος που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανά μονάδα κάθετης επιφάνειας (σε W/m^2). Πιο συγκεκριμένα, αν ένα τμήμα επίπεδης επιφάνειας τοποθετηθεί κάθετα στη διεύθυνση του διανύσματος Poynting, θα διέλθει μέσα από αυτό ηλεκτρομαγνητική ισχύς ίση με το μέτρο του διανύσματος Poynting επί το εμβαδό του τμήματος. Αν αυτό το τμήμα επιφάνειας δεν τοποθετηθεί κάθετα στη διεύθυνση του διανύσματος Poynting αλλά σε κάποια άλλη διεύθυνση, τότε η ηλεκτρομαγνητική ισχύς που διέρχεται διαμέσου του εν λόγω τμήματος επιφάνειας ισούται με το εμβαδό του τμήματος αυτού επί την προβολή του διανύσματος Poynting σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια (δηλ. επί την κάθετη συνιστώσα του διανύσματος).

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας dS (το οποίο ακριβώς επειδή είναι στοιχειώδες μπορεί πάντα να θεωρείται περίπου επίπεδο), με το αντίστοιχο διάνυσμα $d\vec{S}$, και αν η τιμή του διανύσματος Poynting στη θέση αυτή είναι $\vec{P}(\vec{r})$, τότε η (στοιχειώδης) τιμή της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος διαμέσου του στοιχειώδους αυτού τμήματος είναι

$$dW = \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Κατά συνέπεια, για μια επιφάνεια S οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος, η ολική ισχύς που μεταφέρει το κύμα διαμέσου της επιφάνειας είναι

$$W = \iint_S \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (E.11)$$

πράγμα που μπορεί να διατυπωθεί και λέγοντας ότι η ηλεκτρομαγνητική ισχύς διαμέσου κάποιας επιφάνειας είναι η ροή του διανύσματος Poynting επί της επιφάνειας αυτής.

Ο αναγνώστης θα παρατήρησε ότι στις παραπάνω εκφράσεις δεν έχει γραφεί χρονική εξάρτηση. Αυτό επειδή ισχύουν είτε για τη στιγμιαία τιμή του διανύσματος Poynting, οπότε δίνουν τη στιγμιαία ισχύ, είτε για τη μέση χρονική τιμή του διανύσματος οπότε δίνουν τη μέση ισχύ. Εφόσον τα μεγέθη είναι ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενα, αυτή που κυρίως ενδιαφέρει είναι η μέση ισχύς. Αποδεικνύεται ότι η μέση χρονική τιμή του

διανύσματος Poynting δίνεται από τους φασιθέτες των πεδιακών εντάσεων \vec{E} και \vec{H} ως εξής:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \quad (\text{E.12})$$

όπου (κατά τα γνωστά) το σύμβολο \times δηλώνει εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, και ο αστερίσκος (*) το μιγαδικό συζυγές. Η ανωτέρω σχέση ισχύει εφόσον οι φασιθέτες έχουν ορισθεί με βάση το πλάτος, δηλ. με τη σύμβαση ότι το μέτρο του φασιθέτη ισούται με το πλάτος της ημιτονοειδούς ταλάντωσης. Αν όμως χρησιμοποιηθεί η σύμβαση της ενεργού τιμής (βλ. τα προηγούμενα), τότε ισχύει

$$\vec{P}(\vec{r}) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

Ένα ακόμη αξιοσημείωτο συμπέρασμα σχετίζεται με την αντίστοιχη έκφραση της παραπάνω (E.12) με το φανταστικό μέρος στη θέση του πραγματικού, δηλ. την ποσότητα

$$\frac{1}{2} \text{Im}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

Από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία αποδεικνύεται ότι, ενώ η (E.12) με τον τελεστή Re εκφράζει την πυκνότητα της ισχύος που μεταφέρεται από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, η παραπάνω ποσότητα με τον τελεστή Im εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας που παραμένει αποθηκευμένη στο χώρο λόγω της ύπαρξης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Με άλλα λόγια, εκφράζει την «άεργη» ισχύ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου της οποίας η στιγμιαία τιμή μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στα διάφορα σημεία του χώρου (πραγματοποιεί, θα έλεγε κανείς, μια στάσιμη ταλάντωση στο χώρο) αλλά κατά μέσον όρο στο χρόνο δεν μετακινείται. Το φαινόμενο είναι αντίστοιχο με την αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα άεργο στοιχείο κυκλώματος (πυκνωτή ή πηνίο) που διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, η οποία αυξομειώνεται ημιτονοειδώς και η ισχύς άλλοτε εισέρχεται στο άεργο στοιχείο και άλλοτε εξέρχεται προς το υπόλοιπο κύκλωμα αλλά κατά μέσον όρο το άεργο στοιχείο δεν απορροφά ούτε αποδίδει ισχύ. Όπως η άεργη ισχύς του πυκνωτή ή πηνίου σχετίζεται με την αποθήκευση ενέργειας στο στοιχείο αυτό και όχι με την μεταφορά της στο κύκλωμα, έτσι και η άεργη ισχύς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σχετίζεται με την αποθήκευση ενέργειας στο πεδίο και όχι με την μετάδοσή της διά του κύματος.

Τέλος, με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, πρέπει να επισημανθεί η αναλογία ανάμεσα στην έκφραση

$$\frac{1}{2} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

και στη γνωστή έκφραση (όπου τα V, I είναι phasors)

$$\frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*$$

η οποία δίνει την μιγαδική ισχύ εναλλασσόμενου ρεύματος στη θεωρία των κυκλωμάτων (το πραγματικό μέρος είναι η πραγματική ισχύς και το φανταστικό η άεργη). Ειδικότερα αξίζει να παρατηρήσετε την αντιστοιχία μεταξύ τάσης – ηλεκτρικού πεδίου και ρεύματος – μαγνητικού πεδίου, η οποία έχει γενικότερη εφαρμογή, όπως θα φανεί αρκετές φορές στα επόμενα.

0.6. ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΥΜΑΤΑ

Επίπεδο κύμα, π.χ. κατά τη διεύθυνση z , λέγεται ένα κύμα στο οποίο το κυμαινόμενο μέγεθος, π.χ. η x συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, περιγράφεται από μια έκφραση της μορφής

$$E_x(\vec{r}, t) = E_x(z, t) = |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad (\text{E.13})$$

όπου ω είναι η κυκλική (ή γωνιακή) συχνότητα, και η ποσότητα k λέγεται (γωνιακός) κυματικός αριθμός. Ισχύει η σχέση

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{E.14})$$

όπου λ το μήκος κύματος.

Η διεύθυνση z λέγεται διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η ποσότητα $(\omega t - kz + \varphi)$ λέγεται φάση και η σταθερά φ λέγεται σταθερά φάσης, ενώ $|E_{x0}|$ είναι το πλάτος του κύματος (θα γίνει εμφανές σε λίγο γιατί γράφεται ως μέτρο). Ο λόγος που το κύμα αυτό λέγεται επίπεδο είναι ότι οι επιφάνειες σταθερής φάσης (δηλ. $\omega t - kz + \varphi = \text{σταθερό}$) είναι τα επίπεδα $z = \text{σταθερό}$, δηλ. επίπεδα κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Επίπεδα κύματα ακόμη γενικότερης μορφής μπορούν να προκύψουν συνδυάζοντας περισσότερες πεδιακές συνιστώσες (π.χ. E_x και E_y).

Θα δείξουμε ότι το κύμα αυτό διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση (+ z) του άξονα των z . Ας υποθέσουμε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = t_1$ εμφανίζεται ένα μέγιστο του κυμαινόμενου μεγέθους (δηλ. του πεδίου) σε κάποια θέση $z = z_1$. Η θέση αυτή δίνεται από τη συνθήκη

$$\omega t_1 - k z_1 + \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{\omega t_1 + \varphi}{k}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνθήκη αυτή θα έδινε μέγιστο με οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π στο δεύτερο μέλος, αλλά εδώ επιλέγουμε για να παρακολουθήσουμε το συγκεκριμένο μέγιστο που προκύπτει για την τιμή 0. Σε κάποια μεταγενέστερη χρονική

στιγμή $t = t_2 > t_1$, το εν λόγω μέγιστο έχει μετατοπισθεί στη θέση $z = z_2$, για την οποία ισχύει

$$\omega t_2 - kz_2 + \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \frac{\omega t_2 + \varphi}{k}$$

και είναι προφανές ότι $z_2 > z_1$. Συμπεραίνουμε ότι καθώς περνάει ο χρόνος η θέση μεγίστου μετατοπίζεται προς τα δεξιά, δηλ. προς τα θετικά z , και άρα αυτή είναι η φορά κατά την οποία οδεύει το κύμα.

Παρατηρούμε τώρα από την (E.13) ότι για $t = \text{σταθερό}$ η τιμή της φάσης μικραίνει όσο μεγαλύτερο είναι το z . Καθώς το t αυξάνει (δηλ. περνάει ο χρόνος), η φάση αυξάνει από τα αριστερά προς τα δεξιά (δηλ. προς την κατεύθυνση $+z$). Μπορούμε λοιπόν να θεωρούμε ότι η φάση διαδίδεται προς τη φορά διάδοσης του κύματος.

Από την παραπάνω απόδειξη μπορεί να προκύψει η ταχύτητα κίνησης της θέσης μεγίστου, η οποία προφανώς είναι

$$v_p = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{(\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)}{k(t_2 - t_1)} = \frac{\omega(t_2 - t_1)}{k(t_2 - t_1)} = \frac{\omega}{k}$$

Αλλά το μέγιστο αυτό δεν είναι παρά ένα σημείο με δεδομένη (σταθερή) φάση (0, εν προκειμένω), και η ίδια διαδικασία θα μπορούσε να επαναληφθεί με το ίδιο αποτέλεσμα για οποιοδήποτε σημείο σταθερής φάσης καθώς αυτό κινείται προς τη φορά διάδοσης του κύματος. Κατά συνέπεια η ταχύτητα αυτή δεν είναι παρά η ταχύτητα διάδοσης της φάσης, και γι' αυτό ονομάζεται **ταχύτητα φάσης** του κύματος (μερικές φορές αποκαλείται απλώς ταχύτητα του κύματος, αν και αυτό μπορεί να δημιουργήσει συγχύσεις). Από την προηγούμενη σχέση, λαμβάνοντας υπόψη και την (E.14), προκύπτει

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f \quad (\text{E.15})$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορεί ναδειχθεί και ότι η έκφραση

$$E_x(\vec{r}, t) = E_x(z, t) = |E_{x0}| \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

σημαίνει κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση ($-z$), ενώ η ταχύτητα φάσης είναι ακριβώς η ίδια.

Παριστάνοντας το πεδίο με φασιθέτες, καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις που περιγράφουν επίπεδο κύμα (σημειώνοντας και τη φορά διάδοσης)

$$E_x(\vec{r}) = E_x(z) = E_{x0} \exp(-jkz): \quad \text{Κατεύθυνση } +z$$

$$E_x(\vec{r}) = E_x(z) = E_{x0} \exp(jkz): \quad \text{Κατεύθυνση } -z$$

όπου η μιγαδική ποσότητα E_{x0} σε πολική μορφή είναι

$$E_{x0} = |E_{x0}| e^{j\varphi}$$

πράγμα που επεξηγεί και τον συμβολισμό $|E_{x0}|$ στην (E.13).

Αποδεικνύεται ότι για το κενό (τον ελεύθερο χώρο) ή για κάποιον χώρο ομογενή και ιστροπικό το επίπεδο κύμα είναι εγκάρσιο, δηλ. το πεδίο είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης. Στην περίπτωση μας, με διεύθυνση διάδοσης z , πρέπει να έχει μόνο x και y συνιστώσες, οι οποίες, π.χ. για κατεύθυνση $+z$, δίνονται από τις

$$E_x = |E_{x0}| \exp(j\varphi_x) \exp(-jkz)$$

$$E_y = |E_{y0}| \exp(j\varphi_y) \exp(-jkz)$$

όπου παρατηρούμε ότι οι σταθερές φάσης φ_x και φ_y είναι γενικά διαφορετικές για κάθε συνιστώσα.

Εφαρμογή: Υπολογισμοί πεδίων σε ένα επίπεδο κύμα

Έστω επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδιδόμενο (οδεύον) κατά τη διεύθυνση z , μέσα σε διηλεκτρικό υλικό χωρίς απώλειες ($\sigma = 0$), και έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο του έχει μόνο x συνιστώσα, δηλαδή

$$\vec{E} = E_x \hat{x}, \quad E_x = E_x(z) = E_{x0} \exp(-jkz) = |E_{x0}| \exp(j\varphi_x) \exp(-jkz)$$

Θα εφαρμόσουμε τις εξισώσεις Maxwell για τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων.

Με εφαρμογή του νόμου Faraday μπορεί να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο ως εξής:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

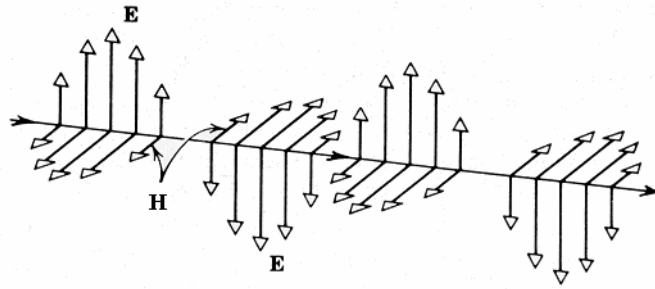
Από τον γνωστό τύπο του εξωτερικού γινομένου προκύπτει

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = -jk E_{x0} \exp(-jkz) \hat{y}$$

και άρα το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο y συνιστώσα:

$$H_y = H_y(z) = \frac{k}{\omega\mu} E_{x0} \exp(-jkz)$$

Μια σχηματική εικόνα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου φαίνεται στο Σχ. E.3 που ακολουθεί.



Σχ. E.3: Οι στιγμιαίες τιμές των συνιστωσών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για ένα επίπεδο κύμα.

Αν τώρα εφαρμόσουμε το νόμο Ampère-Maxwell (με $\vec{J} = 0$ διότι $\sigma = 0$)

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} = j\omega\epsilon E_x \hat{x}$$

και λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{x} = j\frac{k^2}{\omega\mu} E_{x0} \exp(-jkz) \hat{x}$$

προκύπτει

$$j\frac{k^2}{\omega\mu} E_{x0} \exp(-jkz) = j\omega\epsilon E_{x0} \exp(-jkz) \Leftrightarrow \frac{k^2}{\omega\mu} = \omega\epsilon \Leftrightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

όπου ϵ και μ είναι, αντίστοιχα, η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του χώρου όπου εμφανίζεται το κύμα. Αλλά, σύμφωνα με την (E.15), η ποσότητα ω/k είναι η ταχύτητα φάσης του κύματος. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί και ναδειχθεί ότι ισχύει για όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στον συγκεκριμένο χώρο, δηλ. ότι όλα έχουν την ίδια ταχύτητα φάσης. Επειδή το φως είναι ένα από αυτά, καταλήγουμε στο εξής αξιοσημείωτο συμπέρασμα: *Η ταχύτητα του φωτός σε κάποιο ομογενές και ιστροπικό υλικό, και γενικότερα η ταχύτητα φάσης κάθε ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο υλικό αυτό, δίνεται με βάση τις παραμέτρους του υλικού από τη σχέση*

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{E.16})$$

Επίσης, αν σχηματίσουμε το λόγο των μέτρων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, από τις προηγούμενες εκφράσεις παίρνουμε

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{|E_x|}{|H_y|} = \frac{|E_{x0}|}{|H_{y0}|} = \frac{\omega\mu}{k} = c\mu = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Δηλαδή ο λόγος είναι σταθερός. Αυτό είναι ένα συμπέρασμα που ισχύει γενικά για επίπεδα κύματα (αλλά και για άλλους τύπους κυμάτων, όπως θα δούμε στους κυματοδηγούς). Ο σταθερός αυτός λόγος ονομάζεται **κυματική αντίσταση** του χώρου και συμβολίζεται με ζ (ή επίσης με Z_0)

$$\zeta = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{E.17})$$

Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η κυματική αντίσταση εκφράζεται σε μονάδες Ohm (Ω). Σημειώνουμε ειδικότερα ότι για τον ελεύθερο χώρο (κενό ή αέρα όπου $\epsilon = \epsilon_0$ και $\mu = \mu_0$), εκτελώντας τις πράξεις προκύπτει με καλή προσέγγιση για την κυματική αντίσταση η τιμή

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \dots = 120 \pi \approx 377 \Omega$$

0.7. ΠΟΛΩΣΗ

Πόλωση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος λέγεται η τροχιά που διαγράφει το άκρο του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} πάνω σε επίπεδο σταθερής φάσης, δηλ. κάθετο στον άξονα z (π.χ. πάνω στο επίπεδο $x-y$). Η τροχιά αυτή μπορεί να είναι ευθεία γραμμή, κύκλος ή έλλειψη, οπότε αντίστοιχα η πόλωση ονομάζεται γραμμική, κυκλική ή ελλειπτική. Αυτό εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ των σταθερών φάσης φ_x και φ_y των συνιστωσών του πεδίου.

Για να εξετάσουμε το είδος της πόλωσης θεωρούμε τις εκφράσεις των στιγμιαίων τιμών των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου

$$E_x = E_x(z, t) = |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$E_y = E_y(z, t) = |E_{y0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $\varphi_x - \varphi_y = 0, \pm \pi$. Τότε ισχύει (για κάθε χρονική στιγμή)

$$\frac{E_x}{E_y} = \text{σταθερό}$$

που είναι εξίσωση ευθείας ως προς τις μεταβλητές E_x και E_y . Η πόλωση είναι γραμμική διότι η συνισταμένη τους έχει σταθερή διεύθυνση και επομένως κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή.

2. Αν $\varphi_x - \varphi_y = \pm \frac{\pi}{2}$ και $|E_{x0}| = |E_{y0}|$, τότε ισχύει

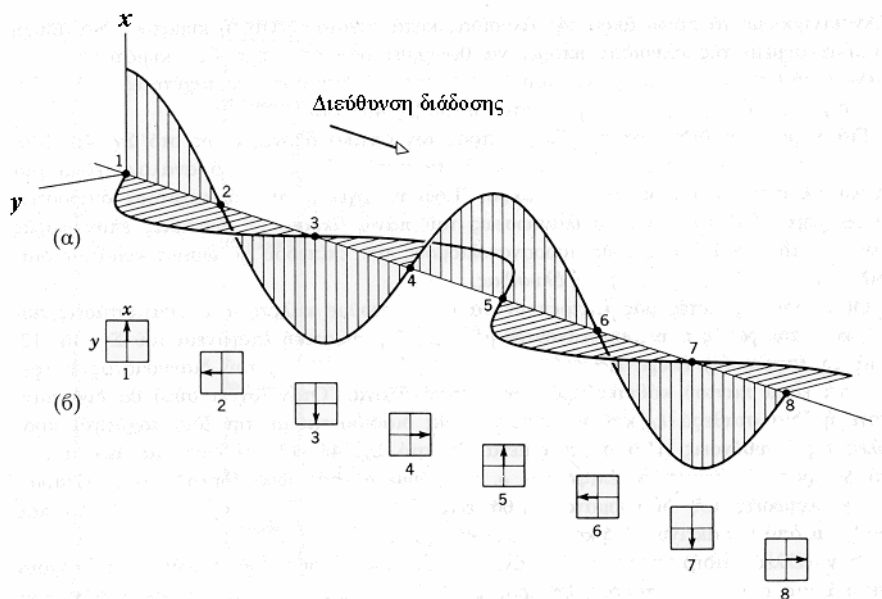
$$|E_x|^2 + |E_y|^2 = \text{σταθερό}$$

που είναι εξίσωση κύκλου ως προς τις μεταβλητές E_x και E_y , οπότε η πόλωση είναι κυκλική. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου (η συνισταμένη των E_x και E_y) διαγράφει κυκλική έλικα, κινούμενο προς την κατεύθυνση $+z$. Ανάλογα με το αν η διαφορά φάσης $\varphi_x - \varphi_y$ είναι $+\frac{\pi}{2}$ ή $-\frac{\pi}{2}$, δηλ. αν προπορεύεται η x ή η y συνιστώσα, η πόλωση χαρακτηρίζεται ως δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη.

3. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις ισχύει

$$\frac{|E_x|^2}{|E_{x0}|^2} + \frac{|E_y|^2}{|E_{y0}|^2} - 2 \frac{E_x E_y}{|E_{x0}| |E_{y0}|} \cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)$$

Πρόκειται για εξίσωση έλλειψης και άρα η πόλωση είναι ελλειπτική.



Σχ. E.4: α) Οι στιγμιαίες τιμές των συνιστωσών E_x και E_y για ένα κυκλικά πολωμένο κύμα. β) Η διεύθυνση και φορά της συνισταμένης σε διάφορα σημεία του κύματος.

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΡΑΜΜΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

1.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

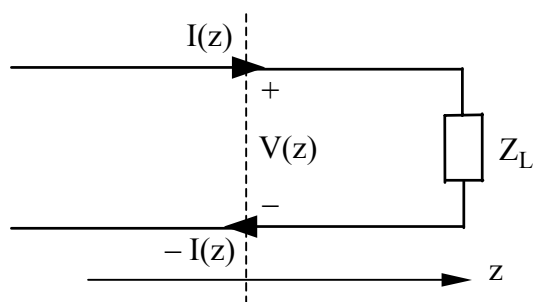
1.1.1. Γενικά

Γραμμή μεταφοράς γενικά ονομάζεται διάταξη (συνήθως κατασκευασμένη από αγωγούς μαζί με μονωτικό διηλεκτρικό περίβλημα) στην οποία αναπτύσσονται οδεύοντα κύματα, και επομένως μεταφέρει ηλεκτρομαγνητική ενέργεια (και πληροφορία) από το ένα άκρο της στο άλλο. Στις σχετικά χαμηλότερες συχνότητες (μέχρι την τάξη των εκατοντάδων MHz ή κατ' εξαίρεση λίγων GHz) χρησιμοποιούνται γραμμές δύο αγωγών οι οποίοι είναι τοποθετημένοι είτε ο ένας παράλληλα στον άλλο ή συνεστραμμένος με αυτόν (**δυσύρματη γραμμή**) είτε ο ένας σε κυλινδρικό σχήμα που περιβάλλει τον άλλο (**ομοαξονική γραμμή**) κτλ. Στις υψηλότερες συχνότητες (μερικών GHz και άνω) χρησιμοποιούνται οι **κυματοδηγοί**, οι οποίοι είναι αγωγίμοι σωλήνες που μπορούν να μεταφέρουν οδεύοντα κύματα, καθώς και μια παραλλαγή των γραμμών μεταφοράς, οι λεγόμενες **μικροταινίες** (microstrips), που αποτελούνται από μεταλλικές λωρίδες τυπωμένες πάνω σε κατάλληλη διηλεκτρική πλάκα και με βάση τις οποίες κατασκευάζονται σήμερα τα περισσότερα μικροκυματικά κυκλώματα. Σε ακόμη υψηλότερες συχνότητες, δηλ. στην οπτική περιοχή, χρησιμοποιούνται οι **οπτικές ίνες**, οι οποίες ουσιαστικά είναι κυματοδηγοί κατασκευασμένοι από διηλεκτρικά υλικά.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσουν οι γραμμές μεταφοράς δύο αγωγών, τονίζοντας όμως ότι τα βασικά συμπεράσματα της θεωρίας σχετικά με την διάδοση κυμάτων σε αυτές ισχύουν επίσης και για κυματοδηγούς (οι οποίοι θα εξετασθούν στο επόμενο κεφάλαιο) αλλά και για οπτικές ίνες. Επισημαίνουμε ότι οι γραμμές μεταφοράς είναι από τα σημαντικότερα στοιχεία των υψίσυχνων συστημάτων γενικά (και των μικροκυματικών συστημάτων ειδικότερα), όχι μόνο διότι χρησιμεύουν για την ενσύρματη μετάδοση του σήματος αλλά και διότι κατάλληλα τμήματα αυτών (ή αντίστοιχα των μικροταινιών) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή διάφορων κυκλωματικών στοιχείων στις υψηλές συχνότητες (π.χ. πυκνωτών και πηνίων, όπως θα δούμε αργότερα).

Το κύριο χαρακτηριστικό μιας γραμμής μεταφοράς είναι ότι το μήκος της γραμμής είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας της, ενώ το πλάτος της (η απόσταση μεταξύ των 2 αγωγών) είναι μικρότερο από το μήκος κύματος. Δηλ. οι αγωγοί βρίσκονται κοντά ο ένας στον άλλο και αυτό συνεχίζεται για μεγάλο διάστημα. Για το λόγο αυτό οι αγωγοί, όταν διαρρέονται από εναλλασσόμενο ρεύμα, αλληλεπιδρούν με αποτέλεσμα να εμφανίζονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα που

διαδίδονται κατά μήκος της γραμμής, παραπλεύρως των αγωγών. (Αν ο αγωγός ήταν μόνο



Σχ. 1.1: Τάση και ρεύμα σε γραμμή μεταφοράς

ένας, το ρεύμα θα δημιουργούσε κύματα που θα εκπέμπονταν προς τα έξω, φεύγοντας από τον αγωγό, αλλά η παρουσία δύο αγωγών σε κοντινή απόσταση έχει ως αποτέλεσμα τα κύματα αυτά ουσιαστικά να αλληλοαναιρούνται). Τα ηλεκτρομαγνητικά αυτά κύματα δημιουργούν αντίστοιχες διακυμάνσεις της τάσης και του ρεύματος

κατά μήκος της γραμμής, δηλ. κύματα τάσης και ρεύματος πάνω στη γραμμή. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση γραμμής μεταφοράς δεν μπορεί να γίνει δεκτή η απλή προσέγγιση ότι οι αγωγοί της γραμμής αποτελούν βραχυκυκλώματα και η τάση (και το ρεύμα) σε οποιοδήποτε σημείο αυτών είναι ίδια. Πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η τάση και το ρεύμα σε κάθε σημείο της γραμμής μεταβάλλονται με την απόσταση. Ορίζοντας έναν άξονα, έστω z , κατά μήκος της γραμμής (δηλ. η τετμημένη z χαρακτηρίζει κάθε σημείο πάνω στη γραμμή), οι τιμές της τάσης και του ρεύματος γράφονται $V(z)$ και $I(z)$, όπως δείχνει το Σχ. 1.1 (όπου φαίνεται και το φορτίο, έστω Z_L , στο οποίο, όπως λέμε, τερματίζεται η γραμμή). Οι συναρτήσεις $V(z)$ και $I(z)$ είναι μιγαδικές και αντιπροσωπεύουν τους φασιθέτες (phasors) τάσης και ρεύματος. Αυτό σημαίνει ότι σε όλα όσα ακολουθούν αναφερόμαστε στη συμπεριφορά γραμμής που μεταφέρει ημιτονοειδή σήματα, από τα οποία μπορεί με υπέρθεση, όπως είναι γνωστό από την ανάλυση Fourier, να συντεθεί και κάθε άλλο σήμα.

1.1.2. Το μοντέλο γραμμής μεταφοράς με κατανεμημένες παραμέτρους

Για να μελετήσουμε τη γραμμή μεταφοράς χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά της τάσης και του ρεύματος σε αυτή με τη βοήθεια ισοδύναμων κυκλωμάτων, τα οποία όμως αναφέρονται σε «μικροσκοπικό» επίπεδο, δηλ. σε οποιοδήποτε στοιχειώδες (απειροστού μήκους) τμήμα της γραμμής. Το μοντέλο αυτό βασίζεται στις λεγόμενες κατανεμημένες παραμέτρους της γραμμής, οι οποίες περιγράφουν τη συμπεριφορά οποιοδήποτε στοιχειώδους τμήματος αυτής. Αυτό διότι τα κυματικά φαινόμενα πάνω στη γραμμή λαμβάνουν χώρα πάνω σε ολόκληρο το μήκος αυτής, με συνεχή μεταβολή, και κατά συνέπεια δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν επακριβώς από κάποιο απλούστερο μοντέλο το οποίο θα χρησιμοποιούσε συγκεντρωμένα στοιχεία σε ορισμένες θέσεις της γραμμής. (Συγκεντρωμένα στοιχεία, σε αντιδιαστολή με τα κατανεμημένα, λέγονται τα γνωστά ως τώρα στοιχεία κυκλωμάτων τα οποία έχουν

ακροδέκτες – δύο ή περισσότερους – και συνδέονται σε ένα ορισμένο σημείο του κυκλώματος.) Με άλλα λόγια, για να μελετήσουμε τα κύματα στη γραμμή θα μελετήσουμε τις μεταβολές που συμβαίνουν πάνω σε κάθε στοιχειώδες τμήμα αυτής*.

Πιο συγκεκριμένα, οι κατανεμημένες παράμετροι γραμμής μεταφοράς είναι στην πιο γενική περίπτωση οι ακόλουθες

R: αντίσταση ανά μονάδα μήκους (σε Ω/m)

G: αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους (σε Ω^{-1}/m)

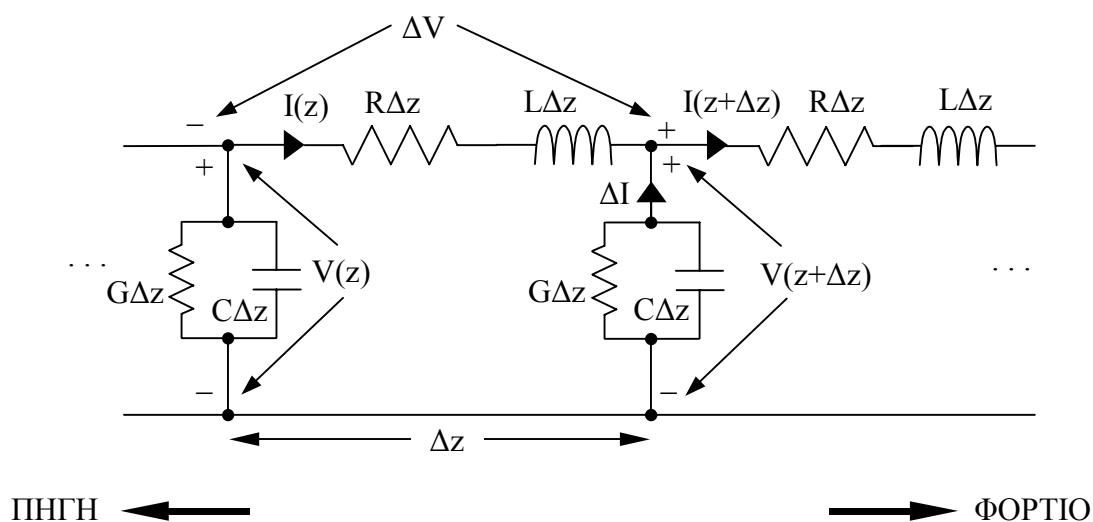
L: αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους (σε H/m)

C: χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους (σε F/m)

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των τεσσάρων αυτών παραμέτρων εκφράζονται ανά μονάδα μήκους πράγμα που οφείλεται στον κατανεμημένο χαρακτήρα τους. Οι παράμετροι αυτές είναι συντελεστές που αν πολλαπλασιαστούν επί το μήκος ενός τμήματος της γραμμής θα δώσουν την τιμή αντίστασης, αγωγιμότητας, αυτεπαγωγής και χωρητικότητας που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο τμήμα. (Αυτό ισχύει με ακρίβεια για στοιχειώδη τμήματα.) Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες τμήμα της γραμμής μήκους Δz , αυτό θα χαρακτηρίζεται από αντίσταση, αγωγιμότητα, αυτεπαγωγή και χωρητικότητα $R\Delta z$, $G\Delta z$, $L\Delta z$ και $C\Delta z$ αντίστοιχα. (Προσοχή χρειάζεται ο συμβολισμός ώστε τα σύμβολα R, G, L και C να μην συγχέονται με τα αντίστοιχα κυκλωματικά μεγέθη για τα οποία χρησιμοποιούμε τα $R\Delta z$, $G\Delta z$, $L\Delta z$ και $C\Delta z$). Η φυσική ερμηνεία των κατανεμημένων παραμέτρων είναι ότι η R αντιστοιχεί στην ωμική αντίσταση των αγωγών της γραμμής, η G αντιστοιχεί στην αγωγιμότητα που μπορεί να έχει το διηλεκτρικό (μονωτικό) υλικό μεταξύ των αγωγών, η L στην αυτεπαγωγή ενός τμήματος της γραμμής λόγω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν οι δύο αγωγοί στον χώρο μεταξύ τους και η C στην χωρητικότητα που εμφανίζουν οι δύο αγωγοί ενός τμήματος της γραμμής αν θεωρηθούν ως οπλισμοί ενός πυκνωτή.

Με βάση τις εν λόγω παραμέτρους, η συμπεριφορά κάθε στοιχειώδους τμήματος της γραμμής περιγράφεται από το μοντέλο (ισοδύναμο κύκλωμα) που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

* Αυτή είναι η κυκλωματική θεωρία των γραμμών μεταφοράς, η οποία είναι μια απλοποιητική προσέγγιση που βασίζεται σε παραδοχές (για να διευκολυνθεί η μελέτη). Η αυστηρή θεωρία των γραμμών μεταφοράς είναι η ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η οποία εξετάζει τα H/M κύματα που αναπτύσσονται γύρω από τους αγωγούς της γραμμής με βάση τους νόμους του Maxwell και αποδεικνύει όλες τις σχετικές ιδιότητες χωρίς την ανάγκη παραδοχών. Η θεωρία αυτή ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος, σημειώνουμε όμως ότι επιβεβαιώνει τα συμπεράσματα της κυκλωματικής θεωρίας.



Σχ. 1.2: Μοντέλο γραμμής μεταφοράς με κατανεμημένες παραμέτρους

Στο Σχ. 1.2 υπονοείται ότι το μοντέλο του στοιχειώδους τμήματος Δz επαναλαμβάνεται απεριόριστα τόσο προς την κατεύθυνση της πηγής (κατά σύμβαση προς τα αριστερά) όσο και προς την κατεύθυνση του φορτίου (**τερματισμού**) της γραμμής (προς τα δεξιά). Αρκεί όμως να μελετηθεί ένα στοιχειώδες τμήμα θέτοντας το μήκος του $\Delta z \rightarrow 0$.

Από τους νόμους Kirchhoff στο ισοδύναμο κύκλωμα, με τις πολικότητες και φορές αναφοράς που φαίνονται στο Σχ. 1.2, γίνεται προφανές ότι ισχύει

$$\Delta V = V(z + \Delta z) - V(z) \quad , \quad \Delta I = I(z + \Delta z) - I(z)$$

Εφαρμόζοντας τις γνωστές θεμελιώδεις σχέσεις των κυκλωματικών στοιχείων παίρνουμε

$$\begin{cases} \Delta V = -(R\Delta z + j\omega L\Delta z)I(z) \\ \Delta I = -(G\Delta z + j\omega C\Delta z)V(z + \Delta z) \end{cases}$$

Στο όριο $\Delta z \rightarrow 0$ προκύπτουν οι

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) & (1.1.1\alpha) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) & (1.1.1\beta) \end{cases}$$

οι οποίες είναι οι διαφορικές εξισώσεις ($\Delta.E.$) της γραμμής. Οι λύσεις αυτών των $\Delta.E.$ παρέχουν την πληροφορία για όλα τα φαινόμενα που θα εξετάσουμε σε σχέση με τη γραμμή μεταφοράς. Οι παραπάνω $\Delta.E.$ αποτελούν ένα σύστημα συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Συζευγμένες σημαίνει ότι υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο αγνώστων συναρτήσεων $V(z)$ και $I(z)$. Προκειμένου να διευκολυνθεί η λύση του συστήματος παραγωγίζουμε καθεμιά από αυτές μία φορά ακόμα και συνδυάζουμε τις παραγώγους, δηλ. στην παράγωγο της (1.1α) αντικαθιστούμε την dI/dz από την (1.1β) και αντίστοιχα στην παράγωγο της (1.1β) αντικαθιστούμε την dV/dz από

την (1.1α). Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν οι ακόλουθες Δ.Ε. δεύτερης τάξης της γραμμής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z) \\ \frac{d^2 I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \end{array} \right. \quad (1.1.2\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V(z)}{dz^2} = \gamma^2 V(z) \\ \frac{d^2 I(z)}{dz^2} = \gamma^2 I(z) \end{array} \right. \quad (1.1.2\beta)$$

όπου

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (1.1.3)$$

Το «τέχνασμα» της δεύτερης παραγωγίσιμης που χρησιμοποιήσαμε οδήγησε στην αποσύζευξη των δύο εξισώσεων, δηλ. καθεμία από τις (1.1.2α-β) εξαρτάται από μία μόνο άγνωστη συνάρτηση $V(z)$ ή $I(z)$. Η παράμετρος γ (που προέκυψε κατά τη διαδικασία της δεύτερης παραγωγίσιμης) λέγεται **μυγαδική σταθερά διάδοσης** της γραμμής. Στη γενική περίπτωση έχει πραγματικό μέρος α που ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης πλάτους*** (και είναι μη αρνητικό**, $\alpha \geq 0$) και φανταστικό μέρος β που ονομάζεται **σταθερά διάδοσης** της γραμμής. Και τα δύο εξαρτώνται εν γένει από τη συχνότητα ω . Εξετάζοντας τις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών που υπεισέρχονται στην (1.1.3) προκύπτει σε πρώτη προσέγγιση ότι οι παράμετροι α και β έχουν διαστάσεις αντίστροφου μήκους (m^{-1}), ενώ το ίδιο προκύπτει και από τις (1.1.2), αργότερα όμως θα δούμε τις συγκεκριμένες μονάδες που χρησιμοποιούνται για τις παραμέτρους αυτές.

1.1.3. Οι θεμελιώδεις εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς

Οι Δ.Ε. (1.2α-β) ανήκουν στην απλούστερη κατηγορία διαφορικών εξισώσεων, που είναι οι γραμμικές Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Όπως είναι γνωστό από τα μαθηματικά, η γενική λύση μιας τέτοιας Δ.Ε. δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός εκθετικών συναρτήσεων, καθεμία από τις οποίες έχει στον εκθέτη από μία ρίζα του λεγόμενου χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στην περίπτωσή μας (όπου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει τις δύο ρίζες $\pm\gamma$) η γενική λύση των Δ.Ε. (1.1.2α-β) έχει τη μορφή

* Ονομάζεται έτσι επειδή υπάρχει και ο συντελεστής απόσβεσης ισχύος στον οποίο θα αναφερθούμε αργότερα. Λέγεται επίσης συντελεστής απόσβεσης τάσης, για τον ίδιο λόγο. Συχνά όμως χρησιμοποιείται απλώς ο όρος «συντελεστής απόσβεσης» διότι, όπως θα δούμε, από τη μονάδα που χρησιμοποιούμε γίνεται αμέσως εμφανές για ποιον συντελεστή πρόκειται.

** Αυτό στην πραγματικότητα σημαίνει ότι ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα μυγαδικού στην (1.1.3) κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει $\alpha \geq 0$.

$$\begin{cases} V(z) = V_{\pi} e^{-\gamma z} + V_{\alpha} e^{+\gamma z} & (1.1.4\alpha) \\ I(z) = I_{\pi} e^{-\gamma z} + I_{\alpha} e^{+\gamma z} & (1.1.4\beta) \end{cases}$$

όπου, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των Δ.Ε., οι σταθερές V_{π} , V_{α} και I_{π} , I_{α} είναι κάποιοι συντελεστές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Είναι πολύ εύκολο με αντικατάσταση να επιβεβαιωθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούν τις (1.1.2α) και (1.1.2β) αντίστοιχα. Όμως στην περίπτωση μας πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι αυτό που πραγματικά ζητούμε είναι η γενική λύση των (1.1.1α-β), διότι οι (1.1.2α-β) είναι απλώς μια «βοηθητική μορφή». Με άλλα λόγια: οι λύσεις των (1.1.1α-β) είναι και λύσεις των (1.1.2α-β), αλλά όλες οι λύσεις των (1.1.2α-β) δεν είναι αναγκαστικά και λύσεις των (1.1.1α-β). Για να βρούμε τη γενική λύση των (1.1.1α-β) παίρνουμε τις (1.1.4α-β), τις εισάγουμε στις (1.1.1α-β) και εξετάζουμε αν αυτές ικανοποιούνται. Μετά από πράξεις (οι οποίες αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη) προκύπτει ότι για να ικανοποιούνται οι (1.1.1α-β) πρέπει οι I_{π} , I_{α} να μην είναι ανεξάρτητες αλλά να εξαρτώνται από τις V_{π} , V_{α} ως εξής

$$I_{\pi} = \frac{V_{\pi}}{Z_0}, \quad I_{\alpha} = -\frac{V_{\alpha}}{Z_0}$$

Κατά συνέπεια, η ζητούμενη γενική λύση των (1.1α-β) είναι

$$\begin{cases} V(z) = V_{\pi} e^{-\gamma z} + V_{\alpha} e^{+\gamma z} = V_{\pi} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + V_{\alpha} e^{\alpha z} e^{j\beta z} & (1.1.5\alpha) \\ I(z) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_{\alpha}}{Z_0} e^{+\gamma z} = \frac{V_{\pi}}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \frac{V_{\alpha}}{Z_0} e^{\alpha z} e^{j\beta z} & (1.1.5\beta) \end{cases}$$

όπου

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (1.1.6)$$

Η παράμετρος Z_0 λέγεται **χαρακτηριστική αντίσταση** της γραμμής μεταφοράς και μετράται σε Ω (δηλ. έχει πραγματικά διαστάσεις αντίστασης), όπως φαίνεται από την (1.1.6). Η φυσική σημασία της θα γίνει εμφανής στα επόμενα. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να τονίσουμε ότι αυτή **δεν** είναι η ωμική αντίσταση των αγωγών της γραμμής. Σημειώνουμε ότι η τιμή της Z_0 θεωρητικά μπορεί να είναι μιγαδική, στην πράξη όμως, όπως θα δούμε αργότερα, είναι **πραγματική** σε όλες τις γραμμές που χρησιμοποιούνται. Οι (1.1.5α-β) είναι οι θεμελιώδεις εξισώσεις της γραμμής μεταφοράς, υπό την έννοια ότι από αυτές προκύπτουν όλες οι ιδιότητες που θα εξετάσουμε στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

1.1.4. Η μορφή των κυμάτων στη γραμμή

Οι εξισώσεις (1.1.5α-β) περιέχουν δύο κύματα η καθεμία, τα οποία είναι οδεύοντα και συγχρόνως εκθετικά φθίνοντα (αποσβεννύμενα). Ο πρώτος όρος $e^{-az} e^{-j\beta z}$ εκφράζει κύμα το οποίο οδεύει και αποσβένεται προς τα δεξιά, δηλ. προς τα αυξανόμενα z , δηλ. (κατά τη σύμβαση του Σχ. 1.2) από την πηγή προς το φορτίο, και για το λόγο αυτό αποκαλείται προσπίπτον κύμα. Ειδικότερα ο παράγοντας $e^{-j\beta z}$ εκφράζει τη διάδοση του κύματος προς τα δεξιά, όπως ακριβώς είδαμε στην παρ. 0.6 της Εισαγωγής για ένα επίπεδο κύμα (η μόνη διαφορά είναι ότι η σταθερά διάδοσης β παίζει εδώ τον ρόλο που έπαιζε εκεί ο κυματικός αριθμός k). Ο παράγοντας e^{-az} εκφράζει την εκθετική απόσβεση καθώς το κύμα οδεύει προς τα δεξιά. Αντίστοιχα ο δεύτερος όρος $e^{az} e^{j\beta z}$ εκφράζει κύμα το οποίο οδεύει και αποσβένεται προς τα αριστερά, δηλ. προς την πηγή, και άρα είναι το ανακλώμενο κύμα. Οι συντελεστές V_π και V_α είναι τα μιγαδικά πλάτη των κυμάτων αυτών.

Η σταθερά διάδοσης β , όπως ακριβώς και ο κυματικός αριθμός k στην παρ. 0.6 της Εισαγωγής, συνδέεται με το μήκος κυματος λ των κυμάτων στη γραμμή με τη σχέση

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.1.7)$$

Από αυτή φαίνεται η φυσική σημασία της σταθεράς διάδοσης, που είναι ο ρυθμός μεταβολής της φάσης ανά μονάδα μήκους, διότι όταν το κύμα προχωρεί κατά μήκος λ η φάση μεταβάλλεται κατά 2π rad (μεταβολή φάσης κατά 2π rad αντιστοιχεί σε μήκος λ). Η (1.1.7) δείχνει επίσης ότι η μονάδα μέτρησης της σταθεράς διάδοσης β είναι το rad/m.

Από την σταθερά διάδοσης προκύπτει η ταχύτητα φάσης του κύματος στη γραμμή, όπως ακριβώς και στην παρ. 0.6 της Εισαγωγής (το k αντιστοιχεί με την σταθερά διάδοσης β)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.1.8)$$

Σημειώνουμε ότι η ηλεκτρομαγνητική θεωρία των γραμμών μεταφοράς αποδεικνύει τον ακόλουθο γενικό κανόνα: Η ταχύτητα φάσης σε μια γραμμή μεταφοράς δύο αγωγών είναι η ίδια με την ταχύτητα φάσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο υλικό που περιβάλλει τη γραμμή. Δηλ. αν το διηλεκτρικό (μονωτικό) περίβλημα της γραμμής αποτελείται από υλικό με διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ και μαγνητική διαπερατότητα μ , τότε η ταχύτητα φάσης των κυμάτων στη γραμμή δίνεται από τη γενική σχέση της παρ. 0.6 για ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο υλικό αυτό

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (1.1.9)$$

Η σταθερά α λέγεται (όπως προαναφέρθηκε) συντελεστής απόσβεσης πλάτους και εκφράζει τον ρυθμό απόσβεσης (δηλ. τον ρυθμό μείωσης) του πλάτους του κύματος ανά

μονάδα μήκους. Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μια λογαριθμική σταθερά, διότι όπως φαίνεται από τις (1.1.5α-β) η απόσβεση του κύματος ακολουθεί εκθετικό νόμο (όπως και πολλά άλλα μεγέθη στη φύση) σε σχέση με την απόσταση. Με άλλα λόγια, αν σε μια ορισμένη απόσταση που διανύει το κύμα το πλάτος του μειώνεται κατά X , τότε αν η απόσταση διπλασιασθεί το πλάτος του κύματος θα μειωθεί κατά X^2 , αν τριπλασιασθεί θα μειωθεί κατά X^3 , κ.ο.κ. Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής απόσβεσης σχετίζεται με τον λογάριθμο του πλάτους του κύματος. Για να γίνει κατανοητό αυτό, ας συγκεντρώσουμε την προσοχή μας μόνο στο προσπίπτον κύμα που οδεύει προς τα δεξιά, θεωρώντας προς στιγμήν ότι δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα. Στην περίπτωση αυτή θα είναι $V(z) = V_{\pi} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$, οπότε το «τοπικό πλάτος» του κύματος σε μια τυχούσα θέση z θα είναι $|V(z)| = |V_{\pi}| e^{-\alpha z}$. Έστω λοιπόν δύο διαφορετικές θέσεις z_1 και z_2 πάνω στη γραμμή, με $z_1 < z_2$ (δηλ. η z_2 είναι μετά την z_1). Τότε το κύμα καθώς προχωρεί από την z_1 προς την z_2 θα υποστεί μείωση του πλάτους του ως εξής:

$$|V(z_1)| = |V_{\pi}| e^{-\alpha z_1}$$

$$|V(z_2)| = |V_{\pi}| e^{-\alpha z_2}$$

όπου είναι εμφανές ότι $|V(z_2)| < |V(z_1)|$ (πράγμα αναμενόμενο αφού η θέση z_2 είναι μετά την z_1). Διαιρώντας κατά μέλη και λογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\frac{|V(z_2)|}{|V(z_1)|} = e^{-\alpha(z_2-z_1)} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\ln(|V(z_2)|/|V(z_1)|)}{z_2-z_1} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\ln(|V(z_2)|) - \ln(|V(z_1)|)}{z_2-z_1} \quad (1.1.10)$$

Με άλλα λόγια, ο συντελεστής απόσβεσης πλάτους α εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του λογαρίθμου του πλάτους του κύματος ανά μονάδα μήκους. Επειδή έχουμε λάβει τον φυσικό (ή νεπέριο) λογάριθμο, η μεταβολή του λογαρίθμου αυτού μετράται με τη «μονάδα» Νέπερ (συμβολίζεται Np). Χρησιμοποιούμε εισαγωγικά διότι ο λογάριθμος είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός: είναι κάτι αντίστοιχο με τη μονάδα rad που χρησιμοποιούμε για τη γωνία, η οποία είναι επίσης καθαρός αριθμός). Η φυσική σημασία του Np μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Λέμε ότι μια ποσότητα (π.χ. το πλάτος του κύματος) μειώνεται (ή αυξάνεται) κατά 1 Np όταν ο νεπέριος λογάριθμος* αυτής

* Κατά αντίστοιχο τρόπο, αν χρησιμοποιήσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους, η μονάδα μεταβολής του δεκαδικού λογαρίθμου είναι το Bel (B) και εκφράζει μείωση ή αύξηση της ποσότητας κατά τον συντελεστή 10. Δηλ. μείωση κατά 1 B σημαίνει ότι η ποσότητα που μας ενδιαφέρει έχει διαιρεθεί με 10. Υποδιαίρεση του Bel είναι το decibel (dB) το οποίο (σύμφωνα με τη γνωστή έννοια του προθέματος deci-) ισούται με 1/10 του Bel. Άρα μείωση κατά 1 dB σημαίνει ότι η ποσότητα έχει διαιρεθεί με $10^{1/10}$. Η χρησιμότητα του dB για πάρα πολλές ηλεκτρονικές μετρήσεις είναι γνωστή.

μειώνεται (ή αυξάνεται) κατά 1, δηλ. όταν η ποσότητα αυτή μειώνεται (ή αυξάνεται) κατά τον παράγοντα $e = 2,718\dots$. Επομένως, αν η ποσότητα αυτή έχει μειωθεί κατά $1/N_p$ αυτό σημαίνει ότι έχει διαιρεθεί με e , αν έχει μειωθεί κατά $2/N_p$ αυτό σημαίνει ότι έχει διαιρεθεί με e^2 κ.ο.κ. Αντίστοιχα αν έχει αυξηθεί κατά $1/N_p$ σημαίνει ότι έχει πολλαπλασιασθεί με e , αν έχει αυξηθεί κατά $2/N_p$ έχει πολλαπλασιασθεί με e^2 κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, ο αριθμητής της (1.1.10) εκφράζεται σε N_p και ο παρονομαστής προφανώς σε m . Αυτό σημαίνει ότι η μονάδα του συντελεστή απόσβεσης πλάτους είναι το N_p/m . Με άλλα λόγια: σε μια γραμμή μεταφοράς με συντελεστή απόσβεσης πλάτους $1/N_p/m$ το πλάτος του κύματος διαιρείται με $2,718\dots$ κάθε φορά που το κύμα διανύει $1\ m$.

Ο αναγνώστης καλείται να απαντήσει στο ακόλουθο ερώτημα: πως εφαρμόζονται οι παραπάνω επεξηγήσεις ως προς τον δεύτερο όρο $e^{az} e^{j\beta z}$ των (1.1.5α-β); Ειδικότερα, γιατί λέμε ότι ο όρος αυτός εκφράζει κύμα το οποίο οδεύει και *αποσβένεται* προς τα αριστερά ενώ ο παράγοντας e^{az} εκ πρώτης όψεως φαίνεται να σημαίνει εκθετική *αύξηση*; Εξηγήστε!

Η απάντηση στο ερώτημα θα διευκολυνθεί αν παρατηρήσουμε ένα στιγμιότυπο των κυμάτων στη γραμμή, δηλ. την εικόνα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος σε κάποια τυχούσα χρονική στιγμή, έστω t_0 . Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε τη στιγμιαία τιμή της τάσης V στη γραμμή με βάση την (1.1.5α). Σύμφωνα με τον συμβολισμό που έχει υιοθετηθεί ήδη στην Εισαγωγή (βλ. την παρ. 0.4 σχετικά με τους phasors), ο phasor της τάσης σε κάθε θέση z της γραμμής συμβολίζεται με $V(z)$, ενώ η στιγμιαία τιμή αυτής σε κάθε θέση z και για κάθε χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $V(z,t)$. Από τον ορισμό του phasor (βλ. την Εισαγωγή), η στιγμιαία τιμή τάσης που αντιστοιχεί στην $V(z)$ της (1.1.5α) δίνεται από

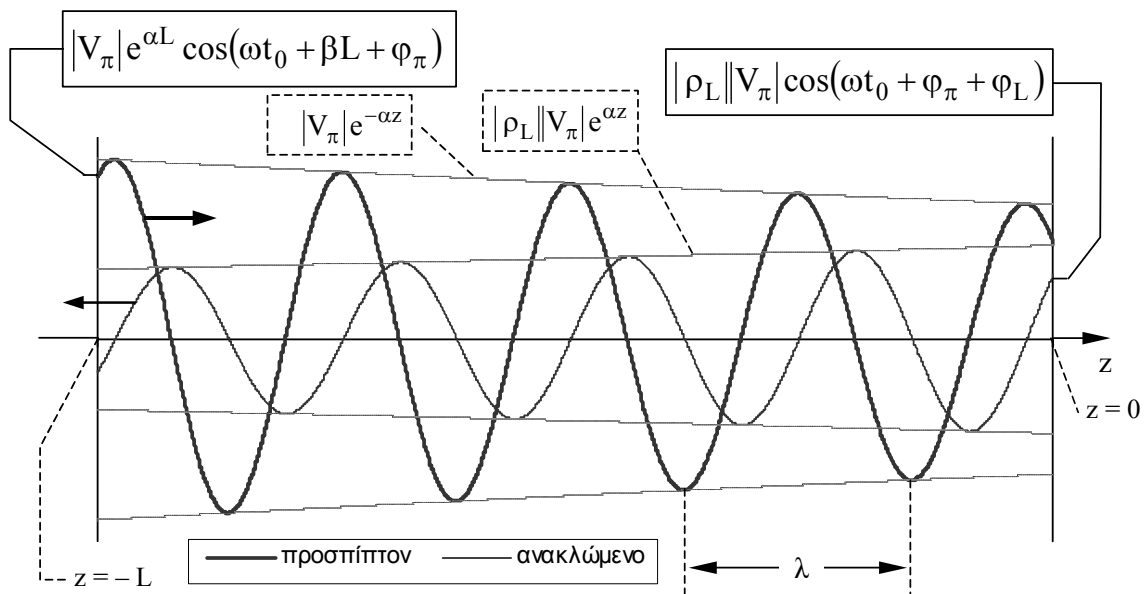
$$V(z,t) = \text{Re} \left[V(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[V_\pi e^{-az} e^{j(\omega t - \beta z)} + V_\alpha e^{az} e^{j(\omega t + \beta z)} \right]$$

Η σταθερά V_π του προσπίπτοντος κύματος μπορεί να γραφεί στην πολική μορφή $V_\pi = |V_\pi| \exp(j\varphi_\pi)$. Η σταθερά V_α του ανακλώμενου κύματος συνδέεται με την V_π , όπως θα δούμε σε λίγο, μέσω του συντελεστή ανάκλασης ρ_L , ο οποίος μπορεί επίσης να γραφεί σε πολική μορφή. Δηλ. ισχύει $V_\alpha = \rho_L V_\pi$ και $\rho_L = |\rho_L| \exp(j\varphi_L)$. Χρησιμοποιώντας αυτά, η έκφραση για την στιγμιαία τιμή της τάσης γράφεται

$$V(z,t) = |V_\pi| \left[e^{-az} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_\pi) + |\rho_L| e^{az} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_\pi + \varphi_L) \right] \quad (1.1.11)$$

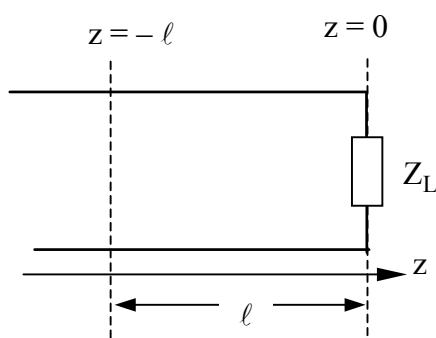
Η στιγμιαία τιμή του ρεύματος υπολογίζεται με εντελώς αντίστοιχη διαδικασία.

Θέτοντας στην (1.1.11) οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t = t_0$ προκύπτει το αντίστοιχο στιγμιότυπο του κύματος τάσης, το οποίο απεικονίζεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 1.3: Μορφή του κύματος τάσης σε κάποια τυχούσα χρονική στιγμή

Στο Σχ. 1.3 φαίνονται το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα, καθώς και η εκθετική καμπύλη που «περιβάλλει»^{*} καθένα από αυτά και δείχνει τον ρυθμό απόσβεσης αυτών. Είναι εμφανές ότι το προσπίπτον κύμα οδεύει (διαδίδεται) από την πηγή προς το φορτίο (τον τερματισμό), δηλ. τόσο η φάση όσο και το πλάτος του μειώνεται καθώς αυξάνει το z (με άλλα λόγια καθώς αυξάνει η απόσταση από την πηγή). Το ανακλώμενο κύμα διαδίδεται αντίστροφα, από τον τερματισμό προς την πηγή, και η φάση και το πλάτος του μειώνονται καθώς αυξάνει η απόσταση από τον τερματισμό (δηλ. καθώς μικραίνει το z).



Σχ. 1.4: Η σύμβαση για τη θέση τερματισμού

Σημειώνουμε ότι το Σχ. 1.3 έχει σχεδιασθεί με την σύμβαση ότι ο τερματισμός της γραμμής βρίσκεται στη θέση $z = 0$, οπότε οποιοδήποτε άλλο σημείο της γραμμής προσδιορίζεται από την απόστασή του από τον τερματισμό, έστω l , και για την συντεταγμένη z αυτού ισχύει $z = -l$. Η σύμβαση αυτή απλοποιεί κάπως τους τύπους και θα υιοθετηθεί στο υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου.

1.2. ΤΑ ΚΥΡΙΟΤΕΡΑ ΜΕΓΕΘΗ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

1.2.1. Συντελεστής ανάκλασης – Προσαρμογή

Ο συντελεστής ανάκλασης ρ_L σε γραμμή μεταφοράς ορίζεται ως ο λόγος των phasors ανακλώμενου και προσπίπτοντος κύματος σε κάποιο σημείο της γραμμής. Προφανώς στη

^{*} Στη θεωρία διαμόρφωσης η καμπύλη αυτή λέγεται περιβάλλουσα του κύματος.

γενική περίπτωση είναι μιγαδικός αριθμός. Όπως προαναφέρθηκε, υιοθετούμε τη σύμβαση ότι η θέση $z = 0$ είναι η θέση του τερματισμού της γραμμής, οπότε σε απόσταση ℓ από αυτόν ο συντελεστής ανάκλασης είναι

$$\rho(\ell) = \frac{V_\alpha \exp(\gamma z)}{V_\pi \exp(-\gamma z)} \Big|_{z=-\ell} = \frac{V_\alpha}{V_\pi} \exp(-2\gamma\ell) \quad (1.2.1)$$

Ειδικότερα ο συντελεστής ανάκλασης στον τερματισμό συμβολίζεται με ρ_L και ορίζεται από την

$$\rho_L = \rho(0) = \frac{V_\alpha}{V_\pi} \quad (1.2.2)$$

οπότε η (1.2.1) γράφεται

$$\rho(\ell) = \rho_L \exp(-2\gamma\ell) = \rho_L \exp(-2\alpha\ell) \exp(-j2\beta\ell) \quad (1.2.3)$$

Έτσι ο (γενικότερος) συντελεστής ανάκλασης σε οποιοδήποτε σημείο της γραμμής προκύπτει εύκολα από τον συντελεστή ανάκλασης στον τερματισμό, ο οποίος κατά συνέπεια είναι αυτός που κυρίως ενδιαφέρει. Για τον υπολογισμό του εφαρμόζουμε τον γενικευμένο νόμο του Ohm στη θέση τερματισμού ($z = 0$) και έχουμε

$$Z_L = \frac{V(z)}{I(z)} \Big|_{z=0} = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_\pi + V_\alpha}{\frac{V_\pi}{Z_0} - \frac{V_\alpha}{Z_0}} = Z_0 \frac{V_\pi + V_\alpha}{V_\pi - V_\alpha} = Z_0 \frac{1 + \frac{V_\alpha}{V_\pi}}{1 - \frac{V_\alpha}{V_\pi}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L}$$

όπου για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός (1.2.2). Επιλύοντας ως προς ρ_L παίρνουμε:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1.2.4)$$

Η (1.2.4) είναι μια βασική σχέση που δίνει τον συντελεστή ανάκλασης στον τερματισμό από την χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής και την αντίσταση τερματισμού. Από αυτή παρατηρούμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης, και άρα το ανακλώμενο κύμα στη γραμμή, μηδενίζεται όταν

$$Z_L = Z_0 \quad (1.2.5)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε **προσαρμογή** του φορτίου στη γραμμή (οπότε το φορτίο αυτό ονομάζεται **προσαρμοσμένο**), πράγμα ιδιαίτερα επιθυμητό διότι μεγιστοποιεί την ισχύ που μεταφέρεται από την πηγή προς το φορτίο. Στην αντίθετη περίπτωση μη ύπαρξης προσαρμογής (ή, όπως λέγεται συχνά, κακής προσαρμογής), υπάρχει ανακλώμενο κύμα το οποίο μεταφέρει μέρος της ισχύος προς τα πίσω με αποτέλεσμα μείωση της ωφέλιμης ισχύος στο φορτίο και ενδεχομένως και άλλες παρενέργειες (όπως βλάβη της πηγής). Η (1.2.5) είναι η συνθήκη προσαρμογής και με βάση αυτή μπορεί να

διατυπωθεί μια φυσική έννοια του μεγέθους της χαρακτηριστικής αντίστασης γραμμής μεταφοράς ως εξής: Η χαρακτηριστική αντίσταση εκφράζει την αντίσταση στην οποία πρέπει να τερματισθεί η γραμμή ώστε να μην υπάρχουν ανακλάσεις.

Σημειώνουμε ότι με τη βοήθεια του συντελεστή ανάκλασης οι θεμελιώδεις εξισώσεις της γραμμής μπορούν να ξαναγραφούν στη μορφή

$$\begin{cases} V(z) = V_{\pi} [e^{-\gamma z} + \rho_L e^{+\gamma z}] = V_{\pi} [e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \rho_L e^{\alpha z} e^{j\beta z}] & (1.2.6\alpha) \\ I(z) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} [e^{-\gamma z} - \rho_L e^{+\gamma z}] = \frac{V_{\pi}}{Z_0} [e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \rho_L e^{\alpha z} e^{j\beta z}] & (1.2.6\beta) \end{cases}$$

1.2.2. Αντίσταση εισόδου

Η αντίσταση εισόδου της γραμμής $Z_{in}(\ell)$ σε κάποια απόσταση ℓ από τον τερματισμό (δηλ. στη θέση $z = -\ell$, σύμφωνα με τη σύμβαση που προαναφέρθηκε) ορίζεται ως η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση που «βλέπει» κανείς στο σημείο αυτό παρατηρώντας προς την κατεύθυνση του τερματισμού. Με άλλα λόγια είναι η αντίσταση εισόδου του τμήματος της γραμμής από τη θέση αυτή μέχρι τον τερματισμό.

Από τον ορισμό της σύνθετης αντίστασης και χρησιμοποιώντας τις (1.2.6α-β) παίρνουμε

$$Z_{in}(\ell) = \left. \frac{V(z)}{I(z)} \right|_{z=-\ell} = Z_0 \frac{e^{\gamma \ell} + \rho_L e^{-\gamma \ell}}{e^{\gamma \ell} - \rho_L e^{-\gamma \ell}} \quad (1.2.7)$$

Αντικαθιστώντας την (1.2.2) και εκτελώντας πράξεις στην (1.2.7) προκύπτει τελικά

$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma \ell)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma \ell)} \quad (1.2.8)$$

όπου με $\tanh()$ συμβολίζεται η συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης. Υπενθυμίζουμε εδώ τις σχέσεις ορισμού των τριών συναρτήσεων της ίδιας «οικογένειας» (υπερβολικού ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

οι οποίες αντιστοιχούν με αυτές που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με εκθετικές.

Στην (πολύ χρήσιμη) ειδική περίπτωση γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες, ο συντελεστής απόσβεσης α είναι μηδέν, και επομένως $\gamma = j\beta$. Εύκολα παρατηρούμε τότε ότι $\tanh(j\beta \ell) = j \tan(\beta \ell)$, και κατά συνέπεια η (1.2.8) ανάγεται στην απλούστερη μορφή

$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta \ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta \ell)} \quad (1.2.9)$$

η οποία θα φανεί πολύ χρήσιμη στα επόμενα.

1.2.3. Απόσβεση ισχύος

Η (πραγματική) ισχύς W που μεταφέρει η γραμμή σε κάποιο σημείο αυτής σε απόσταση ℓ από τον τερματισμό ($z = -\ell$, όπως στα προηγούμενα) δίνεται γενικά από τη γνωστή σχέση της θεωρίας κυκλωμάτων

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [VI^*] \Rightarrow W(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z)I^*(z)] \Rightarrow W(\ell) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z)I^*(z)] \Big|_{z=-\ell} \quad (1.2.10)$$

Υπενθυμίζουμε ότι (κατά τα γνωστά) στην παραπάνω έχει προϋποτεθεί ότι οι phasors τάσης και ρεύματος ορίζονται με βάση τα πλάτη αυτών. Αν ορίζονται με βάση τις ενεργές τιμές, τότε πρέπει να παραλειφθεί ο παράγοντας $\frac{1}{2}$.

Σε γενικές γραμμές, η ισχύς που εισέρχεται στη γραμμή μεταφοράς είναι η ισχύς που προσφέρει η πηγή (στην αρχή της γραμμής). Η ισχύς αυτή μπορεί να μειωθεί (προφανώς στη γραμμή δεν δημιουργείται νέα ισχύς) είτε λόγω απόσβεσης, οπότε μέρος της καταναλώνεται πάνω στη γραμμή ως θερμότητα, είτε λόγω ανακλάσεων, οπότε μέρος της επιστρέφει πίσω προς την πηγή. Εδώ θα εξετάσουμε χωριστά την επίδραση της απόσβεσης και για το σκοπό αυτό θεωρούμε προς το παρόν ότι δεν υπάρχουν ανακλάσεις ($\rho_L = 0$). Αντικαθιστώντας τις $V(z)$ και $I(z)$ στην (1.2.10) από τις (1.1.5α-β) παίρνουμε

$$W(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(z)I^*(z)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_\pi e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \frac{V_\pi^*}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} \right] = \frac{|V_\pi|^2}{2Z_0} e^{-2\alpha z} \quad (1.2.11)$$

όπου παραλείφθηκε το συζυγές (*) για την χαρακτηριστική αντίσταση Z_0 επειδή, όπως θα δούμε, η Z_0 στην πράξη είναι πάντοτε πραγματική. Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να εκφράσουμε την ισχύ και σε συνάρτηση της απόστασης ℓ από τον τερματισμό:

$$W(\ell) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(-\ell)I^*(-\ell)] = \frac{|V_\pi|^2}{2Z_0} e^{2\alpha\ell}$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι η ισχύς στη γραμμή είναι ανάλογη του τετραγώνου της τάσης και μειώνεται εκθετικά καθώς προχωρούμε προς το φορτίο (ή αυξάνεται εκθετικά καθώς προχωρούμε προς την πηγή, που είναι ακριβώς το ίδιο!). Ο συντελεστής που εκφράζει την εκθετική αυτή μείωση είναι ο **συντελεστής απόσβεσης ισχύος** α_p ο οποίος, σύμφωνα με την (1.2.11), είναι διπλάσιος από τον συντελεστή απόσβεσης πλάτους α

$$W(z) = \frac{|V_\pi|^2}{2Z_0} \exp(-\alpha_p z) \quad , \quad \text{όπου} \quad \alpha_p = 2\alpha \quad (1.2.12)$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση εκφράζει την εκθετική απόσβεση χρησιμοποιώντας ως βάση το e , η μονάδα του συντελεστή α_p θα είναι, όπως και του α , το Np/m .

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να είναι προτιμότερο να γραφεί η (1.2.12) σε «σχετική» μορφή. Π.χ. μπορεί να μη γνωρίζουμε την σταθερά V_π αλλά να γνωρίζουμε την ισχύ

εισόδου στη γραμμή σε κάποιο σημείο, έστω z_0 (θα μπορούσε να είναι η έξοδος της πηγής). Εφαρμόζοντας δύο φορές την (1.2.12) για $z = z_0$ και $z = z_0 + \Delta z$, παίρνουμε

$$W(z_0 + \Delta z) = W(z_0) \exp(-\alpha_p \Delta z) \quad (1.2.13)$$

Η (1.2.13) εκφράζει το ίδιο πράγμα με την (1.2.11) και την (1.2.12), δηλ. ότι η ισχύς μειώνεται εκθετικά με ρυθμό διπλάσιο από αυτόν της τάσης στη γραμμή. Ας εκτελέσουμε αλλαγή βάσης από e σε 10, χρησιμοποιώντας την προφανή σχέση:

$$e = 10^{\log e}$$

Τότε η (1.2.13) οδηγεί στην

$$W(z_0 + \Delta z) = W(z_0) e^{-\alpha_p \Delta z} = W(z_0) (10^{\log e})^{-\alpha_p \Delta z} = W(z_0) 10^{-(\log e) \alpha_p \Delta z} \quad (1.2.14)$$

Η έκφραση αυτή δηλώνει εκθετική μεταβολή με βάση το 10, οπότε η λογαριθμική μονάδα που αντιστοιχεί σε αυτή τη μεταβολή (βλ. την υποσημείωση της παρ. 1.1.4) είναι το λεγόμενο Bel (B). Στην πράξη χρησιμοποιείται το 1/10 του B που αποκαλείται decibel (dB) και προφανώς ισχύει $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$, δηλ. αν μια ποσότητα σε B πολλαπλασιασθεί επί 10, μετατρέπεται σε dB. Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας τον εκθέτη της (1.2.14) με 10 παίρνουμε την τελική μορφή

$$W(z_0 + \Delta z) = W(z_0) 10^{-A_p \Delta z / 10} \quad (1.2.15)$$

όπου

$$A_p = (10 \log e) \alpha_p = (20 \log e) \alpha \cong 4,343 \alpha_p \cong 8,686 \alpha \quad (1.2.16)$$

Ο συντελεστής A_p είναι ο συντελεστής απόσβεσης ισχύος της γραμμής σε μονάδες dB/m. Η σχέση (1.2.16) δίνει τους συντελεστές μετατροπής* που τον συνδέουν με τον συντελεστή απόσβεσης ισχύος και τον συντελεστή απόσβεσης τάσης σε Nr/m.

1.2.4. Ανάκλαση ισχύος

Εξετάζουμε τώρα τη μείωση της ισχύος αποκλειστικά λόγω ανακλάσεων (χωρίς να ληφθεί υπόψη η απόσβεση). Για το σκοπό αυτό θεωρούμε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες, δηλ. $\alpha = 0$. Τότε $\gamma = j\beta$ και εφαρμόζοντας την (1.2.10) προκύπτει

* Μερικές φορές δημιουργείται σύγχυση σχετικά με το ποιος είναι ο σωστός συντελεστής μετατροπής από Nr σε dB. Όπως δείχνει η (1.2.16), ο συντελεστής αυτός με την αυστηρή έννοια είναι ο 4,343 διότι ένα μέγεθος (συντελεστή απόσβεσης τάσης) μετρημένο σε Nr/m το μετατρέπει στο ίδιο μέγεθος (συντελεστή απόσβεσης τάσης) μετρημένο σε dB/m. Ο συντελεστής 8,686 μετατρέπει συντελεστή απόσβεσης τάσης μετρημένο σε Nr/m σε συντελεστή απόσβεσης ισχύος μετρημένο σε dB/m. Ωστόσο ο συντελεστής 8,686 είναι χρήσιμος διότι συνηθίζεται η απόσβεση τάσης να μετράται σε Nr και η απόσβεση ισχύος να μετράται σε dB. Συμπέρασμα: για να πάρουμε τον σωστό συντελεστή πρέπει να προσέξουμε τι μετατρέπουμε σε τι.

$$\begin{aligned}
 W(\ell) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[V_{\pi} \left(e^{j\beta\ell} + \rho_L e^{-j\beta\ell} \right) \frac{V_{\pi}^*}{Z_0} \left(e^{-j\beta\ell} + \rho_L^* e^{j\beta\ell} \right) \right] = \\
 &= \frac{|V_{\pi}|^2}{2Z_0} \operatorname{Re} \left[1 + \rho_L e^{-j2\beta\ell} - \rho_L^* e^{j2\beta\ell} - |\rho_L|^2 \right]
 \end{aligned}$$

όπου η Z_0 θεωρείται πραγματική όπως είναι πάντοτε στην πράξη (βλ. κατωτέρω.) Επειδή οι αριθμοί $\rho_L e^{-j2\beta\ell}$ και $\rho_L^* e^{j2\beta\ell}$ είναι συζυγείς, η διαφορά τους είναι αριθμός καθαρά φανταστικός και άρα δεν επηρεάζει καθόλου το πραγματικό μέρος. Επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται

$$W = W(\ell) = \frac{1}{2} \frac{|V_{\pi}|^2}{Z_0} (1 - |\rho_L|^2) \quad (1.2.17)$$

Η (1.2.17) δίνει την ισχύ W που μεταφέρεται από τη γραμμή. Παρατηρούμε ότι η ισχύς σε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της γραμμής (πράγμα αναμενόμενο αφού δεν υπάρχουν αποσβέσεις). Είναι προφανές ότι η ύπαρξη ανακλώμενου κύματος μειώνει την ισχύ, και μάλιστα όσο μεγαλύτερο είναι αυτό (δηλ. όσο μεγαλύτερος ο συντελεστής ανάκλασης $|\rho_L|^2$) τόσο μικρότερη είναι η ισχύς W που μεταδίδεται προς το φορτίο. Το ίδιο φυσικά ισχύει για τις ανακλάσεις και σε γραμμές μεταφοράς με απώλειες, και μάλιστα η μείωση ισχύος λόγω ανακλάσεων μπορεί να είναι μεγαλύτερη από τη μείωση λόγω απωλειών (είναι όμως δυνατόν να αντιμετωπισθεί με καλύτερη προσαρμογή του φορτίου, ενώ η απόσβεση όχι).

Η φυσική ερμηνεία των δύο όρων της (1.2.17) είναι ότι ο πρώτος αντιπροσωπεύει την συνολική ισχύ που είναι «διαθέσιμη» από την πηγή (δηλ. την ισχύ που θα έδινε η πηγή σε ένα προσαρμοσμένο φορτίο χωρίς ανακλάσεις) και ο δεύτερος την ισχύ που «επιστρέφει» λόγω του ανακλώμενου κύματος. Αν ονομάσουμε την πρώτη «προσπίπτουσα» ισχύ W_{π} και τη δεύτερη «ανακλώμενη»* ισχύ W_{α}

$$W_{\pi} = \frac{|V_{\pi}|^2}{2Z_0} \quad , \quad W_{\alpha} = |\rho_L|^2 \frac{|V_{\pi}|^2}{2Z_0} = |\rho_L|^2 W_{\pi} \quad (1.2.18)$$

παρατηρούμε ότι ο λόγος της ανακλώμενης προς την προσπίπτουσα ισχύ ισούται με $|\rho_L|^2$.

* Στην πράξη, μέσα στη γραμμή μεταφοράς δεν μπορεί να διαχωρισθεί η μία ισχύς από την άλλη, και αυτό που παρατηρούμε είναι η συνολική ισχύς (η διαφορά τους). Θα δούμε όμως στο εργαστήριο ότι ο διαχωρισμός γίνεται εν μέρει εφικτός με το στοιχείο που ονομάζεται κατευθυντικός ζεύκτης.

1.3. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

1.3.1. Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες

Η περίπτωση γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες (δηλ. χωρίς απώλειες ισχύος του κύματος πάνω στη γραμμή, άρα και χωρίς απόσβεση) είναι βέβαια ιδανική. Στην πράξη όμως, αν και δεν εμφανίζεται ποτέ ακριβώς, μπορεί να εμφανισθεί κατά προσέγγιση. Είναι άλλωστε προφανές ότι η ελαχιστοποίηση των απωλειών αποτελεί μια από τις κυριότερες κατασκευαστικές επιδιώξεις, και οι περισσότερες γραμμές μεταφοράς εμφανίζουν πραγματικά μικρές απώλειες (τουλάχιστον για λειτουργία σε όχι υπερβολικά υψηλές συχνότητες). Από την άλλη πλευρά, η παραδοχή γραμμής χωρίς απώλειες μας δίνει ένα μοντέλο που απλοποιεί αρκετά τους υπολογισμούς και διευκολύνει την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων τα οποία ισχύουν με καλή προσέγγιση στην πράξη και για γραμμές με σχετικά μικρές απώλειες (παράδειγμα αποτελεί η μελέτη των στασίμων κυμάτων στα επόμενα).

Για να μελετήσουμε την περίπτωση αυτή με βάση το μοντέλο με κατανεμημένες παραμέτρους της παρ. 1.1.2, παρατηρούμε ότι στο μοντέλο αυτό (βλ. το ισοδύναμο κύκλωμα του Σχ. 1.2) οι απώλειες δημιουργούνται από τα ωμικά στοιχεία $R\Delta z$ και $G\Delta z$ (και προφανώς όχι από τα άεργα $L\Delta z$ και $C\Delta z$). Επομένως γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες είναι εκείνη στην οποία οι παράμετροι R και G είναι μηδενικές.

Θέτοντας $R = G = 0$ στις εξισώσεις της γραμμής, από την (1.1.3) προκύπτει

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{LC} \quad (1.3.1)$$

και από την (1.1.6)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.3.2)$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης τάσης είναι 0 (πράγμα αναμενόμενο, όπως ήδη παρατηρήθηκε) και η σταθερά διάδοσης είναι ανάλογη της συχνότητας. Από αυτή προκύπτει η ταχύτητα φάσης του κύματος στη γραμμή σύμφωνα με την (1.1.8)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.3.3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν δύο αξιοσημείωτες ιδιότητες των γραμμών μεταφοράς χωρίς απώλειες

- η χαρακτηριστική αντίσταση είναι ωμική (καθαρά πραγματική)
- η ταχύτητα φάσης του κύματος στη γραμμή είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα

Από το γεγονός ότι η χαρακτηριστική αντίσταση είναι ωμική μπορούμε, μεταξύ άλλων, να συμπεράνουμε ότι τα προσπίπτοντα κύματα τάσης και ρεύματος είναι συμφασικά, ενώ τα

ανακλώμενα κύματα τάσης και ρεύματος έχουν διαφορά φάσης π (180°). Αυτό γίνεται εμφανές αν γράψουμε τις εκφράσεις που δίνουν τις στιγμιαίες τιμές τάσης και ρεύματος

$$V(z, t) = |V_\pi| \left[\cos(\omega t - \beta z + \varphi_\pi) + |\rho_L| \cos(\omega t + \beta z + \varphi_\pi + \varphi_L) \right]$$

$$I(z, t) = \frac{|V_\pi|}{Z_0} \left[\cos(\omega t - \beta z + \varphi_\pi) - |\rho_L| \cos(\omega t + \beta z + \varphi_\pi + \varphi_L) \right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε (όπως και στα προηγούμενα) τις εκφράσεις σε πολική μορφή $V_\pi = |V_\pi| \exp(j\varphi_\pi)$ και $\rho_L = |\rho_L| \exp(j\varphi_L)$.

Τέλος, στην περίπτωση γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες, η σχέση που δίνει την αντίσταση εισόδου απλοποιείται στην (1.2.9), όπως έχει ήδη αναφερθεί.

1.3.2. Γραμμή μεταφοράς χωρίς παραμόρφωση

Στα προηγούμενα υιοθετήθηκε η παραδοχή ότι η γραμμή μεταφοράς λειτουργεί σε μία και μοναδική συχνότητα (μονοχρωματικά, όπως λέμε κατ' αναλογία προς τον όρο της οπτικής). Στην πραγματικότητα, όμως, το υψίσυχο σήμα που διέρχεται από μια γραμμή μεταφοράς είναι σχεδόν πάντοτε διαμορφωμένο ώστε να μεταφέρει πληροφορία (αναλογική ή ψηφιακή). Διαμόρφωση είναι η «ανάμιξη» του σήματος πληροφορίας* (που λέγεται και σήμα βασικής ζώνης) με ένα υψίσυχο ημιτονοειδές σήμα που λέγεται φέρων διότι ο ρόλος του είναι να μεταφέρει το σήμα πληροφορίας από τον πομπό στον δέκτη. Από την «ανάμιξη» αυτή προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα το οποίο τελικά μεταδίδεται (π.χ. διαμέσου της γραμμής). Στον δέκτη, με την αντίστροφη διαδικασία (αποδιαμόρφωση) διαχωρίζεται το σήμα πληροφορίας από το φέρον (το οποίο απορρίπτεται, αφού εκπλήρωσε τον προορισμό του). Όπως αποδεικνύει η θεωρία διαμόρφωσης, το διαμορφωμένο σήμα είναι «μίγμα» πολλών συχνοτήτων, δηλ. περιέχει μια ολόκληρη περιοχή συχνοτήτων (το λεγόμενο φάσμα του).

Ένα πολύ σημαντικό ερώτημα είναι: Πως επηρεάζεται το σήμα όταν διέλθει από κάποιο μέσο μετάδοσης, όπως είναι μια γραμμή μεταφοράς; Δηλ. αν το σήμα που εισέρχεται στη γραμμή είναι γνωστό, πως θα είναι το σήμα που εξέρχεται από το άλλο άκρο της γραμμής; Είναι βέβαια αναμενόμενο να παρουσιάζει εξασθένιση και χρονική καθυστέρηση ως προς το σήμα που εισήλθε (η πρώτη οφείλεται στην απόσβεση της γραμμής και η δεύτερη στον χρόνο που χρειάζεται το σήμα για να διανύσει το μήκος της γραμμής). Αν όμως έχει μεταβληθεί και η μορφή του σήματος τότε λέμε ότι το σήμα παρουσιάζει παραμόρφωση, πράγμα που αποτελεί το κυριότερο πρόβλημα για τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Η

* Το σήμα πληροφορίας μπορεί να είναι αναλογικό (π.χ. σήμα φωνής ή μουσικής) ή ψηφιακό (σειρά παλμών που αντιστοιχούν σε bits) και ανά περίπτωση διαφέρει και η μέθοδος διαμόρφωσης.

ιδεώδης περίπτωση προφανώς είναι να μην υπάρχει παραμόρφωση, δηλ. να μεταδίδεται σήμα όμοιο με αυτό που ξεκίνησε από τον πομπό.

Για να εξετάσουμε την επίδραση μιας γραμμής μεταφοράς (ή οποιουδήποτε άλλου μέσου μετάδοσης) από την οποία διέρχεται το σήμα, χρησιμοποιούμε την ανάλυση Fourier. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι αναλύουμε το σήμα στις επιμέρους συχνότητες από τις οποίες αποτελείται (δηλ. το αναλύουμε σε στοιχειώδη ημιτονοειδή σήματα, επονομαζόμενα και φασματικές συνιστώσες), εξετάζουμε την επίπτωση της γραμμής σε καθεμιά από αυτές, και στη συνέχεια τις επανασυνθέτουμε. Με τη μεθοδολογία αυτή, η θεωρία σημάτων αποδεικνύει ότι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να μην προκαλείται παραμόρφωση στο σήμα είναι να ισχύουν τα εξής:

- α) η εξασθένηση να είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες (δηλ. στο τέλος της γραμμής να μην αλλάζει η «αναλογία» των συχνοτήτων στο «μίγμα»)
- β) η ταχύτητα φάσης να είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες (δηλ. να μην καταστρέφεται ο «συγχρονισμός» των συχνοτήτων στο «μίγμα»)

Οι δύο αυτές επιμέρους συνθήκες* διατυπώνονται με αυστηρό τρόπο ως ακολούθως:

- α) $\alpha(\omega) = k_1 \quad \forall \omega$, δηλ. ο συντελεστής απόσβεσης να είναι ανεξάρτητος από τη συχνότητα

- β) $v_p = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = k_2 \quad \forall \omega$, δηλ. η ταχύτητα φάσης να είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα

Για να εφαρμόσουμε τις συνθήκες αυτές παίρνουμε τη σχέση που δίνει την γ^2 , δηλ. το τετράγωνο της (1.1.3), και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$RG - \omega^2 LC = \alpha^2 - \beta^2 \quad (1.3.4\alpha)$$

$$\omega(RC + LG) = 2\alpha\beta \quad (1.3.4\beta)$$

Η (1.3.4α) πρέπει να ισχύει για κάθε ω . Δεδομένου ότι η α οφείλει να είναι σταθερή και ανεξάρτητη από ω και η β ανάλογη της ω , συμπεραίνουμε ότι ο πρώτος όρος ισούται με α^2 και ο δεύτερος με β^2 , και άρα

$$\alpha = \sqrt{RG} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

Εισάγοντας αυτές στην (1.3.4β) και τετραγωνίζοντας παίρνουμε

* Οι συνθήκες αυτές μπορούν να διατυπωθούν και ως εξής: Αν το μήκος της γραμμής είναι π.χ. L , η εξασθένηση με την οποία φτάνει κάθε συνιστώσα στο τέρμα της γραμμής είναι $\exp(-\alpha L)$, ενώ το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να φτάσει είναι v_p/L . Όλες οι συνιστώσες πρέπει να φτάσουν στο τέρμα της γραμμής με την ίδια εξασθένηση, άρα πρέπει το α να είναι το ίδιο για όλες τις συχνότητες, και στο ίδιο χρονικό διάστημα, άρα πρέπει η v_p να είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες.

$$\omega^2(R^2C^2 + L^2G^2 + 2RCLG) = 4\omega^2RCLG \Leftrightarrow R^2C^2 + L^2G^2 - 2RCLG = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (RC - LG)^2 = 0$$

και από αυτή προκύπτει η λεγόμενη **συνθήκη Heaviside**

$$LG = RC \quad (1.3.5)$$

Η συνθήκη Heaviside είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να μην υπάρξει παραμόρφωση στη γραμμή. Παρατηρούμε ότι μία ειδική περίπτωση όπου ισχύει αυτή είναι όταν $R = G = 0$, δηλ. οι γραμμές χωρίς απώλειες είναι και γραμμές χωρίς παραμόρφωση (δεν είναι όμως οι μόνες).

Από τη συνθήκη Heaviside αποδεικνύεται* εύκολα ότι η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής δίνεται και πάλι από την

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.3.2)$$

Επομένως σε γραμμές χωρίς παραμόρφωση η χαρακτηριστική αντίσταση είναι ωμική. Αυτή η παρατήρηση έχει ιδιαίτερη πρακτική σημασία, διότι σημαίνει ότι η ωμική χαρακτηριστική αντίσταση είναι αναγκαία συνθήκη για να έχουμε γραμμή χωρίς παραμόρφωση. (Αν η χαρακτηριστική αντίσταση δεν είναι ωμική, τότε αναγκαστικά θα υπάρχει παραμόρφωση). Όλες οι γραμμές μεταφοράς στην πράξη κατασκευάζονται έτσι ώστε να ικανοποιούν (με την καλύτερη δυνατή προσέγγιση) τη συνθήκη Heaviside και άρα να έχουν ωμική (ή περίπου ωμική) χαρακτηριστική αντίσταση (τουλάχιστον στην προβλεπόμενη περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας τους). Κατά συνέπεια, σε πρακτικά προβλήματα συνήθως μπορούμε να υιοθετούμε την παραδοχή ότι η Z_0 είναι πραγματικός αριθμός.

1.4. ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ ΓΡΑΜΜΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

1.4.1. Προέλευση και μορφή των στασίμων κυμάτων

Όπως είναι γνωστό από τη φυσική, εκτός από τα οδεύοντα κύματα τα οποία αποτελούν ταλαντώσεις που κινούνται (διαδίδονται) στο χώρο (και με τα οποία ασχοληθήκαμε ως τώρα), υπάρχουν και τα στάσιμα κύματα, στα οποία οι ταλαντώσεις διατηρούν μορφή σταθερή στο χώρο (δεν διαδίδονται). Σε ένα στάσιμο κύμα, τα διάφορα σημεία που το αποτελούν παραμένουν στις ίδιες θέσεις στο χώρο και εκτελούν απλώς χρονική ταλάντωση, π.χ. τα σημεία μηδενισμού του κύματος και τα σημεία μεγιστοποίησής του βρίσκονται σε σταθερές θέσεις οι οποίες λέγονται δεσμοί ή κόμβοι για τα σημεία

* Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. [Υπόδειξη: Ξεκινήστε από την (1.1.6), εξάγετε κοινό παράγοντα L/C και χρησιμοποιήστε τη συνθήκη Heaviside στη μορφή $R/L = G/C$].

μηδενισμού και **κοιλίες** για τα σημεία μεγιστοποίησης. Στους δεσμούς το κυμαινόμενο μέγεθος είναι πάντοτε μηδενικό, ενώ στις κοιλίες εκτελεί ημιτονοειδή ταλάντωση, παραμένοντας όμως πάντοτε μέγιστο σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία.

Από τη φυσική είναι επίσης γνωστό ότι ένα στάσιμο κύμα μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση δύο οδευόντων κυμάτων με την ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά και ίσα πλάτη. Χρησιμοποιώντας στιγμιαίες τιμές, αν συμβολίσουμε με ψ το οποιοδήποτε κυμαινόμενο μέγεθος, το γεγονός αυτό γράφεται* ως εξής:

$$\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz) + A \cos(\omega t + kz + \varphi) = 2A \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(kz + \frac{\varphi}{2}\right)$$

όπου φ είναι η οποιαδήποτε διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο κύματα. Η παραγοντική μορφή του δεξιού μέλους χαρακτηρίζει το στάσιμο κύμα.

Αν χρησιμοποιήσουμε phasors, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται στην

$$\psi(z) = A e^{-jkz} + A e^{j\varphi} e^{jkz} = A e^{j\varphi/2} \left[e^{-jkz - j\varphi/2} + e^{jkz + j\varphi/2} \right] = 2A e^{j\varphi/2} \cos\left(kz + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Εδώ η ημιτονοειδής (και όχι μιγαδική εκθετική) εξάρτηση από το z χαρακτηρίζει το στάσιμο κύμα.

Σε μια γραμμή μεταφοράς με ανακλάσεις, η ύπαρξη του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου κύματος, δηλ. δύο οδευόντων κυμάτων με αντίθετη φορά, δημιουργεί (σύμφωνα με τα προηγούμενα) στάσιμο κύμα στη γραμμή. Για την απλοποίηση της μελέτης θεωρούμε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες. Αν η ανάκλαση είναι ολική, δηλ. το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα έχουν το ίδιο πλάτος, τότε τα δύο αυτά κύματα συντίθενται και δημιουργούν ακριβώς ένα στάσιμο κύμα (όπως παραπάνω), οπότε στη γραμμή εμφανίζεται μόνο στάσιμο κύμα. Αν η ανάκλαση είναι μερική, δηλ. το ανακλώμενο έχει μικρότερο πλάτος από το προσπίπτον, τότε ένα μέρος του προσπίπτοντος κύματος συντίθεται με το ανακλώμενο και δημιουργεί στάσιμο κύμα, ενώ το υπόλοιπο του προσπίπτοντος παραμένει σε μορφή οδευόντος κύματος, και άρα στη γραμμή εμφανίζεται και οδεύον και στάσιμο κύμα. Η έκφραση του κύματος στη γραμμή μπορεί να γραφεί για το κύμα τάσης (για το κύμα ρεύματος τα πράγματα είναι εντελώς αντίστοιχα) ως εξής:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_{\pi} \left(e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z} \right) = V_{\pi} (1 - \rho_L) e^{-j\beta z} + V_{\pi} \rho_L \left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z} \right) = \\ &= V_{\pi} (1 - \rho_L) e^{-j\beta z} + 2 V_{\pi} \rho_L \cos(\beta z) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Ο πρώτος όρος αυτής αντιπροσωπεύει το οδεύον κύμα και ο δεύτερος το στάσιμο.

* Με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Εύκολα παρατηρούμε ότι στο οδεύον κύμα το μέτρο της τάσης* παραμένει σταθερό κατά μήκος της γραμμής, π.χ. για καθαρά οδεύον κύμα (αν δεν υπάρχουν ανακλάσεις):

$$|V(z)| = |V_{\pi} \exp(-j\beta z)| = |V_{\pi}|$$

ενώ στο στάσιμο κύμα το μέτρο της τάσης μεταβάλλεται κατά μήκος της γραμμής:

$$|2V_{\pi} \rho_L \cos(\beta z)| = 2|V_{\pi}| |\rho_L| |\cos(\beta z)|$$

Η μεγαλύτερη μεταβολή εμφανίζεται προφανώς ανάμεσα στους δεσμούς, όπου το μέτρο της τάσης είναι μηδενικό, και στις κοιλίες, όπου το μέτρο της τάσης είναι μέγιστο.

Όταν στη γραμμή υπάρχει και οδεύον και στάσιμο κύμα, η σύνθεση των δύο αυτών κυμάτων οδηγεί σε μια ενδιάμεση μορφή, όπου το μέτρο της τάσης μεταβάλλεται (σε αντίθεση με ό,τι θα συνέβαινε αν υπήρχε μόνο οδεύον κύμα), αλλά όχι σε τόσο μεγάλο βαθμό όσο αν υπήρχε μόνο στάσιμο κύμα, διότι δεν εμφανίζονται μηδενισμοί του μέτρου της τάσης αλλά απλώς τοπικά ελάχιστα αυτής**. Όσο μεγαλύτερο είναι το στάσιμο κύμα, δηλ. όσο μεγαλύτερη η ανάκλαση, τόσο πιο έντονες είναι οι διακυμάνσεις στο μέτρο της τάσης κατά μήκος της γραμμής (μεγαλύτερη διαφορά μεγίστων και ελαχίστων). Η μέτρηση των διακυμάνσεων αυτών αποτελεί στην πράξη τον πιο καθιερωμένο τρόπο μέτρησης των ανακλάσεων σε γραμμή μεταφοράς.

Για να εξετάσουμε λεπτομερώς τη μεταβολή αυτού κατά μήκος της γραμμής, προσδιορίζουμε τη σχέση που διέπει το μέτρο της τάσης $|V(\ell)|$ συναρτήσει της απόστασης από τον τερματισμό (με τη γνωστή συνθήκη $z = -\ell$)

$$\begin{aligned} |V(\ell)|^2 &= V(z)V^*(z) \Big|_{z=-\ell} = V_{\pi} \left(e^{j\beta\ell} + \rho_L e^{-j\beta\ell} \right) V_{\pi}^* \left(e^{-j\beta\ell} + \rho_L^* e^{j\beta\ell} \right) = \\ &= |V_{\pi}|^2 \left(1 + \rho_L e^{-j2\beta\ell} + \rho_L^* e^{j2\beta\ell} + \rho_L \rho_L^* \right) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Γράφοντας τον συντελεστή ανάκλασης σε πολική μορφή, $\rho_L = |\rho_L| \exp(j\varphi_L)$, οπότε $\rho_L^* = |\rho_L| \exp(-j\varphi_L)$, παρατηρούμε ότι οι δύο συζυγείς ποσότητες στην (1.4.2) δίνουν

$$\left. \begin{aligned} \rho_L e^{-j2\beta\ell} &= |\rho_L| e^{-j(2\beta\ell - \varphi_L)} \\ \rho_L^* e^{j2\beta\ell} &= |\rho_L| e^{j(2\beta\ell - \varphi_L)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_L e^{-j2\beta\ell} + \rho_L^* e^{j2\beta\ell} = 2|\rho_L| \cos(2\beta\ell - \varphi_L)$$

* Επειδή χρησιμοποιούμε phasors, η φυσική σημασία του μέτρου της τάσης είναι είτε η ενεργός (ενδεικνύμενη) τιμή της τάσης είτε το πλάτος της, το οποίο και πάλι ισούται με την ενεργό τιμή επί $\sqrt{2}$. Σε κάθε περίπτωση, το μέτρο της τάσης αντιστοιχεί στην ένδειξη που θα έδινε ένα υποθετικό βολτόμετρο AC το οποίο θα μπορούσε να κινείται ελεύθερα και να μετράει σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της γραμμής.

** Στην πρόσθεση του οδεύοντος και του στασίμου κύματος παίζει ρόλο και η φάση αυτών, με αποτέλεσμα τα ελάχιστα τάσης να μην εμφανίζονται στις θέσεις που θα ήταν οι μηδενισμοί (δεσμοί) αν υπήρχε μόνο στάσιμο κύμα, αλλά σε άλλες θέσεις που θα δούμε στη συνέχεια.

και με αντικατάσταση η (1.4.2) δίνει

$$|V(\ell)| = |V_\pi| \left[1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \cos(2\beta\ell - \phi_L) \right]^{1/2} \quad (1.4.3)$$

Από την (1.4.3) παρατηρούμε ότι το μέτρο της τάσης

- παρουσιάζει περιοδικότητα ως προς ℓ , δηλ. περιοδικότητα στο χώρο, όπου τον ρόλο της (χωρικής) γωνιακής συχνότητας παίζει η ποσότητα 2β , και επομένως η χωρική περίοδος είναι $\frac{2\pi}{2\beta} = \frac{2\pi}{4\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2}$ (μισό μήκος κύματος)
- εμφανίζει μέγιστα και ελάχιστα σε συγκεκριμένες θέσεις που θα συμβολίζουμε με ℓ_M (μέγιστα) και ℓ_m (ελάχιστα) και οι οποίες προσδιορίζονται από τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\text{Για τα μέγιστα: } \cos(2\beta\ell_M - \phi_L) = 1 \Leftrightarrow 2\beta\ell_M - \phi_L = 2n\pi \quad (1.4.4)$$

$$\text{Για τα ελάχιστα: } \cos(2\beta\ell_m - \phi_L) = -1 \Leftrightarrow 2\beta\ell_m - \phi_L = (2n+1)\pi \quad (1.4.5)$$

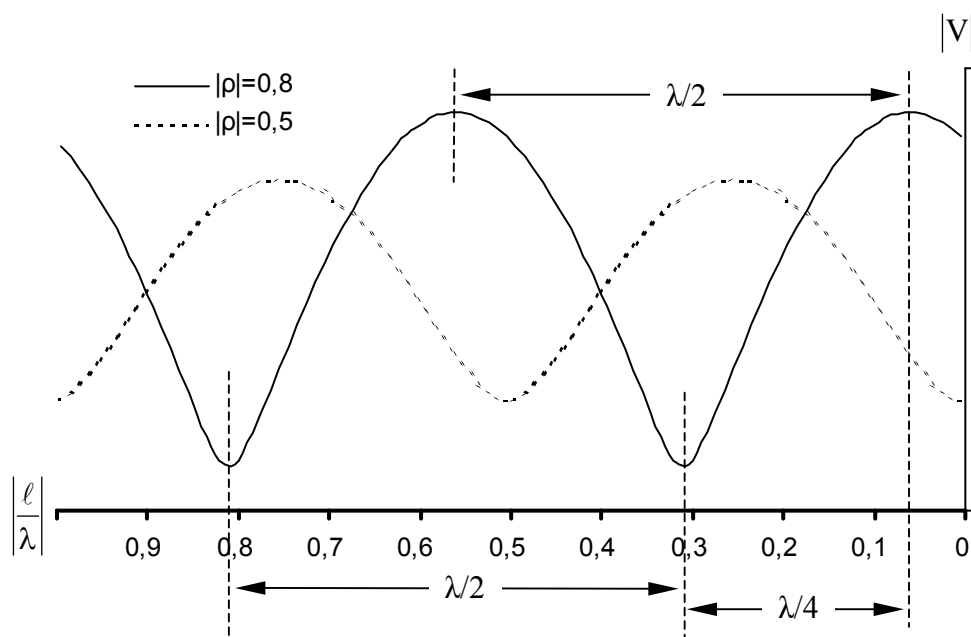
όπου n ακέραιος.

Από τις συνθήκες αυτές, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\beta = 2\pi/\lambda$, μπορούν να βρεθούν οι θέσεις μεγίστων και ελαχίστων στη γραμμή

$$\text{Μέγιστα: } \ell_M = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\phi_L}{4\pi} \lambda \quad (1.4.6)$$

$$\text{Ελάχιστα: } \ell_m = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\phi_L}{4\pi} \lambda \quad (1.4.7)$$

όπου ο ακέραιος n λαμβάνει άπειρες τιμές αλλά φυσικά πρέπει να είναι τέτοιος ώστε $\ell_M, \ell_m > 0$. Από τις σχέσεις αυτές είναι προφανές ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών θέσεων μεγίστων (ή ελαχίστων) είναι $\lambda/2$ (πράγμα αναμενόμενο εφόσον υπάρχει χωρική περιοδικότητα με περίοδο $\lambda/2$), ενώ η απόσταση μεταξύ ενός μεγίστου και ενός γειτονικού ελαχίστου είναι $\lambda/4$, δηλ. τα ελάχιστα βρίσκονται στα μεσοδιαστήματα μεταξύ διαδοχικών μεγίστων (και αντίστροφα). Κατά συνέπεια, η μέτρηση της απόστασης μεταξύ δύο διαδοχικών ελαχίστων (ή μεγίστων) τάσης παρέχει έναν τρόπο πειραματικού προσδιορισμού του μήκους κύματος στη γραμμή μεταφοράς. Απεικονίζοντας γραφικά την (1.4.3) παίρνουμε μια τυπική εικόνα του μέτρου τάσης στη γραμμή παρουσία στασίμων κυμάτων, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.5 που ακολουθεί για δύο περιπτώσεις μιγαδικού φορτίου. Είναι εμφανές ότι ο μεγαλύτερος κατά μέτρο συντελεστής ανάκλασης αντιστοιχεί σε μεγαλύτερες μεταβολές της τάσης. Η τιμή στον τερματισμό εξαρτάται από τη φάση του συντελεστή ανάκλασης (δεν φαίνεται στο σχήμα).



Σχ. 1.5: Μέτρο της τάσης σε γραμμή μεταφοράς με στάσιμα κύματα

Από την (1.4.3), αντικαθιστώντας τις (1.4.4-5), παίρνουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου τάσης στη γραμμή (μπορεί να προκύψει και απευθείας από την (1.2.6α)):

$$|V_{\max}| = |V_{\pi}| \left[1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho_L| \right]^{1/2} = |V_{\pi}| (1 + |\rho_L|) \quad (1.4.8)$$

$$|V_{\min}| = |V_{\pi}| \left[1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \right]^{1/2} = |V_{\pi}| (1 - |\rho_L|) \quad (1.4.9)$$

Με εντελώς ανάλογη διαδικασία μπορούμε να πάρουμε την έκφραση που δίνει το μέτρο του ρεύματος* στη γραμμή, σε μορφή αντίστοιχη της (1.4.3)

$$|I(\ell)| = \frac{|V_{\pi}|}{Z_0} \left[1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \cos(2\beta\ell - \phi_L) \right]^{1/2} \quad (1.4.10)$$

Από αυτή φαίνεται ότι οι θέσεις μεγίστων τάσης είναι θέσεις ελαχίστων ρεύματος και αντιστρόφως. Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές του μέτρου ρεύματος προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως για την τάση

$$|I_{\max}| = \frac{|V_{\pi}|}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \quad (1.4.11)$$

$$|I_{\min}| = \frac{|V_{\pi}|}{Z_0} (1 - |\rho_L|) \quad (1.4.12)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός της αντίστασης εισόδου της γραμμής στις θέσεις μεγίστων και ελαχίστων τάσης (δηλ. ελαχίστων και μεγίστων ρεύματος). Με τη βοήθεια

* Το μέτρο του ρεύματος στη γραμμή είναι λιγότερο χρήσιμη ποσότητα από το μέτρο της τάσης επειδή είναι δυσκολότερο να μετρηθεί στην πράξη. Από θεωρητική άποψη τα συμπεράσματα είναι όμοια.

των (1.4.4-5) μπορεί να αποδειχθεί (πράγμα που αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη*) ότι η αντίσταση εισόδου στα σημεία αυτά είναι

$$\text{Μέγιστα: } Z_{\text{in}}^{(\text{max})} = Z_0 \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{|V_{\text{max}}|}{|I_{\text{min}}|} \quad (1.4.13)$$

$$\text{Ελάχιστα: } Z_{\text{in}}^{(\text{min})} = Z_0 \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{|V_{\text{min}}|}{|I_{\text{max}}|} \quad (1.4.14)$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι πραγματικές, και μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι οι μοναδικές πραγματικές τιμές που λαμβάνει η αντίσταση εισόδου σε μια γραμμή μεταφοράς (οποιοδήποτε και αν είναι το φορτίο). Πραγματικά, από την (1.2.7) η αντίσταση εισόδου γράφεται (βλ. και την αμέσως προηγούμενη υποσημείωση)

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{e^{j\beta\ell} + |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{-j\beta\ell}}{e^{j\beta\ell} - |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{-j\beta\ell}} = Z_0 \frac{1 + |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta\ell)}}{1 - |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta\ell)}} = Z_0 \frac{[1 + |\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta\ell)}]^2}{1 - |\rho_L|^2}$$

όπου στο τελευταίο βήμα πολλαπλασιάσαμε με τον συζυγή του παρονομαστή. Για να είναι η Z_{in} πραγματική, πρέπει η ποσότητα στην αγκύλη να είναι πραγματική, και κατά συνέπεια πρέπει ο αριθμός $|\rho_L| e^{j(\varphi_L - 2\beta\ell)}$ να είναι πραγματικός. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει

$$2\beta\ell - \varphi_L = n\pi$$

Η συνθήκη αυτή όμως ταυτίζεται με μία από τις (1.4.4) ή (1.4.5) και κατά συνέπεια για να είναι η Z_{in} πραγματική θα πρέπει η απόσταση ℓ από τον τερματισμό να είναι μία από αυτές που δίνουν οι (1.4.4) και (1.4.5), δηλ. είτε θέση μεγίστου είτε θέση ελαχίστου.

1.4.2. Ο λόγος στασίμου κύματος (SWR)

Ο λόγος στασίμου κύματος (SWR – Standing Wave Ratio) ορίζεται ως ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης στη γραμμή και συμβολίζεται με S . Με τη βοήθεια των (1.4.8-9) προκύπτει η έκφραση που δίνει τον λόγο στασίμου κύματος από το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης

$$S = \frac{|V_{\text{max}}|}{|V_{\text{min}}|} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} \quad (1.4.15)$$

* Υπόδειξη: Ξεκινήστε από την (1.2.7) για γραμμή χωρίς απώλειες, γράφοντας τον συντελεστή ανάκλασης σε πολική μορφή, δηλ. $Z_{\text{in}}^{(\text{max})} = Z_{\text{in}}(\ell_M) = Z_0 \frac{e^{j\beta\ell_M} + |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{-j\beta\ell_M}}{e^{j\beta\ell_M} - |\rho_L| e^{j\varphi_L} e^{-j\beta\ell_M}}$, αντικαταστήστε

από την (1.4.4) και εκτελέστε τις πράξεις λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^{jn\pi} = e^{-jn\pi}$. Ομοίως για την $Z_{\text{in}}^{(\text{min})}$.

ενώ από τις (1.4.11-12) φαίνεται ότι ο S μπορεί εντελώς ισοδύναμα να οριστεί και βάσει της μέγιστης και ελάχιστης τιμής του μέτρου του ρεύματος. Η αντίστροφη σχέση της (1.4.15) είναι

$$|\rho_L| = \frac{S-1}{S+1} \quad (1.4.16)$$

Είναι φανερό ότι ο λόγος στασίμου κύματος αποτελεί μέτρο του μεγέθους των διακυμάνσεων της τάσης (ή του ρεύματος) κατά μήκος της γραμμής, και επομένως (σύμφωνα με τα όσα προαναφέρθηκαν) δείχνει το μέγεθος των στασίμων κυμάτων, άρα και το μέγεθος των ανακλάσεων στη γραμμή. Ο λόγος στασίμου κύματος είναι το κατεξοχήν μέγεθος που χρησιμοποιείται στην πράξη για τη μέτρηση των ανακλάσεων σε γραμμή μεταφοράς (πολύ συχνότερα από ό,τι ο συντελεστής ανάκλασης που είναι πιο «θεωρητικό» μέγεθος) και υπάρχουν ειδικά όργανα για τη μέτρησή του (ενδείκτης SWR ή «γέφυρα στασίμων»).

Από την (1.4.15) είναι προφανές ότι ο SWR είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός) και η τιμή του κυμαίνεται στην περιοχή $1 \leq S \leq +\infty$ (δεδομένου ότι $0 \leq |\rho_L| \leq 1$). Η ελάχιστη τιμή $S = 1$ αντιστοιχεί σε $|\rho_L| = 0$ και άρα σημαίνει μηδενικές ανακλάσεις (καθόλου στάσιμο κύμα), ενώ η μέγιστη τιμή $S \rightarrow +\infty$ αντιστοιχεί σε $|\rho_L| = 1$ και σημαίνει ολική ανάκλαση, δηλ. ότι όλο το κύμα στη γραμμή είναι στάσιμο και καθόλου οδεύον. Το γεγονός ότι $|\rho_L| = 1$ σημαίνει ολική ανάκλαση είναι μια γενικότερη παρατήρηση (εξηγήστε την!)

Συνήθως ο SWR εκφράζεται σε dB, μέσω της σχέσης (ουσιαστικά ορισμού του dB)

$$S_{dB} = 10 \log_{10} S \quad (1.4.17)$$

όπου S η τιμή που δίνει η (1.4.15). Είναι βέβαια προφανές ότι για την εφαρμογή της αντίστροφης σχέσης (1.4.16) δεν είναι κατάλληλη η τιμή σε dB αλλά η τιμή S .

Παρατηρούμε ότι, με τη βοήθεια του S , οι (1.4.13-14) που δίνουν την αντίσταση εισόδου στις θέσεις μεγίστων και ελαχίστων μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$Z_{in}^{(max)} = S Z_0 \quad , \quad Z_{in}^{(min)} = \frac{Z_0}{S} \quad (1.4.18)$$

Μπορούμε επίσης, συνδυάζοντας τις (1.2.17), (1.4.8) και τη σχέση ορισμού του S (1.4.15), να πάρουμε μια σχέση για την ισχύ σε γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες

$$W = \frac{1}{2} \frac{|V_{max}|^2}{S Z_0} \quad (1.4.19)$$

Μια αξιοσημείωτη παρατήρηση που προκύπτει από την (1.4.19) είναι ότι, για δεδομένη ισχύ W που μεταφέρεται στη γραμμή, όσο μεγαλώνει ο SWR τόσο αυξάνει η μέγιστη τάση

που θα εμφανισθεί σε κάποιο σημείο της γραμμής. Για μεγάλη ισχύ και συγχρόνως μεγάλο S , αυτό σημαίνει ότι η ακραία τιμή τάσης σε κάποιο σημείο της γραμμής μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη, με κίνδυνο ακόμη και να συμβεί διάσπαση του προστατευτικού διηλεκτρικού περιβλήματος της γραμμής.

1.4.3. Η συμπεριφορά των στασίμων κυμάτων ανά περίπτωση φορτίου

Για να αποσαφηνισθούν πλήρως τα προηγούμενα, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της γραμμής μεταφοράς ως προς τις ανακλάσεις, και κατά συνέπεια ως προς τα στάσιμα κύματα, για διάφορες ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις φορτίων.

Προσαρμοσμένο φορτίο ($Z_L = Z_0$)

Για προσαρμοσμένο φορτίο η (1.2.4) δείχνει (όπως άλλωστε έχει ήδη επισημανθεί) ότι $\rho_L = 0$, άρα $S = 1$ και το μέτρο της τάσης είναι σταθερό κατά μήκος της γραμμής ($V_{\max} = V_{\min}$). Στη γραμμή υπάρχει μόνο προσπίπτον κύμα και όχι ανακλώμενο (ή ισοδύναμα, υπάρχει μόνο οδεύον κύμα και καθόλου στάσιμο). Η ισχύς που έρχεται από την πηγή απορροφάται εξ ολοκλήρου από το φορτίο.

Βραχυκυκλωμένη γραμμή ($Z_L = 0$)

Όταν η γραμμή είναι τερματισμένη σε βραχυκύκλωμα, η (1.2.4) δίνει $\rho_L = -1$, οπότε $|\rho_L| = 1$, $\phi_L = \pi$ και $S \rightarrow +\infty$. Κατά συνέπεια έχουμε ολική ανάκλαση και το κύμα στη γραμμή είναι εξ ολοκλήρου στάσιμο. Όλη ισχύς που προσπίπτει στο φορτίο ανακλάται (πράγμα απόλυτα εύλογο διότι το βραχυκύκλωμα προφανώς δεν απορροφά καθόλου ισχύ). Το μέτρο της τάσης κατά μήκος της γραμμής προκύπτει* από την (1.4.3) ότι είναι

$$|V(\ell)| = |V_\pi| [2 + 2 \cos(2\beta\ell - \pi)]^{1/2} = |V_\pi| \left[4 \cos^2 \left(\beta\ell - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2} = 2|V_\pi| |\sin(\beta\ell)| \quad (1.4.20)$$

ενώ από την (1.2.9) προκύπτει η αντίσταση εισόδου της γραμμής

$$Z_{in}(\ell) = j Z_0 \tan(\beta\ell) \quad (1.4.21)$$

Ανοικτοκυκλωμένη γραμμή ($Z_L = \infty$)

Στην περίπτωση αυτή η (1.2.4) δίνει $\rho_L = 1$, οπότε $|\rho_L| = 1$, $\phi_L = 0$ και $S \rightarrow +\infty$. Η ανάκλαση είναι και πάλι ολική και η εικόνα στη γραμμή είναι παρόμοια με την περίπτωση βραχυκυκλώματος. Η μόνη διαφορά είναι ότι στη θέση τερματισμού της γραμμής εμφανίζεται πλέον μέγιστο αντί για ελάχιστο. Αυτό μπορεί να δειχθεί από την (1.4.7) θέτοντας $\phi_L = 0$, αλλά μπορεί και να συναχθεί με φυσικούς συλλογισμούς (ποιά είναι η

* Με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$

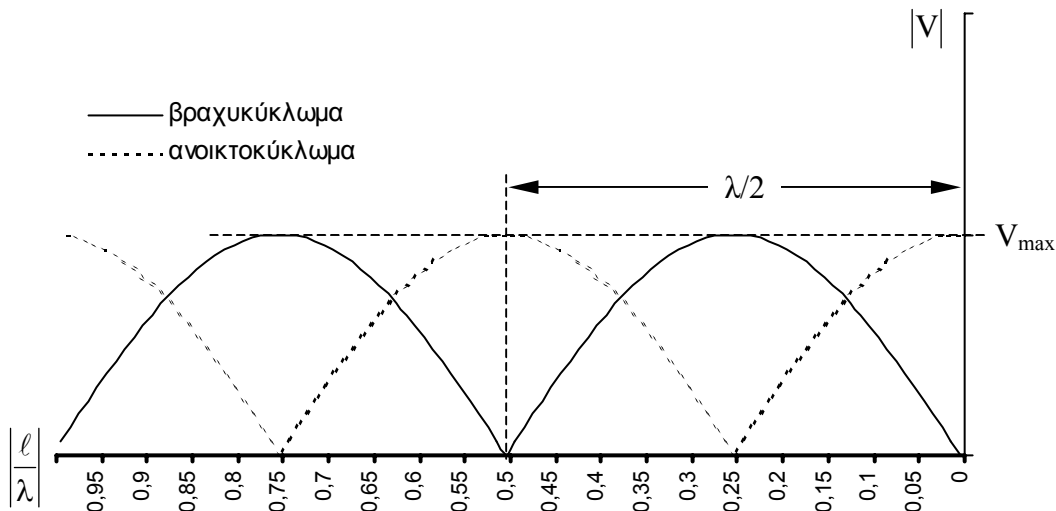
φυσική έννοια του βραχυκυκλώματος και ποια του ανοικτοκυκλώματος; Τι μηδενίζεται στο ένα και τι στο άλλο;) Το μέτρο της τάσης κατά μήκος της γραμμής προκύπτει από την (1.4.3) με τον ίδιο τρόπο

$$|V(\ell)| = 2|V_{\pi}| |\cos(\beta\ell)| \quad (1.4.22)$$

και από την (1.2.9) προκύπτει η αντίσταση εισόδου της γραμμής

$$Z_{in}(\ell) = \frac{Z_0}{j \tan(\beta\ell)} = -j Z_0 \cot(\beta\ell) \quad (1.4.23)$$

Στο Σχ. 1.6 που ακολουθεί παρουσιάζεται η εικόνα των στασίμων κυμάτων σε βραχυκυκλωμένη και ανοικτοκυκλωμένη γραμμή μεταφοράς.



Σχ. 1.6: Στασίμα κύματα σε βραχυκυκλωμένη και ανοικτοκυκλωμένη γραμμή

Ωμικό φορτίο (Z_L πραγματικό)

Θεωρούμε δεδομένο (όπως συζητήθηκε στα προηγούμενα) ότι η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής Z_0 είναι επίσης πραγματική. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) $Z_L > Z_0$. Τότε $\rho_L > 0$, $\phi_L = 0$ και το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης είναι

$$|\rho_L| = \rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

οπότε

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}}{1 - \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}} = \dots = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (1.4.24)$$

Λόγω του ότι $\phi_L = 0$, στη θέση του τερματισμού εμφανίζεται μέγιστο τάσης (όπως συμβαίνει και στο ανοικτοκύκλωμα).

2) $Z_L < Z_0$. Τότε $\rho_L < 0$, $\phi_L = \pi$ και το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης είναι

$$|\rho_L| = -\rho_L = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

οπότε

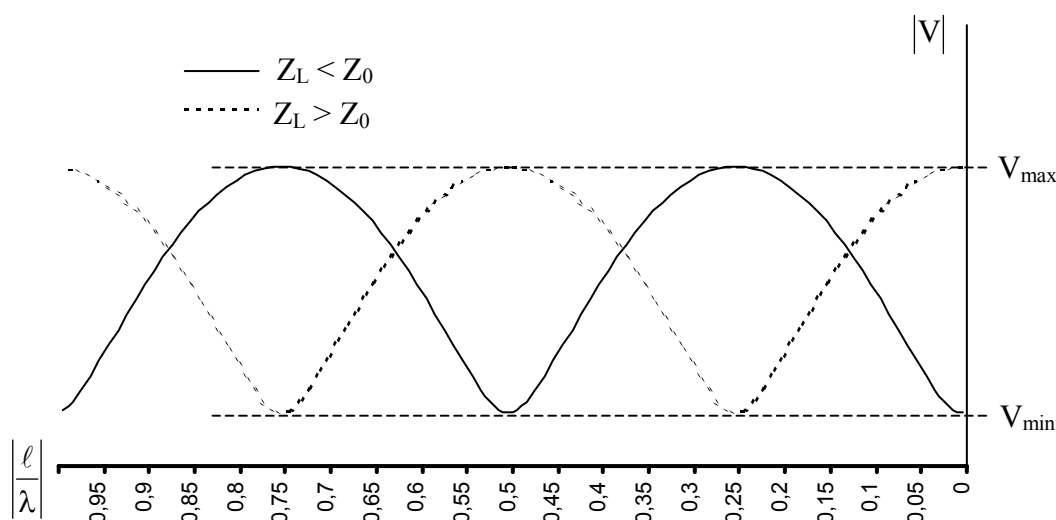
$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}}{1 - \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}} = \dots = \frac{Z_0}{Z_L} \quad (1.4.25)$$

Λόγω του ότι $\phi_L = \pi$, στη θέση του τερματισμού εμφανίζεται ελάχιστο τάσης (όπως συμβαίνει και στο βραχυκύκλωμα).

Συνδυάζοντας τις (1.4.24-25) μπορεί να γραφεί μια γενική σχέση για ωμικό φορτίο

$$S = \max\left\{\frac{Z_L}{Z_0}, \frac{Z_0}{Z_L}\right\} \quad (1.4.26)$$

Η εικόνα της τάσης στη γραμμή στις δύο αυτές περιπτώσεις φαίνεται στο Σχ. 1.7 που ακολουθεί, όπου παρατηρούμε ότι $V_{\min} \neq 0$ (λόγω του ότι η ανάκλαση δεν είναι ολική).

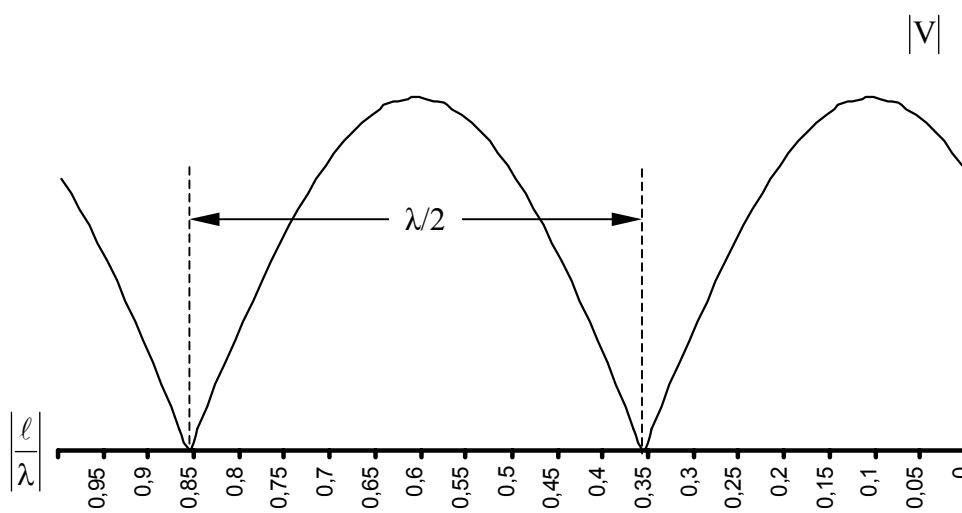


Σχ. 1.7: Στάσιμα κύματα σε γραμμή τερματισμένη σε ωμικό φορτίο

Άεργο φορτίο ($Z_L = jX$, με X πραγματικό)

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $|\rho_L| = \left| \frac{-Z_0 + jX}{Z_0 + jX} \right| = \frac{\sqrt{Z_0^2 + X^2}}{\sqrt{Z_0^2 + X^2}} = 1$

Δηλ. $|\rho_L| = 1$, οπότε $S \rightarrow \infty$ και η ανάκλαση είναι ολική (πράγμα εύλογο αφού το άεργο φορτίο δεν απορροφά ισχύ και άρα όλη η ισχύς επιστρέφει). Το όρισμα ϕ_L παίρνει κάποια τιμή μεταξύ 0 και π (η οποία εξαρτάται από την τιμή του άεργου φορτίου X). Για τον λόγο αυτό, η τάση στη θέση τερματισμού δεν είναι ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη αλλά παίρνει κάποια ενδιάμεση τιμή που εξαρτάται από την ϕ_L . Η εικόνα της τάσης φαίνεται στο ακόλουθο Σχ. 1.8, όπου παρατηρούμε και ότι λόγω ολικής ανάκλασης, οι ελάχιστες τιμές τάσης είναι μηδενικές.



Σχ. 1.8: Στάσιμα κύματα σε γραμμή τερματισμένη σε άεργο φορτίο

1.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΡΑΜΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

1.5.1. Ο μετασχηματιστής λ/4

Με τον όρο αυτό αποκαλούμε τμήμα γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες με μήκος $\lambda/4$. Τότε ισχύει

$$\ell = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Επομένως $\tan(\beta\ell) \rightarrow \infty$ και από το όριο της (1.2.9) παίρνουμε την αντίσταση εισόδου του μετασχηματιστή $\lambda/4$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (1.5.1)$$

Από τη σχέση αυτή συνάγονται τα εξής συμπεράσματα:

- Αν το φορτίο είναι βραχυκύκλωμα, δηλ. $Z_L = 0$, τότε $Z_{in} = \infty$, δηλ. ο μετασχηματιστής συμπεριφέρεται ως ανοικτοκύκλωμα.
- Αν το φορτίο είναι ανοικτοκύκλωμα, δηλ. $Z_L = \infty$, τότε $Z_{in} = 0$, δηλ. ο μετασχηματιστής συμπεριφέρεται ως βραχυκύκλωμα.
- Αν το φορτίο είναι καθαρά επαγωγικό, δηλ. $Z_L = jX$ με $X > 0$, τότε $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{jX} = -j\frac{Z_0^2}{X}$, δηλ. ο μετασχηματιστής συμπεριφέρεται ως χωρητικό φορτίο.
- Αν το φορτίο είναι καθαρά χωρητικό, δηλ. $Z_L = -jX$ με $X > 0$, τότε $Z_{in} = \frac{Z_0^2}{-jX} = j\frac{Z_0^2}{X}$, δηλ. ο μετασχηματιστής συμπεριφέρεται ως επαγωγικό φορτίο.

Οι παρατηρήσεις αυτές επεξηγούν την ονομασία «μετασχηματιστής $\lambda/4$ »: Αυτό το τμήμα γραμμής μεταφοράς έχει την ιδιότητα να «μετασχηματίζει» ανοικτοκύκλωμα σε

βραχυκύκλωμα, καθώς επίσης και επαγωγικό σε χωρητικό φορτίο (πηνίο σε πυκνωτή), και αντιστρόφως. Για τον λόγο αυτό βρίσκει διάφορες εφαρμογές σε υψίσυχνα κυκλώματα.

Πρέπει να προσέξουμε ότι, για δεδομένο μήκος γραμμής ℓ , η σχέση $\ell = \lambda/4$ ισχύει ακριβώς μόνο για μία συχνότητα (αυτή που αντιστοιχεί στο κατάλληλο λ), και με καλή προσέγγιση για μια μικρή περιοχή συχνοτήτων γύρω από αυτή. Για τον λόγο αυτό, συνήθως λέγεται ότι ο μετασχηματιστής $\lambda/4$ είναι διάταξη μικρού εύρους ζώνης ή στενής ζώνης (όπου με τον όρο «εύρος ζώνης» εννοείται η περιοχή συχνοτήτων εντός της οποίας μια διάταξη, όπως εδώ ο μετασχηματιστής $\lambda/4$, λειτουργεί σωστά).

1.5.2. Άεργα στοιχεία

Στις υψηλές συχνότητες η κατασκευή ακόμη και απλών κυκλωματικών στοιχείων, όπως είναι οι πυκνωτές και τα πηνία, δεν είναι εύκολη και πάντως δεν γίνεται με τον παραδοσιακό τρόπο. Μια εναλλακτική μέθοδος είναι η χρήση κατάλληλων τμημάτων γραμμής μεταφοράς, τα οποία μπορούν να «μιμηθούν» τη συμπεριφορά πυκνωτών και πηνίων, με τον τρόπο που θα δείξουμε τώρα.

Θεωρούμε τμήμα γραμμής μεταφοράς μήκους ℓ , χωρίς απώλειες (ή έστω με τις μικρότερες δυνατές απώλειες) αφού αναφερόμαστε σε άεργα στοιχεία, τερματισμένο σε βραχυκύκλωμα, δηλ. με $Z_L = 0$. Ένα τέτοιο τμήμα αποκαλείται συνήθως βραχυκυκλωμένο στέλεχος (stub). Αντίστοιχη μελέτη (η οποία αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη) μπορεί να γίνει και για ανοικτοκυκλωμένο στέλεχος. Η αντίσταση εισόδου του τμήματος αυτού δίνεται από την (1.2.9), η οποία με $Z_L = 0$ οδηγεί (όπως είδαμε) στην (1.4.21):

$$Z_{in}(\ell) = jZ_0 \tan(\beta\ell)$$

Από αυτή είναι φανερό ότι $Z_{in} = jX$, με X πραγματικό, δηλ. η σύνθετη αντίσταση εισόδου του τμήματος γραμμής είναι καθαρά φανταστική, και κατά συνέπεια το τμήμα γραμμής συμπεριφέρεται ως άεργο φορτίο. Αν $X > 0$, το φορτίο είναι επαγωγικό, δηλ. το τμήμα γραμμής συμπεριφέρεται ως πηνίο, ενώ αν $X < 0$, το φορτίο είναι χωρητικό και το τμήμα γραμμής συμπεριφέρεται ως πυκνωτής. Η τιμή του πηνίου ή του πυκνωτή που αντιστοιχεί στο τμήμα της γραμμής προκύπτει επιλέγοντας κατάλληλα το μήκος του τμήματος. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν θέλουμε το τμήμα γραμμής να συμπεριφέρεται ως πηνίο αυτεπαγωγής L , τότε πρέπει $Z_{in} = j\omega L$, οπότε από την (1.4.21) προκύπτει

$$jZ_0 \tan(\beta\ell) = j\omega L \Leftrightarrow \beta\ell = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right) \quad (1.5.2)$$

- Αν θέλουμε το τμήμα γραμμής να συμπεριφέρεται ως πυκνωτής χωρητικότητας C , τότε πρέπει $Z_{in} = -j/\omega C$, οπότε από την (1.4.21) προκύπτει

$$jZ_0 \tan(\beta\ell) = -\frac{j}{\omega C} \Leftrightarrow \beta\ell = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega CZ_0}\right) \quad (1.5.3)$$

Είναι προφανές ότι η (1.5.2) και η (1.5.3) μπορούν να δώσουν άπειρες λύσεις για το μήκος ℓ (το οποίο βέβαια πρέπει να είναι θετικό), προσθέτοντας οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο του π (σύμφωνα με τη γνωστή περιοδικότητα της συνάρτησης \tan). Κατά κανόνα θα προτιμήσουμε τη μικρότερη λύση (αυξημένο μήκος δημιουργεί προβλήματα χώρου, απωλειών κτλ).

Αντίστοιχη μελέτη είναι δυνατή και για γραμμή μεταφοράς με απώλειες. Στην περίπτωση αυτή, το τμήμα γραμμής προσομοιάζει όχι σε ιδανικό αλλά σε πραγματικό πηνίο ή πυκνωτή (δηλ. σε ένα που περιέχει και ωμική αντίσταση).

Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι ένα τμήμα ορισμένου μήκους επιτυγχάνει ακριβώς την επιθυμητή τιμή αυτεπαγωγής ή χωρητικότητας μόνο για μία συχνότητα. Γενικότερα, το στοιχείο αυτό προσεγγίζει την επιθυμητή τιμή για μια μικρή περιοχή συχνοτήτων και για το λόγο αυτόν χαρακτηρίζεται ως στοιχείο στενής ζώνης (βλ. και τα προηγούμενα).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η ειδική περίπτωση μήκους για το οποίο η σύνθετη αντίσταση εισόδου του τμήματος γραμμής είναι μηδενική ή άπειρη ($Z_{in} = 0$ ή ∞). Τα μήκη αυτά (και πάλι υπάρχουν άπειρα αλλά προτιμάμε το μικρότερο) μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με τον ίδιο τρόπο από την (1.4.21). Τμήμα γραμμής με τέτοιο μήκος δεν συμπεριφέρεται ούτε ως πυκνωτής ούτε ως πηνίο αλλά ως βραχυκύκλωμα ή ανοικτοκύκλωμα στη δεδομένη συχνότητα, ενώ σε μια περιοχή συχνοτήτων γύρω από αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι προσεγγίζει τη συμπεριφορά ενός συντονισμένου κυκλώματος (LC εφόσον η γραμμή δεν έχει απώλειες και RLC εφόσον έχει απώλειες). Τέτοια τμήματα γραμμών μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμα για την σχεδίαση και κατασκευή μικροκυματικών φίλτρων.

1.5.3. Μέθοδοι προσαρμογής του φορτίου στη γραμμή μεταφοράς

Όπως έχει γίνει ήδη σαφές, οι ανακλάσεις σε γραμμή μεταφοράς είναι άκρως ανεπιθύμητες, και επομένως η προτιμητέα κατάσταση είναι η προσαρμογή του φορτίου στη γραμμή. Στην πράξη δεν έχουμε πάντοτε ελευθερία επιλογής της γραμμής ή / και του φορτίου ώστε αυτό να είναι προσαρμοσμένο*. Κατά συνέπεια, πολλές φορές προκύπτει το πρακτικό πρόβλημα της προσαρμογής ενός φορτίου σε γραμμή μεταφοράς με διαφορετική χαρακτηριστική αντίσταση. Το πρόβλημα μπορεί να τεθεί και ως εξής: Με ποιο τρόπο

* Η προφανέστερη περίπτωση είναι το να έχουμε δεδομένη και τη γραμμή και το φορτίο από τις προδιαγραφές του συστήματος. Μπορεί επίσης να έχουμε απόκλιση από την επιθυμητή τιμή αντίστασης λόγω κατασκευαστικών ανοχών, μεταβολών της συχνότητας κτλ.

είναι δυνατόν η γραμμή μεταφοράς να «βλέπει» μια αντίσταση τερματισμού ίση με τη χαρακτηριστική της (ή έστω κατά το δυνατόν πλησιέστερη σε αυτή), ενώ η σύνθετη αντίσταση του φορτίου διαφέρει. Ή, με άλλα λόγια, πως είναι δυνατόν να «μετατραπεί» η σύνθετη αντίσταση του φορτίου σε κάποια άλλη η οποία να συμπίπτει (ή έστω να προσεγγίζει) την χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής;

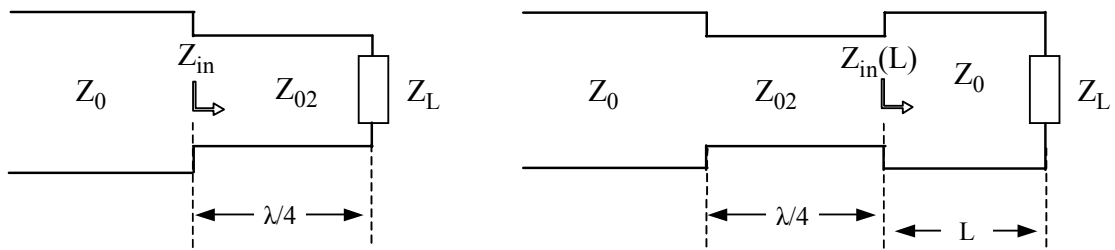
Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με μεθόδους όπως:

- η παρεμβολή μεταξύ της γραμμής και του φορτίου κάποιου ενδιάμεσου τμήματος άλλης γραμμής μεταφοράς
- η σύνδεση ενός βοηθητικού φορτίου (ή και περισσότερων) παράλληλα προς το φορτίο της γραμμής.

Στα πλαίσια της πρώτης μεθόδου θα εξετάσουμε την προσαρμογή με μετασχηματιστή $\lambda/4$, ενώ της δεύτερης την προσαρμογή με ένα ή δύο βραχυκυκλωμένα στελέχη. Σημειώνουμε ότι μια σημαντική παράμετρος του προβλήματος είναι και το εύρος ζώνης της προσαρμογής. Κάθε μικροκυματικό σύστημα λειτουργεί γενικά σε κάποια περιοχή συχνοτήτων (το εύρος ζώνης αυτού), και κατά συνέπεια είναι επιθυμητή η επίτευξη προσαρμογής σε όλη αυτή την περιοχή. Από την άλλη πλευρά, η συνθήκη προσαρμογής $Z_L = Z_0$ κατά κανόνα ικανοποιείται ακριβώς μόνο σε μία συχνότητα, είναι όμως δυνατό να ικανοποιείται προσεγγιστικά για μια περιοχή συχνοτήτων. Ως εύρος ζώνης της διάταξης προσαρμογής εννοούμε την περιοχή συχνοτήτων εντός της οποίας το μέτρο $|\rho_L|$ του συντελεστή ανάκλασης, ή ισοδύναμα ο λόγος στασίμου κύματος S , παραμένει «αρκετά κοντά» στην τιμή προσαρμογής $|\rho_L| = 0$ ή $S = 1$, αντίστοιχα. Πρόκειται λοιπόν για την περιοχή συχνοτήτων εντός της οποίας ισχύει $|\rho_L| < \epsilon$ ή $S < 1 + \epsilon$, όπου ϵ κάποια μικρή παράμετρος, η ακριβής τιμή της οποίας εξαρτάται από τις προδιαγραφές του συστήματος (δηλ. πόση ανάκλαση μπορεί να «ανεχθεί» το σύστημα).

Προσαρμογή με μετασχηματιστή $\lambda/4$

Στη μέθοδο αυτή παρεμβάλλεται πριν το φορτίο ένα τμήμα γραμμής μεταφοράς μήκους $\lambda/4$ (μετασχηματιστής $\lambda/4$), με χαρακτηριστική αντίσταση, έστω Z_{02} , διαφορετική από την Z_0 της υπό προσαρμογή γραμμής. Η συνδεσμολογία φαίνεται στο Σχ. 1.9.



(α) Πραγματική αντίσταση φορτίου Z_L

(β) Μιγαδική αντίσταση φορτίου Z_L

Σχ. 1.9: Προσαρμογή φορτίου με μετασχηματιστή $\lambda/4$

Με κατάλληλη επιλογή της Z_{02} μπορεί η αντίσταση εισόδου Z_{in} του τελευταίου τμήματος (φορτίο + μετασχηματιστής) να προσαρμοσθεί στην Z_0 . Υποθέτοντας ότι η γραμμή δεν έχει απώλειες και ότι το φορτίο Z_L είναι πραγματικό, η αντίσταση εισόδου Z_{in} στην αρχή του μετασχηματιστή $\lambda/4$ δίνεται από την (1.5.1) ως εξής:

$$Z_{in} = \frac{Z_{02}^2}{Z_L}$$

Για προσαρμογή πρέπει $Z_{in} = Z_0$, οπότε για την Z_{02} πρέπει

$$Z_0 = \frac{Z_{02}^2}{Z_L} \Leftrightarrow Z_{02} = \sqrt{Z_L Z_0} \quad (1.5.4)$$

Η (1.5.4) δίνει λύση στο πρόβλημα εφόσον η Z_L είναι πραγματική, διότι οδηγεί σε πραγματική τιμή της Z_{02} , και όπως έχει προαναφερθεί οι γραμμές μεταφοράς στην πράξη οφείλουν να έχουν πραγματική σύνθετη αντίσταση. Στην περίπτωση μιγαδικής Z_L , η (1.5.4) δεν επαρκεί διότι οδηγεί σε μιγαδική τιμή της Z_{02} , η οποία θα έλυνε το πρόβλημα της προσαρμογής αλλά δεν θα ήταν αποδεκτή στην πράξη διότι θα δημιουργούσε παραμόρφωση (όπως εξηγήθηκε στην παρ. 1.3.2). Η λύση είναι να παρεμβάλουμε πριν το φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.9β, ένα ακόμα κομμάτι γραμμής μεταφοράς (με χαρακτηριστική αντίσταση ίση με την Z_0 της «κύριας» γραμμής) το οποίο μετατρέπει την αντίσταση Z_L σε πραγματική, δηλ. εμφανίζει αντίσταση εισόδου $Z_{in}(L)$ πραγματική, και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε την (1.5.4). Όπως έχει δειχθεί στα προηγούμενα (βλ. το τέλος της παρ. 1.4.1), οι μοναδικές θέσεις στη γραμμή για τις οποίες η αντίσταση εισόδου $Z_{in}(L)$ είναι πραγματική είναι οι θέσεις μεγίστων και ελαχίστων τάσης (και ρεύματος) οι οποίες δίνονται από τις (1.4.6-7). Κατά συνέπεια, το μήκος L του τελευταίου κομματιού της γραμμής πρέπει να έχει μία από τις τιμές που δίνουν οι (1.4.6-7), κατά κανόνα τη μικρότερη. Στη συνέχεια τοποθετείται ο μετασχηματιστής $\lambda/4$, με τη χαρακτηριστική αντίσταση της (1.5.4) η οποία εδώ (επειδή η $Z_{in}(L)$ παίζει τον ρόλο της Z_L) γίνεται

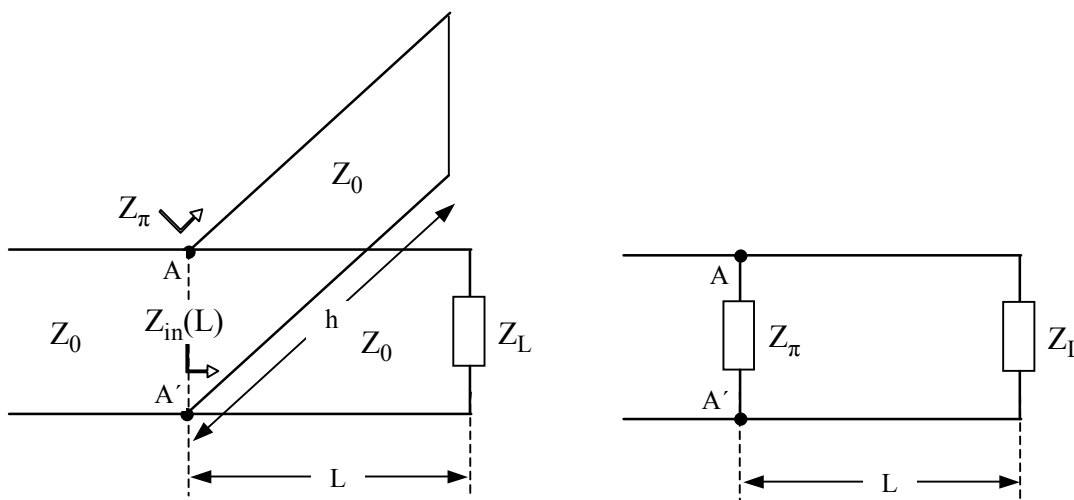
$$Z_{02} = \sqrt{Z_{in}(L)Z_0}$$

ενώ η $Z_{in}(L)$ δίνεται από τις (1.4.13-14) ή σε ενιαία μορφή την (1.4.18).

Σημειώνουμε ότι η διάταξη προσαρμογής με μετασχηματιστή $\lambda/4$ είναι διάταξη στενής ζώνης, δηλ. επιτυγχάνει προσαρμογή με καλή προσέγγιση σε μια σχετικά στενή περιοχή συχνοτήτων. Το εύρος ζώνης είναι δυνατό να αυξηθεί αν χρησιμοποιήσουμε περισσότερους από έναν μετασχηματιστές $\lambda/4$ σε σειρά (με κατάλληλη επιλογή των χαρακτηριστικών αντιστάσεων). Μια άλλη μέθοδος, που επιτυγχάνει ακόμη καλύτερο εύρος ζώνης, είναι η προσαρμογή με **ανομοιόμορφη** γραμμή μεταφοράς, δηλ. με ένα τμήμα γραμμής της οποίας η χαρακτηριστική αντίσταση δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται βαθμιαία κατά μήκος αυτής σύμφωνα με κάποια συνάρτηση $Z_0(z)$.

Προσαρμογή με βραχυκυκλωμένα στελέχη

Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί γραμμές με άλλες σύνθετες αντιστάσεις εκτός από την Z_0 . Η απλούστερη μορφή της μεθόδου είναι η χρήση ενός βραχυκυκλωμένου στελέχους, δηλ. ενός βοηθητικού τμήματος γραμμής μήκους h , με την ίδια χαρακτηριστική αντίσταση Z_0 , το οποίο τερματίζεται σε βραχυκύκλωμα και τοποθετείται παράλληλα με την κύρια γραμμή σε απόσταση L από τον τερματισμό, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.10. Στο ίδιο σχήμα φαίνεται και το ισοδύναμο κύκλωμα, με την αντίσταση εισόδου Z_π του βραχυκυκλωμένου στελέχους. Θεωρούμε και εδώ τις γραμμές χωρίς απώλειες.



Σχ. 1.10: Προσαρμογή φορτίου με ένα βραχυκυκλωμένο στέλεχος

Όπως δείχνει το ισοδύναμο κύκλωμα του Σχ. 1.10, στη θέση AA' η Z_π συνδέεται εν παραλλήλω με την αντίσταση εισόδου $Z_{in}(L)$ του τελευταίου τμήματος της γραμμής. Κατά συνέπεια, για να έχουμε προσαρμογή θα πρέπει η γραμμή να «βλέπει» στη θέση AA' μια συνολική αντίσταση ίση με Z_0 , δηλ.

$$Z_{in}(L) \parallel Z_\pi = \frac{Z_{in}(L)Z_\pi}{Z_{in}(L) + Z_\pi} = Z_0 \tag{1.5.5}$$

ή ισοδύναμα με σύνθετες αγωγιμότητες

$$Y_{in}(L) \parallel Y_{\pi} = Y_{in}(L) + Y_{\pi} = \frac{1}{Z_{in}(L)} + \frac{1}{Z_{\pi}} = \frac{1}{Z_0} \quad (1.5.6)$$

Η $Z_{in}(L)$ δίνεται από την (1.2.9)

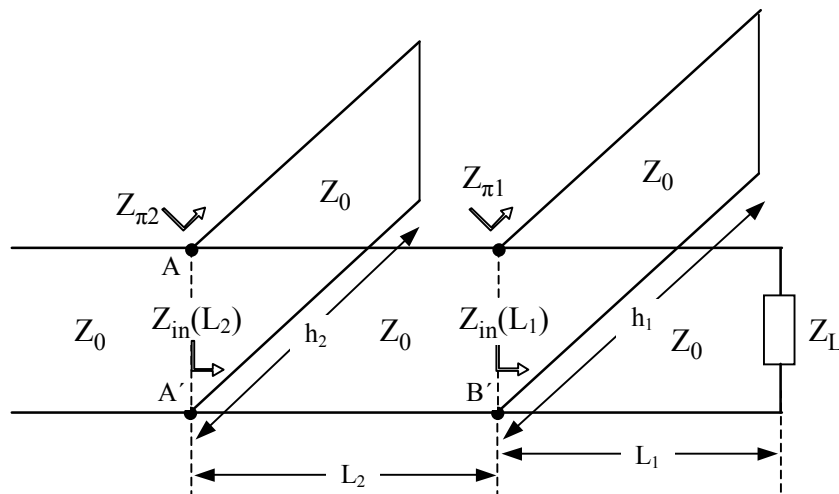
$$Z_{in}(L) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta L)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta L)}$$

και η Z_{π} δίνεται από την (1.4.21)

$$Z_{\pi} = Z_{in}(h) = jZ_0 \tan(\beta h)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στην (1.5.6) (η οποία είναι προτιμότερη για τις πράξεις από την (1.5.5) διότι έχουμε παράλληλη συνδεσμολογία), προκύπτει μια μιγαδική εξίσωση η οποία χωρίζοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη οδηγεί σε ένα σύστημα δύο πραγματικών εξισώσεων με αγνώστους τα μήκη L και h . Επιλύοντας το σύστημα προσδιορίζονται οι επιθυμητές τιμές των L και h για προσαρμογή. Είναι επίσης δυνατόν να χρησιμοποιηθεί γραφική μέθοδος (ο λεγόμενος χάρτης Smith). Σημειώνουμε ότι αντίστοιχη διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί και τοποθετώντας το στέλεχος σε σειρά (δηλ. διακόπτοντας έναν από τους αγωγούς της γραμμής, οπότε η Z_{π} θα ήταν σε σειρά στο ισοδύναμο κύκλωμα).

Μια βελτιωμένη παραλλαγή της μεθόδου είναι η χρήση δύο βραχυκυκλωμένων στελεχών παράλληλα με τη γραμμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 1.11. Στην περίπτωση αυτή διαθέτουμε 4 παραμέτρους που μπορούν να μεταβληθούν (τα μήκη L_1 , L_2 και h_1 , h_2) οπότε διατηρούμε σταθερές τις θέσεις των βραχυκυκλωμένων στελεχών L_1 , L_2 και μεταβάλλουμε τα μήκη τους h_1 , h_2 .



Σχ. 1.11: Προσαρμογή φορτίου με δύο βραχυκυκλωμένα στελέχη

Εδώ το ισοδύναμο κύκλωμα περιλαμβάνει δύο αντιστάσεις παράλληλα με τη γραμμή (τις αντιστάσεις εισόδου $Z_{\pi 1}$ και $Z_{\pi 2}$ των βραχυκυκλωμένων στελεχών), καθεμία από τις οποίες συντίθεται εν παράλληλω με την αντίσταση εισόδου του υπολοίπου της γραμμής στη

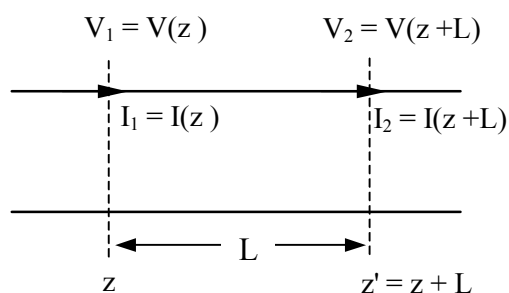
συγκεκριμένη θέση. Πρέπει να σημειωθεί ότι η λύση δίνεται «βαθμηδόν», δηλ. πρώτα υπολογίζεται η $Z_{in}(L_1)$ από την Z_0 και την Z_L (κατά τα γνωστά) και συντίθεται εν παράλληλω με την $Z_{\pi 1}$. Έπειτα η παράλληλη σύνθεση αυτών θεωρείται ως αντίσταση φορτίου (τερματισμού) και με βάση αυτή υπολογίζεται η $Z_{in}(L_2)$. Η συνθήκη προσαρμογής διατυπώνεται με βάση την ολική αντίσταση που «βλέπει» η γραμμή στη θέση AA', δηλ. την παράλληλη σύνθεση της $Z_{in}(L_2)$ και της $Z_{\pi 2}$, η οποία πρέπει να ισούται με την Z_0 . Συνοπτικά, η μέθοδος βασίζεται στην κατάλληλη ρύθμιση των τιμών $Z_{\pi 1}$ και $Z_{\pi 2}$, ρυθμίζοντας τα μήκη των δύο στελεχών. Η επίλυση του προβλήματος είναι αρκετά περίπλοκη αλγεβρικά, μπορεί όμως να επιτευχθεί και με H/Y ή με γραφική μέθοδο.

Η μέθοδος προσαρμογής με δύο βραχυκυκλωμένα στελέχη πλεονεκτεί ως προς την προσαρμογή με ένα στέλεχος διότι επιτυγχάνει μεγαλύτερο εύρος ζώνης, αλλά και κατασκευαστικά διότι συνήθως δεν είναι εύκολο να μετακινούμε ένα στέλεχος κατά μήκος της γραμμής (κατά κανόνα οι αγωγοί της γραμμής είναι μονωμένοι), ενώ είναι ευκολότερο να μεταβάλλουμε το μήκος στελεχών που είναι συνδεδεμένα σε σταθερές θέσεις.

Σημειώνουμε ότι η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τρία ή και περισσότερα βραχυκυκλωμένα στελέχη τα οποία τοποθετούνται σε σταθερές θέσεις στη γραμμή και μεταβάλλονται τα μήκη τους. Τότε οι άγνωστοι του προβλήματος (τα μήκη h_1 , h_2 , h_3 κ.ο.κ.) είναι περισσότεροι από τις εξισώσεις που το διέπουν, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλές λύσεις (στην πράξη κατά κανόνα επιλέγουμε, για λόγους κατασκευαστικούς, σχετικά μικρά μήκη). Η χρήση περισσότερων βραχυκυκλωμένων στελεχών γενικά βελτιώνει (αυξάνει) το εύρος ζώνης της διάταξης.

1.6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 1.1. Έστω δύο σημεία z και z' πάνω σε γραμμή μεταφοράς, τα οποία



απέχουν μεταξύ τους απόσταση L κατά μήκος της γραμμής (δηλ. $z' = z + L$). Έστω επίσης V_1 , I_1 και V_2 , I_2 , αντίστοιχα, οι τάσεις και ρεύματα της γραμμής στα σημεία αυτά. Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τα V_1 , I_1 συναρτήσει των V_2 , I_2 (δηλ. την τάση και το ρεύμα στο «προηγούμενο» σημείο συναρτήσει της τάσης και του ρεύματος στο «επόμενο» σημείο).

Απάντηση

Οι θεμελιώδεις σχέσεις (1.1.5α-β) της γραμμής για τα σημεία z και z' γράφονται:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_\pi e^{-\gamma z} + V_\alpha e^{\gamma z} \\ I_1 = \frac{V_\pi}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_\alpha}{Z_0} e^{\gamma z} \end{array} \right. \quad (1\alpha) \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_\pi e^{-\gamma z} e^{-\gamma L} + V_\alpha e^{\gamma z} e^{\gamma L} \\ I_2 = \frac{V_\pi}{Z_0} e^{-\gamma z} e^{-\gamma L} - \frac{V_\alpha}{Z_0} e^{\gamma z} e^{\gamma L} \end{array} \right. \quad (2\alpha)$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (2α-β) ως προς V_π και V_α προκύπτει

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\pi = \left(\frac{V_2}{2} + \frac{Z_0 I_2}{2} \right) e^{\gamma z} e^{\gamma L} \\ V_\alpha = \left(\frac{V_2}{2} - \frac{Z_0 I_2}{2} \right) e^{-\gamma z} e^{-\gamma L} \end{array} \right.$$

και εισάγοντας αυτές στις (1α-β) παίρνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_2 \cosh(\gamma L) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma L) \\ I_1 = \frac{V_2}{Z_0} \sinh(\gamma L) + I_2 \cosh(\gamma L) \end{array} \right. \quad (3\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{V_2}{Z_0} \sinh(\gamma L) + I_2 \cosh(\gamma L) \end{array} \right. \quad (3\beta)$$

όπου \sinh και \cosh είναι οι γνωστές συναρτήσεις υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου.

Παρατήρηση: Αν επιλύσουμε τις (3α-β) ως προς V_2 και I_2 θα πάρουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = V_1 \cosh(\gamma L) - Z_0 I_1 \sinh(\gamma L) \\ I_2 = -\frac{V_1}{Z_0} \sinh(\gamma L) + I_1 \cosh(\gamma L) \end{array} \right.$$

Δεδομένου ότι $\cosh(-x) = \cosh(x)$ και $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, παρατηρούμε ότι πρόκειται για τις ίδιες σχέσεις με αντικατάσταση του L από $-L$. (Είναι εύλογο αυτό; Εξηγήστε.)

Ειδική περίπτωση: Για γραμμή χωρίς απώλειες ισχύει $\gamma = j\beta$, οπότε $\cosh(j\beta L) = \cos(\beta L)$ και $\sinh(j\beta L) = j\sin(\beta L)$ και προκύπτουν οι αξιοσημειώτες σχέσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_2 \cos(\beta L) + jZ_0 I_2 \sin(\beta L) \\ I_1 = j\frac{V_2}{Z_0} \sin(\beta L) + I_2 \cos(\beta L) \end{array} \right. \quad (4\alpha)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = j\frac{V_2}{Z_0} \sin(\beta L) + I_2 \cos(\beta L) \end{array} \right. \quad (4\beta)$$

Παράδειγμα 1.2. Γραμμή μεταφοράς με κατανεμημένες παραμέτρους $L = 0,6 \mu\text{H/m}$ και $C = 240 \text{ pF/m}$ λειτουργεί σε συχνότητα 100 MHz με σύνθετη αντίσταση τερματισμού (δηλ. φορτίο) $Z_L = -j100 \Omega$. Να προσδιορισθεί η σύνθετη αντίσταση εισόδου της γραμμής σε απόσταση $\ell = 3,5416 \text{ m}$ από τον τερματισμό.

Απάντηση

Οι παράμετροι R, G της γραμμής δεν δίνονται (ούτε ζητούνται) και επομένως υπονοείται ότι $R = G = 0$, δηλ. η γραμμή είναι χωρίς απώλειες, οπότε $\alpha = 0$ και $\gamma = j\beta$. Τότε ισχύει

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ rad/sec} \cdot \left(0,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 240 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right)^{1/2}$$

και μετά τις πράξεις παίρνουμε $\beta = 2,4\pi \text{ rad/m}$. Άρα το μήκος κύματος στη γραμμή είναι

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2,4\pi} \cong 0,8333 \text{ m}$$

Επίσης η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής είναι

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left(\frac{0,6 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}}{240 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}} \right)^{1/2} = \dots = 50 \Omega$$

Σε απόσταση ℓ από τον τερματισμό, η αντίσταση εισόδου από την (1.2.9) είναι

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{3,5416}{0,8333} = 4,25 \Rightarrow \ell = 4\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

Άρα

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \left(4\lambda + \frac{\lambda}{4} \right) = 8\pi + \frac{\pi}{2}$$

οπότε $\tan(\beta\ell) \rightarrow \infty$ και η σχέση για την Z_{in} δίνει

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_{\text{in}}(3,5416 \text{ m}) = \frac{Z_0^2}{Z_L} = j25 \Omega$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το ανωτέρω τμήμα γραμμής μήκους $8\lambda + \lambda/4$ συμπεριφέρεται σαν μετασχηματιστής $\lambda/4$. Εδώ συγκεκριμένα μετασχηματίζει χωρητικό φορτίο σε αυτεπαγωγικό.

Παράδειγμα 1.3. Έστω γραμμή μεταφοράς με απώλειες ($\alpha > 0$), τερματισμένη σε κάποια σύνθετη αντίσταση Z_L .

α) Αν το φορτίο είναι προσαρμοσμένο ($Z_L = Z_0$), να αποδειχθεί ότι σε κάθε σημείο της γραμμής η αντίσταση εισόδου είναι επίσης Z_0 .

β) Αν το φορτίο δεν είναι προσαρμοσμένο ($Z_L \neq Z_0$), να αποδειχθεί ότι σε μεγάλες αποστάσεις από τον τερματισμό η αντίσταση εισόδου τείνει προς την Z_0 .

Απάντηση

α) Στην περίπτωση προσαρμογής ($Z_L = Z_0$), η αντίσταση εισόδου σε οποιαδήποτε απόσταση ℓ σύμφωνα με την (1.2.8), είναι

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_0 + Z_0 \tanh(\gamma\ell)}{Z_0 + Z_0 \tanh(\gamma\ell)} = Z_0$$

β) Όταν δεν υπάρχει προσαρμογή ($Z_L \neq Z_0$), χρησιμοποιούμε την (1.2.7) που γράφεται

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{e^{\gamma\ell} + \rho_L e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} - \rho_L e^{-\gamma\ell}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\gamma\ell}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma\ell}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-2\alpha\ell} e^{-j2\beta\ell}}{1 - \rho_L e^{-2\alpha\ell} e^{-j2\beta\ell}}$$

Όταν η απόσταση από τον τερματισμό γίνεται πολύ μεγάλη, δηλ. $\ell \rightarrow +\infty$, τότε για τον εκθετικά φθίνοντα παράγοντα ισχύει $e^{-2\alpha\ell} \rightarrow 0$. Επομένως

$$Z_{\text{in}}(\ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} Z_0 \frac{1+0}{1-0} = Z_0$$

Δηλαδή όσο απομακρυνόμαστε από τον τερματισμό τόσο λιγότερο αντιληπτή γίνεται η επίπτωση της κακής προσαρμογής. Η φυσική αιτία της συμπεριφοράς αυτής είναι ότι τα ανακλώμενα κύματα πρέπει να διανύσουν μεγάλη απόσταση, οπότε αποσβένονται και δεν είναι πλέον «ορατά» στην είσοδο της γραμμής.

Παρατήρηση: Το παραπάνω συμπέρασμα (α) ισχύει και για γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες ($\alpha = 0$ και $\gamma = j\beta$). Το συμπέρασμα (β) όμως δεν ισχύει, επειδή δεν υπάρχει ο εκθετικά φθίνων παράγοντας $e^{-2\alpha\ell}$.

Παράδειγμα 1.4. Να προταθεί τρόπος προσδιορισμού της χαρακτηριστικής αντίστασης Z_0 μιας γραμμής μεταφοράς χωρίς απώλειες με μετρήσεις στην είσοδο της γραμμής.

Απάντηση

Ένας τρόπος μέτρησης θα μπορούσε να βασισθεί σε μετρήσεις της αντίστασης εισόδου. Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνεται τμήμα γνωστού μήκους ℓ και εκτελούνται οι ακόλουθες μετρήσεις:

1) Η γραμμή τερματίζεται σε βραχυκύκλωμα και μετράται η σύνθετη αντίσταση εισόδου στο άλλο άκρο της, έστω Z_B . Επειδή $Z_L = 0$, η (1.2.9) δίνει

$$Z_B = Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{0 + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + j0} = jZ_0 \tan(\beta\ell)$$

2) Η γραμμή τερματίζεται σε ανοικτοκύκλωμα και μετράται πάλι η σύνθετη αντίσταση εισόδου στο άλλο άκρο της, έστω Z_A . Τότε $Z_L \rightarrow \infty$ και από την (1.2.9) παίρνουμε

$$Z_A = Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{1}{j \tan(\beta\ell)} = -jZ_0 \cot(\beta\ell)$$

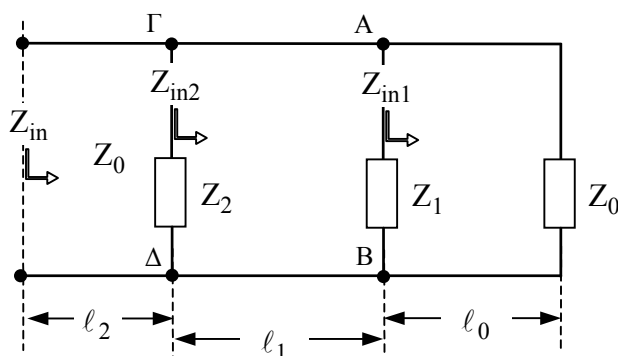
Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε:

$$Z_B Z_A = Z_0^2 \Rightarrow Z_0 = (Z_B Z_A)^{1/2}$$

Πρέπει να επισημανθεί ότι οι τιμές Z_B και Z_A που θα μετρηθούν εξαρτώνται από τη συχνότητα που θα γίνει η μέτρηση, πράγμα αναμενόμενο αφού και η Z_0 γενικά είναι συνάρτηση της συχνότητας.

[Ερώτηση για τον αναγνώστη: Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αυτή και για γραμμή με απώλειες; Αν ναι πως, αν όχι γιατί;].

Παράδειγμα 1.5. Έστω μια γραμμή μεταφοράς, χωρίς απώλειες και με χαρακτηριστική



αντίσταση Z_0 , σε ορισμένα σημεία της οποίας συνδέονται παράλληλα κάποιες σύνθετες αντιστάσεις, έστω Z_1 , Z_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σύνθετες αυτές αντιστάσεις μπορεί να αντιπροσωπεύουν π.χ. τμήματα γραμμών μεταφοράς ή οποιαδήποτε

άλλα φορτία. Η γραμμή τερματίζεται σε προσαρμοσμένο φορτίο. Να προσδιορισθεί η σύνθετη αντίσταση εισόδου Z_{in} στο αριστερό άκρο της γραμμής.

Απάντηση

Το πρόβλημα δίνεται χωρίς αριθμητικά στοιχεία, και κατά συνέπεια εδώ θα υποδειχθεί η γενική μεθοδολογία επίλυσης, ανεξάρτητα από αριθμητικές τιμές. Παρατηρούμε ότι η γραμμή έχει δύο «ασυνέχειες» στις θέσεις AB και ΓΔ. Με τον όρο «ασυνέχειες» εννοούμε σημεία στα οποία η γραμμή «βλέπει» αντίσταση διαφορετική από τη χαρακτηριστική της. Για τη λύση του προβλήματος θα υπολογίσουμε με διαδοχικά βήματα τις αντιστάσεις εισόδου στα σημεία ασυνέχειας ξεκινώντας από τον τερματισμό της γραμμής.

α) Το τμήμα αμέσως δεξιά της θέσης AB (δηλ. χωρίς να ληφθεί υπόψη η Z_1) λόγω της προσαρμογής έχει αντίσταση εισόδου

$$Z_{in1} = Z_0$$

β) Αμέσως αριστερά της θέσης AB η αντίσταση εισόδου είναι

$$Z_{AB} = Z_{in1} \parallel Z_1 = Z_0 \parallel Z_1 = \frac{Z_0 Z_1}{Z_0 + Z_1}$$

γ) Για το τμήμα μεταξύ των θέσεων AB και ΓΔ η παραπάνω σύνθετη αντίσταση Z_{AB} αποτελεί την αντίσταση τερματισμού (φορτίο). Κατά συνέπεια, η αντίσταση εισόδου αμέσως δεξιά της θέσης ΓΔ (δηλ. χωρίς να ληφθεί υπόψη η Z_2) είναι η αντίσταση εισόδου σε απόσταση l_1 από το φορτίο Z_{AB} , για την οποία βάσει της (1.2.7) έχουμε

$$Z_{in2} = Z_{in}(\ell_1) = Z_0 \frac{1 + \rho_{AB} e^{-2\gamma\ell_1}}{1 - \rho_{AB} e^{-2\gamma\ell_1}} \quad \text{όπου} \quad \rho_{AB} = \frac{Z_{AB} - Z_0}{Z_{AB} + Z_0}$$

Προφανώς μπορεί (ισοδύναμα) να χρησιμοποιηθεί και η σχέση

$$Z_{in2} = Z_{in}(\ell_1) = Z_0 \frac{Z_{AB} + Z_0 \tanh(\gamma\ell_1)}{Z_0 + Z_{AB} \tanh(\gamma\ell_1)}$$

δ) Αμέσως αριστερά της θέσης ΓΔ η αντίσταση εισόδου είναι

$$Z_{\Gamma\Delta} = Z_{in2} \parallel Z_2 = \frac{Z_{in2} Z_2}{Z_{in2} + Z_2}$$

ε) Τελικά για τη ζητούμενη σύνθετη αντίσταση εισόδου Z_{in} στο αριστερό άκρο της γραμμής θεωρούμε ως φορτίο την $Z_{\Gamma\Delta}$ που βρέθηκε παραπάνω και εφαρμόζουμε τη σχέση για την αντίσταση εισόδου σε απόσταση ℓ_2 από το φορτίο:

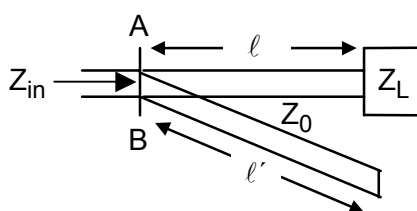
$$Z_{in} = Z_{in}(\ell_2) = Z_0 \frac{1 + \rho_{\Gamma\Delta} e^{-2\gamma\ell_2}}{1 - \rho_{\Gamma\Delta} e^{-2\gamma\ell_2}} \quad \text{όπου} \quad \rho_{\Gamma\Delta} = \frac{Z_{\Gamma\Delta} - Z_0}{Z_{\Gamma\Delta} + Z_0}$$

Και πάλι μπορεί (ισοδύναμα) να χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_{\Gamma\Delta} + Z_0 \tanh(\gamma\ell_2)}{Z_0 + Z_{\Gamma\Delta} \tanh(\gamma\ell_2)}$$

Αν είχαν δοθεί αριθμητικές τιμές, θα εκτελούσαμε τις αντικαταστάσεις σε καθένα από τα παραπάνω βήματα (α) – (ε) και θα υπολογίζαμε βαθμηδόν την Z_{in} .

Παράδειγμα 1.6. Φορτίο $Z_L = 25 - j75 \Omega$ τροφοδοτείται από γραμμή μεταφοράς με



χαρακτηριστική αντίσταση $Z_0 = 75 \Omega$ και μήκος (μέχρι τη θέση AB) $\ell = 2,25 \text{ m}$. Στην είσοδο της γραμμής αυτής συνδέεται παράλληλα (όπως στο σχήμα) μια άλλη γραμμή της ίδιας χαρακτηριστικής αντίστασης και μήκους ℓ' , η οποία τερματίζεται σε βραχυκύκλωμα. Να βρεθεί το μήκος ℓ' της δεύτερης γραμμής ώστε η ολική σύνθετη αντίσταση εισόδου (στη θέση AB) να είναι πραγματική. Οι γραμμές είναι χωρίς απώλειες και η συχνότητα λειτουργίας είναι 150 MHz. [Σημείωση: Το μήκος κύματος στη γραμμή να θεωρηθεί όσο και στον ελεύθερο χώρο.]

Απάντηση

Το μήκος κύματος στη γραμμή είναι $\lambda = c/f = 2 \text{ m}$, άρα $\ell = 2,25 \text{ m} = \lambda + \frac{\lambda}{8}$.

Ως προς τη θέση AB τα δύο τμήματα γραμμής ισοδυναμούν με τις σύνθετες αντιστάσεις εισόδου αυτών, έστω $Z_{in}(\ell)$ και $Z_{in}(\ell')$, οι οποίες συνδέονται παράλληλα και δίνουν την ολική σύνθετη αντίσταση εισόδου Z_{in} στη θέση AB ως εξής:

$$\frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{Z_{in}(\ell)} + \frac{1}{Z_{in}(\ell')}$$

Οι $Z_{in}(\ell)$ και $Z_{in}(\ell')$ δίνονται από την (1.2.9). Ειδικότερα για την $Z_{in}(\ell)$ έχουμε

$$\tan(\beta\ell) = \tan\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda}{8}\right)\right] = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

οπότε η (1.2.9) δίνει

$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0}{Z_0 + jZ_L} = 75 \cdot \frac{25 - j75 + j75}{75 + j25 - j^2 75} = \frac{75 \cdot 25}{150 + j25} = \frac{75}{6 + j}$$

και επομένως

$$\frac{1}{Z_{in}(\ell)} = \frac{6}{75} + j\frac{1}{75}$$

Η δεύτερη γραμμή (μήκους ℓ') είναι βραχυκυκλωμένη και από την (1.4.21) έχουμε

$$Z_{in}(\ell') = jZ_0 \tan(\beta\ell') \Rightarrow \frac{1}{Z_{in}(\ell')} = -j\frac{1}{75 \tan(\beta\ell')}$$

Πρέπει το φανταστικό μέρος της $1/Z_{in}$ να μηδενίζεται, δηλ. πρέπει

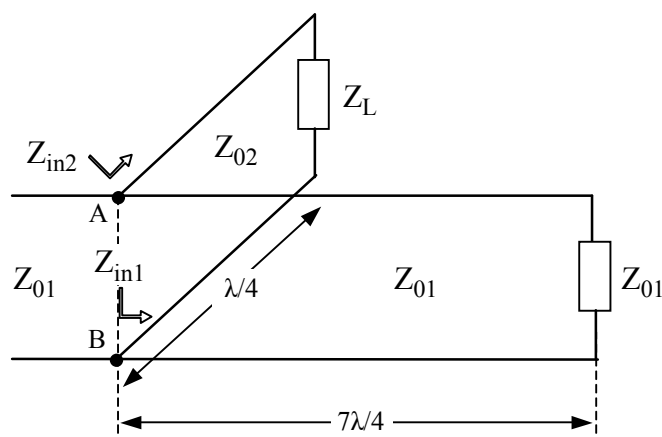
$$\text{Im}\left[\frac{1}{Z_{in}(\ell)} + \frac{1}{Z_{in}(\ell')}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{75} - \frac{1}{75 \tan(\beta\ell')} = 0 \Leftrightarrow \tan(\beta\ell') = 1 \Leftrightarrow \beta\ell' = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

Από τις ανωτέρω άπειρες λύσεις επιλέγουμε τη μικρότερη (θετική προφανώς), οπότε

$$\beta\ell' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\ell' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ell' = \frac{\lambda}{8} = 0,25 \text{ m}$$

Παράδειγμα 1.7.

Έστω η συνδεσμολογία δύο γραμμών μεταφοράς που φαίνεται στο σχήμα. Η κύρια γραμμή έχει χαρακτηριστική αντίσταση Z_{01} και τερματίζεται σε προσαρμοσμένο φορτίο. Σε απόσταση $7\lambda/4$ από τον τερματισμό της (στα σημεία AB του σχήματος) συνδέεται παράλληλα η δευτερεύουσα γραμμή, η οποία έχει μήκος $\lambda/4$, χαρακτηριστική αντίσταση Z_{02} και τερματίζεται σε ωμική αντίσταση φορτίου Z_L που είναι τέτοια ώστε να δημιουργείται στη δευτερεύουσα γραμμή στάσιμο κύμα με SWR (λόγο στασίμου κύματος) $S = 4$. Να προσδιορισθεί σε dB ο λόγος της ανακλώμενης προς την προσπίπτουσα ισχύ αμέσως πριν τα σημεία AB του σχήματος. Δίνεται ότι οι γραμμές δεν έχουν απώλειες και ισχύει $Z_L < Z_{02} = 2Z_{01}$.



Η κύρια γραμμή έχει χαρακτηριστική αντίσταση Z_{01} και τερματίζεται σε προσαρμοσμένο φορτίο. Σε απόσταση $7\lambda/4$ από τον τερματισμό της (στα σημεία AB του σχήματος) συνδέεται παράλληλα η δευτερεύουσα γραμμή, η οποία έχει μήκος $\lambda/4$, χαρακτηριστική αντίσταση Z_{02} και τερματίζεται σε

Απάντηση

Η σύνθετη αντίσταση, έστω Z_{in} , που «βλέπει» η γραμμή στη θέση AB είναι ο παράλληλος συνδυασμός των αντιστάσεων εισόδου των δύο τμημάτων γραμμών που ξεκινούν από τα σημεία A και B:

$$Z_{in} = Z_{in1} \parallel Z_{in2} = \frac{Z_{in1} Z_{in2}}{Z_{in1} + Z_{in2}}$$

Για το τμήμα της κύριας γραμμής δεξιά των A, B, λόγω της προσαρμογής η αντίσταση εισόδου είναι ίση με τη χαρακτηριστική της αντίσταση (και μάλιστα ανεξαρτήτως μήκους)

$$Z_{in1} = Z_{01}$$

Στη δευτερεύουσα γραμμή, αφού η Z_L είναι ωμική και $Z_L < Z_{02}$, η θέση τερματισμού είναι θέση ελαχίστου τάσης και, σύμφωνα με την (1.4.26), για τον SWR έχουμε

$$S = \frac{Z_{02}}{Z_L}$$

Αλλά αφού το μήκος της είναι $\lambda/4$, βάσει της (1.5.1) ισχύει επίσης

$$Z_{in2} = \frac{Z_{02}^2}{Z_L} = Z_{02} \frac{Z_{02}}{Z_L}$$

και συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$Z_{in2} = S Z_{02} = 4 Z_{02}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και ότι $Z_{02} = 2Z_{01}$, προκύπτει

$$Z_{in} = Z_{01} \parallel (4Z_{02}) = \frac{Z_{01} \cdot 4Z_{02}}{Z_{01} + 4Z_{02}} = \frac{Z_{01} \cdot 8Z_{01}}{Z_{01} + 8Z_{01}} = \frac{8}{9} Z_{01}$$

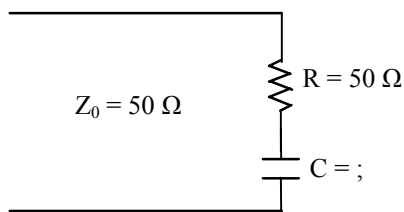
και άρα ο συντελεστής ανάκλασης στη θέση AB είναι

$$\rho_{AB} = \frac{Z_{in} - Z_{01}}{Z_{in} + Z_{01}} = \frac{\left(\frac{8}{9} - 1\right) Z_{01}}{\left(\frac{8}{9} + 1\right) Z_{01}} = -\frac{1}{17}$$

Ο λόγος των ισχύων του ανακλώμενου και του προσπίπτοντος κύματος στη γραμμή είναι, ως γνωστόν, ίσος με $|\rho_L|^2$. Επομένως στην περιοχή αριστερά από τη θέση AB ο λόγος αυτός (αν συμβολισθεί με Λ), εκφραζόμενος σε dB, είναι

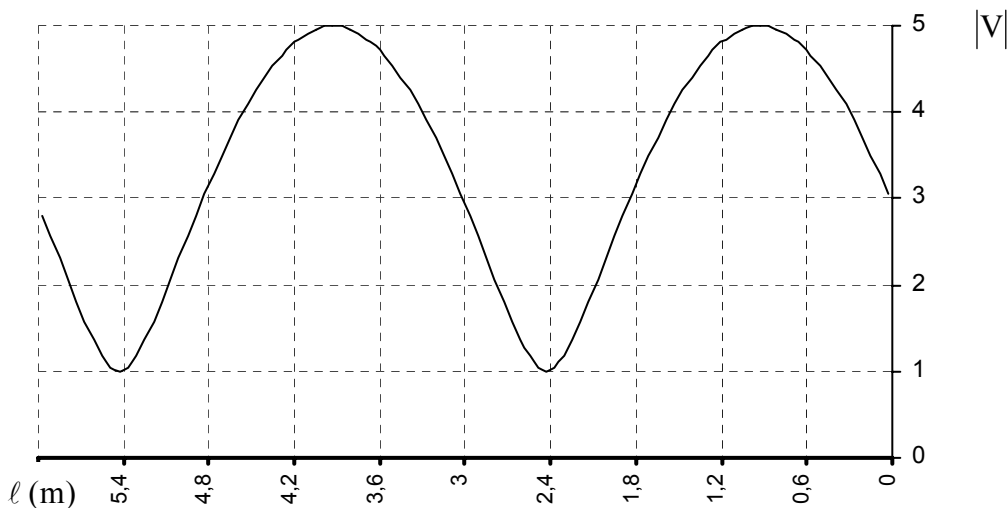
$$\Lambda = 10 \log_{10} \left(\frac{W_\alpha}{W_\pi} \right) = 10 \log_{10} (|\rho_{AB}|^2) = \dots \cong -24,61 \text{ dB}$$

Παράδειγμα 1.8. Γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση 50Ω



τερματίζεται σε φορτίο που αποτελείται από μια ωμική αντίσταση 50Ω σε σειρά με πυκνωτή άγνωστης χωρητικότητας C . Η εικόνα του στασίμου κύματος (δηλ. η μεταβολή του μέτρου της τάσης) κατά μήκος

της γραμμής έχει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Να προσδιορισθεί η τιμή της χωρητικότητας C . (Δίνεται ότι οι αγωγοί της γραμμής δεν είναι μονωμένοι, δηλ. το υλικό που περιβάλλει τη γραμμή είναι ο αέρας).



Απάντηση

Η τιμή της χωρητικότητας θα προκύψει από τη σύνθετη αντίσταση τερματισμού

$$Z_L = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} = R - jX \tag{1}$$

η οποία, επειδή $R = Z_0$, συνδέεται με το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης ως εξής:

$$|\rho_L| = \frac{|Z_L - Z_0|}{|Z_L + Z_0|} = \frac{|Z_0 - jX - Z_0|}{|Z_0 - jX + Z_0|} = \frac{|-jX|}{|2Z_0 - jX|} = \frac{X}{\sqrt{4Z_0^2 + X^2}}$$

Επιλύοντας ως προς X βρίσκουμε το φανταστικό μέρος της Z_L συναρτήσει του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης

$$\frac{X^2}{4Z_0^2 + X^2} = |\rho_L|^2 \Leftrightarrow X^2(1 - |\rho_L|^2) = 4Z_0^2|\rho_L|^2 \Leftrightarrow X = \frac{2Z_0|\rho_L|}{\sqrt{1 - |\rho_L|^2}} \tag{2}$$

Από το σχήμα προκύπτει ο λόγος στασίμου κύματος (SWR), διαιρώντας τις τιμές μεγίστου και ελαχίστου τάσης στη γραμμή, δηλ.

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{5 \text{ V}}{1 \text{ V}} = 5$$

και από αυτόν υπολογίζεται το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης:

$$S = \frac{1+|\rho_L|}{1-|\rho_L|} \Rightarrow |\rho_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε

$$X = \frac{2 \cdot 50 \cdot 2/3}{\sqrt{1-4/9}} = \frac{200/3}{\sqrt{5/3}} = \frac{200}{\sqrt{5}} \Omega \quad (3)$$

Για την εύρεση της χωρητικότητας C από την X χρειάζεται η συχνότητα λειτουργίας, η οποία προκύπτει από το μήκος κύματος και την ταχύτητα φάσης στη γραμμή. Το μήκος κύματος λ στη γραμμή προσδιορίζεται από τη μορφή του στασίμου κύματος διότι, ως γνωστόν, η απόσταση δύο διαδοχικών ελαχίστων ισούται με $\lambda/2$. Από το σχήμα, τα δύο πρώτα ελάχιστα εμφανίζονται στις θέσεις $\ell = 2,4 \text{ m}$ και $\ell = 5,4 \text{ m}$ και παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{2} = 5,4 \text{ m} - 2,4 \text{ m} = 3 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 6 \text{ m}$$

Όπως έχει σημειωθεί στην παρ. 1.1.4, η ταχύτητα φάσης στη γραμμή είναι ίση με την ταχύτητα φάσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο υλικό που περιβάλλει τη γραμμή, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι ο αέρας, και επομένως η ταχύτητα φάσης στη γραμμή είναι όση η ταχύτητα του φωτός στο κενό ή στον αέρα: $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}^*$. Επομένως η συχνότητα λειτουργίας είναι

$$c_0 = \lambda f \Rightarrow f = \frac{c_0}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}{6 \text{ m}} = 50 \text{ MHz}$$

και από την τιμή της X που βρέθηκε στην (3) προκύπτει

$$X = \frac{1}{2\pi f C} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot \frac{200}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{20\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F} = \frac{50\sqrt{5}}{\pi} \text{ pF} \cong 35,59 \text{ pF}$$

* Ο συνηθέστερος τρόπος να χαρακτηρίζεται ένα διηλεκτρικό υλικό είναι με την *σχετική* διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_r αυτού, πράγμα που σημαίνει ότι η διηλεκτρική επιτρεπτότητα του υλικού είναι $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Αν λοιπόν η γραμμή είχε κάποιο άλλο υλικό, η ταχύτητα φάσης θα ήταν κατά τα γνωστά:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

διότι κατά κανόνα τα υλικά αυτά είναι μαγνητικώς αδρανή, δηλ. $\mu = \mu_0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟΙ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ

2.1. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ

2.1.1. Γενικά

Οι κυματοδηγοί είναι μεταλλικοί σωλήνες που χρησιμοποιούνται για τη μεταφορά μικροκυματικής ισχύος. Κατασκευάζονται από μέταλλο υψηλής αγωγιμότητας (ώστε να ελαχιστοποιούνται οι απώλειες ισχύος στα τοιχώματα) και στο εσωτερικό τους συχνά είναι κενοί (δηλ. περιέχουν αέρα), ενώ σε ορισμένες εφαρμογές περιέχουν διηλεκτρικό υλικό πολύ χαμηλής αγωγιμότητας (μονωτικό) για την επίτευξη των επιθυμητών ιδιοτήτων διάδοσης. Οι περισσότεροι κυματοδηγοί στην πράξη είναι ορθογωνικής διατομής, υπάρχουν όμως και κυκλικοί ή ελλειπτικοί. Εδώ θα περιορισθούμε στη μελέτη των ορθογωνικών κυματοδηγών, αλλά η μεθοδολογία και τα συμπεράσματα είναι παρόμοια και για άλλους τύπους διατομής. Σημειώνουμε επίσης ότι και οι οπτικές ίνες (οι οποίες βέβαια χρησιμοποιούνται σε εντελώς διαφορετική περιοχή συχνοτήτων) είναι κυματοδηγοί από διηλεκτρικά υλικά, και η μελέτη τους βασίζεται σε αντίστοιχες μεθόδους.

Ο ρόλος των κυματοδηγών είναι, όπως προαναφέρθηκε, η μεταφορά υψίσυχνης ισχύος από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που αναπτύσσονται στο εσωτερικό τους. Η λειτουργία τους, λοιπόν, παρουσιάζει σαφή αναλογία με τις γνωστές γραμμές μεταφοράς δύο αγωγών, με τη διαφορά ότι σε αυτούς αντί για τα μεγέθη τάσης και έντασης ρεύματος πρέπει να χρησιμοποιηθούν πεδιακά μεγέθη (ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου). Τα κύρια πλεονεκτήματα των κυματοδηγών είναι

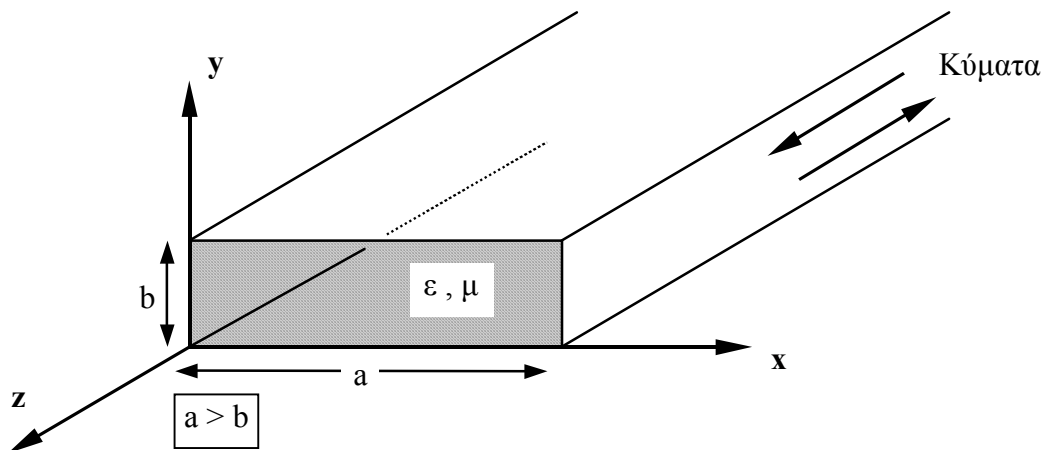
- α) οι πολύ μικρές απώλειες που παρουσιάζουν, δηλ. η πολύ μικρή απόσβεση ισχύος που προκαλούν
- β) η δυνατότητα να μεταφέρουν πολύ μεγάλη ισχύ
- γ) η αποφυγή παρεμβολών από άλλες πηγές στο σήμα που μεταφέρουν, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι τα κλειστά μεταλλικά τοιχώματα θωρακίζουν (απομονώνουν πλήρως) το εσωτερικό του κυματοδηγού από τυχόν κύματα που υπάρχουν στο εξωτερικό του.

Μειονέκτημα αποτελεί το αυξημένο κόστος των κυματοδηγών, το οποίο απαγορεύει τη χρήση τους για μεγάλες αποστάσεις. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι, όπως θα δούμε και στα επόμενα, η περιοχή λειτουργίας κάθε κυματοδηγού περιορίζεται από μια ορισμένη συχνότητα και πάνω, δηλ. δεν είναι δυνατή η χρήση του στη χαμηλή περιοχή συχνοτήτων (όπου όμως δεν θα ήταν και αναγκαία διότι οι δισύρματες ή ομοαξονικές γραμμές έχουν ικανοποιητική απόδοση).

Με βάση τα παραπάνω, κυματοδηγοί χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μικροκυματικών συχνοτήτων υψηλής ισχύος, αλλά και χαμηλής εφόσον υπάρχουν ιδιαίτερες απαιτήσεις για πολύ μικρή απόσβεση και ελαχιστοποίηση θορύβου. Τέτοιες είναι π.χ. οι εφαρμογές συστημάτων ραδιοεντοπισμού (ραντάρ) και δορυφορικών επικοινωνιών, στα οποία χρησιμοποιούνται κυματοδηγοί για τη μεταφορά του σήματος από τη βαθμίδα εξόδου του πομπού στην κεραία και από την κεραία στη βαθμίδα εισόδου του δέκτη. Στις χαμηλότερες συχνότητες για ενσύρματη μετάδοση χρησιμοποιούνται γραμμές μεταφοράς δύο αγωγών, ενώ στις ακόμη υψηλότερες (π.χ. υπέρυθρες, οπτικές, υπεριώδεις) χρησιμοποιούνται οι οπτικές ίνες, οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν επίσης διηλεκτρικούς κυματοδηγούς.

2.1.2. Κυματοδότηση – Ρυθμοί

Η γεωμετρία ενός ορθογωνικού κυματοδηγού φαίνεται στο Σχ. 2.1. Όπως και στις γραμμές μεταφοράς, συνηθίζεται ο άξονας z να ταυτίζεται με τον άξονα του κυματοδηγού (και επομένως με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος). Θα υιοθετήσουμε επίσης τη σύμβαση να συμβολίζεται με a η μεγάλη εγκάρσια διάσταση του κυματοδηγού και με b η μικρή, και να λαμβάνεται ο άξονας x κατά μήκος της μεγάλης διάστασης. Παρατηρήστε στο Σχ. 2.1 ότι το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι (ως συνήθως) δεξιόστροφο.



Σχ. 2.1: Γεωμετρία ορθογωνικού κυματοδηγού

Όπως έχει προαναφερθεί, η μελέτη των κυματοδηγών πρέπει να βασισθεί στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται μέσα σε αυτούς, δηλ. τα διανύσματα $\vec{E}(x, y, z)$ και $\vec{H}(x, y, z)$ τα οποία γενικά, ως γνωστόν, είναι συναρτήσεις και των τριών συντεταγμένων. Έχει υποθεθεί (ως συνήθως) ότι τα πεδία μεταβάλλονται ημιτονοειδώς στο χρόνο με κάποια κυκλική συχνότητα ω , και επομένως χρησιμοποιούμε τους μιγαδικούς φασιθέτες (phasors) για να εκφράσουμε κάθε συνιστώσα των διανυσμάτων αυτών. Η λειτουργία του

κυματοδηγού βασίζεται στο γεγονός ότι μπορούν να υπάρξουν κύματα οδεύοντα κατά τον άξονά του, δηλ. κατά τη διεύθυνση z . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι συμβαίνει κυματοδότηση. Τα κύματα που εμφανίζονται (και συνήθως αποκαλούνται κυματοδηγούμενα) περιγράφονται, στην πιο γενική μορφή τους, από τις σχέσεις

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}'(x, y) \exp(\pm \gamma z) \quad (2.1.1\alpha)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{H}'(x, y) \exp(\pm \gamma z) \quad (2.1.1\beta)$$

όπου

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.1.2)$$

είναι η μυγαδική σταθερά διάδοσης στον κυματοδηγό, όπως ακριβώς και στην περίπτωση γραμμής μεταφοράς. Το πραγματικό μέρος της α είναι ο συντελεστής απόσβεσης (λεγόμενο και ειδική απόσβεση) του κυματοδηγού σε Np/m, και το φανταστικό β είναι η σταθερά διάδοσης του κύματος στον κυματοδηγό, σε rad/m, και συνδέεται με το μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό λ_g με τη γνωστή σχέση

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (2.1.3)$$

Τονίζεται ότι το μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό είναι γενικά διαφορετικό από ό,τι έξω στον ελεύθερο χώρο, όπως άλλωστε συμβαίνει και στις γραμμές μεταφοράς.

Οι εξ. (2.1.1α-β) σημαίνουν ότι η εξάρτηση των πεδιακών μεγεθών από τη συντεταγμένη z είναι της μορφής

$$\exp(\pm \gamma z) = \exp(\pm \alpha z) \exp(\pm j\beta z)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι εξάρτηση του τύπου $\exp(-\gamma z)$ σημαίνει διάδοση του κύματος προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z , ενώ του τύπου $\exp(\gamma z)$ κατά την αρνητική. Ειδικότερα ο δεύτερος παράγοντας, π.χ. $\exp(-j\beta z)$, εκφράζει αυτή καθαυτή την όδευση του κύματος προς τα δεξιά, ενώ ο πρώτος $\exp(-\alpha z)$ δηλώνει τυχόν εκθετική απόσβεσή του προς αυτή την κατεύθυνση. Αντίστοιχα ισχύουν και στην αντίθετη περίπτωση του $\exp(\gamma z)$. Προφανώς για $\alpha = 0$ το κύμα οδεύει με σταθερό (αμείωτο) πλάτος.

Στη θεωρία των κυματοδηγών, η απόδειξη ότι μπορεί να υπάρξουν κύματα της μορφής (2.1.1α-β) ακολουθεί την εξής συλλογιστική: Υποθέτουμε ότι τα πεδία ακολουθούν τις εξ. (2.1.1α-β), εισάγουμε αυτές στις εξισώσεις Maxwell και αναζητούμε λύση των εν λόγω εξισώσεων στη μορφή αυτή. Επειδή από την ανάλυση καθίσταται δυνατή η εύρεση λύσης, και αφού η λύση των εξισώσεων Maxwell είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι η αρχική μας υπόθεση είναι αληθινή, δηλ. ότι όντως τα πεδία που αναπτύσσονται στον κυματοδηγό

(και φυσικά πρέπει να είναι λύσεις των εξισώσεων Maxwell) ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1.1α-β).

Επιπλέον, η θεωρία αποδεικνύει ότι οι λύσεις αυτές των εξισώσεων Maxwell χωρίζονται σε δύο οικογένειες, η πρώτη από τις οποίες έχει μηδενική διαμήκη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, δηλ. $E_z = 0$, και η δεύτερη έχει $H_z = 0$. Με άλλα λόγια, η πρώτη οικογένεια λύσεων έχει εγκάρσιο (transverse) το ηλεκτρικό πεδίο και η δεύτερη το μαγνητικό. Για το λόγο αυτό, τα κύματα της πρώτης κατηγορίας ονομάζονται **κύματα TE** (Transverse Electric) και της δεύτερης **κύματα TM** (Transverse Magnetic). Όλα τα κύματα και των δύο κατηγοριών χαρακτηρίζονται (για λόγους που θα φανούν στη συνέχεια) με τον γενικό όρο ρυθμοί κυματοδότησης, και συνεπώς οι ρυθμοί της πρώτης οικογένειας αποκαλούνται ρυθμοί TE, και της δεύτερης ρυθμοί TM.

Για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε ότι είναι δυνατό να υπάρξουν κύματα που έχουν εγκάρσιο και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συγχρόνως, δηλ. $E_z = H_z = 0$, και λέγονται κύματα (ρυθμοί) TEM, αλλά σε άλλες διατάξεις (όπως οι γραμμές μεταφοράς δύο αγωγών) και όχι στους κυματοδηγούς. Αποδεικνύεται, μάλιστα, ότι η αναγκαία προϋπόθεση για να μπορούν να εμφανισθούν κύματα TEM είναι η γραμμή να περιέχει δύο απομονωμένους μεταξύ τους αγωγούς. Αποδεικνύεται επίσης ότι, εφόσον κυματοδηγείται ρυθμός TEM, τα μεγέθη τάσης και έντασης ρεύματος $V(z)$ και $I(z)$ κατά μήκος της γραμμής έχουν σαφή έννοια και μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Συνεπώς, όλη η θεωρία των γραμμών μεταφοράς δύο αγωγών που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα αποτελεί ουσιαστικά μελέτη των ιδιοτήτων των ρυθμών TEM σε αυτές, δεδομένου ότι αυτή είναι η κατεξοχήν (αν όχι η αποκλειστική) κατάσταση λειτουργίας τους που χρησιμοποιείται στην πράξη. Τέλος, υπάρχουν διατάξεις δύο αγωγών, όπως οι λεγόμενες μικροταινίες (microstrips), στις οποίες εμφανίζεται ρυθμός που δεν είναι ακριβώς TEM, μπορεί όμως να αντιμετωπισθεί προσεγγιστικά ως τέτοιος.

Στη συνέχεια θα εξετασθούν χωριστά οι ρυθμοί των δύο ανωτέρω κατηγοριών.

2.2. ΡΥΘΜΟΙ TE

2.2.1. Ηλεκτρομαγνητικά πεδία στον κυματοδηγό

Εισάγουμε τις σχέσεις (2.1.1α-β) στις εξισώσεις Maxwell και λαμβάνουμε υπόψη το γεγονός ότι $E_z = 0$. Θα ασχοληθούμε με κύματα που οδεύουν προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z , δηλ. με εξάρτηση από z της μορφής $\exp(-\gamma z)$, αφού η μελέτη των κυμάτων της αντίθετης κατεύθυνσης είναι εντελώς αντίστοιχη (αλλάζουν μόνο ορισμένα πρόσημα και ουσιαστικά περιττεύει). Από την ανωτέρω εξάρτηση από z προκύπτει ότι η μερική παραγωγή ως προς z ανάγεται σε πολλαπλασιασμό με $(-\gamma)$, όπως για παράδειγμα

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\gamma E_x$$

και ομοίως για όλες τις άλλες συνιστώσες. Με χρήση αυτού, από τις εξισώσεις Maxwell προκύπτουν οι σχέσεις

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.2.1\alpha)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.2.1\beta)$$

$$H_x = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.2.1\gamma)$$

$$H_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.2.1\delta)$$

όπου ϵ και μ είναι αντίστοιχα η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητα του διηλεκτρικού υλικού που περιέχει ο κυματοδηγός (αν λοιπόν περιέχει κενό ή αέρα, παίρνουν τις τιμές κενού ϵ_0 και μ_0). Θα υποθέσουμε ότι οι αριθμοί ϵ και μ είναι πραγματικοί, πράγμα που (συγκεκριμένα για το ϵ) σημαίνει ότι το υλικό έχει μηδενική αγωγιμότητα, δηλ. δεν έχει απώλειες (είναι τέλειος μονωτής).

Οι σχέσεις (2.2.1α-β) δείχνουν ότι όλες οι άλλες συνιστώσες των πεδίων μπορούν να υπολογισθούν από τη μοναδική διαμήκη συνιστώσα H_z , και συνεπώς αρκεί να συγκεντρώσουμε την προσοχή μας σε αυτή. Από τις εξισώσεις Maxwell προκύπτει επίσης η ακόλουθη διαφορική εξίσωση για την H_z

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) H_z + (\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon) H_z = 0 \quad (2.2.2)$$

της οποίας η γενική λύση (λαμβάνοντας υπόψη την εξάρτηση της μορφής $\exp(-\gamma z)$ από το z) είναι

$$H_z = [A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)] [B_1 \cos(k_y y) + B_2 \sin(k_y y)] \exp(-\gamma z) \quad (2.2.3)$$

όπου $A_1, A_2, B_1, B_2, k_x, k_y$ κάποιες σταθερές για τις οποίες ισχύει

$$k_x^2 + k_y^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon \quad (2.2.4)$$

Πρέπει όμως η λύση να ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες στα τοιχώματα του κυματοδηγού. Εφόσον τα τοιχώματα θεωρηθούν απείρως αγωγίμα, τότε οι οριακές

συνθήκες απαιτούν να μηδενίζονται οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια των τοιχωμάτων, δηλαδή να ισχύει

$$E_y = 0 \text{ για } x = 0, a \text{ και } \forall y \quad \text{και} \quad E_x = 0 \text{ για } y = 0, b \text{ και } \forall x$$

Υπολογίζοντας τις συνιστώσες E_x και E_y από τις (2.2.1α-β) σε συνδυασμό με την (2.2.3) και επιβάλλοντας τις ανωτέρω οριακές συνθήκες προκύπτει ότι οι σταθερές A_2 , B_2 , k_x , k_y πρέπει να παίρνουν τις τιμές

$$A_2 = B_2 = 0 \quad (2.2.5\alpha)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.5\beta)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.5\gamma)$$

Στις (2.2.5β-γ) πρέπει όμως να προσεχθεί ότι οι ακέραιοι m και n δεν μπορούν να μηδενίζονται συγχρόνως. Αυτό διότι αν τεθεί $m = n = 0$ τότε από την (2.2.4) προκύπτει ότι $\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = 0$, και κατά συνέπεια οι (2.2.1α-δ) δεν ισχύουν πλέον, οπότε καταλήγουμε σε αντίφαση (άτοπο) διότι για την εύρεση των (2.2.5β-γ) χρησιμοποιήθηκαν κάποιες από τις (2.2.1α-δ). Επομένως πρέπει $m + n > 0$, δηλ. πρέπει τουλάχιστον ο ένας από τους m , n να υπερβαίνει το 0.

Με βάση τα παραπάνω, η τελική έκφραση για τη συνιστώσα H_z γράφεται

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.2.6)$$

όπου η σταθερά $H_0 = A_1 B_1$ καθορίζει το πλάτος του κύματος, και άρα εξαρτάται από τη διέγερση, δηλ. από την πηγή που δημιουργήσε το κύμα στον κυματοδηγό. Η σταθερά γ έχει γραφεί γ_{mn} γιατί εξαρτάται από τις τιμές m και n , όπως δείχνει η (2.2.4) αν σε αυτή εισάγουμε τις (2.2.5β-γ). Από τις (2.2.1α-δ), εισάγοντας την (2.2.6), μπορούν να υπολογισθούν όλες οι άλλες πεδριακές συνιστώσες, ως εξής:

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.2.7)$$

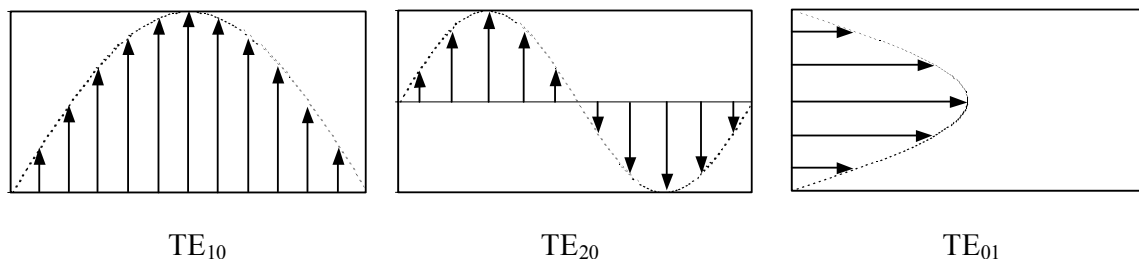
$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.2.8)$$

$$H_x = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.2.9)$$

$$H_y = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \exp(-\gamma_{mn} z) \quad (2.2.10)$$

Από τις (2.2.5β-γ) παρατηρούμε ότι οι k_x , k_y πρέπει να είναι ακέραια πολλαπλάσια κάποιων συγκεκριμένων ποσοτήτων (με συντελεστές m , n). Κάθε ζεύγος τιμών των ακεραίων συντελεστών m και n αντιστοιχεί σε μία διαφορετική λύση, την οποία προσδιορίζει η μορφή των πεδίων που δίνεται από τις (2.2.6-10). Κάθε τέτοια λύση ονομάζεται **ρυθμός κυματοδότησης** και αποτελεί έναν συγκεκριμένο “τρόπο” να διαδοθεί κύμα μέσα στον κυματοδηγό. Οι εξ. (2.2.6-10) περιγράφουν τους ρυθμούς TE, ενώ ανάλογες σχέσεις προκύπτουν (όπως θα δούμε σε λίγο) και για τους ρυθμούς TM. Επειδή κάθε ρυθμός χαρακτηρίζεται πλήρως από το ζεύγος των ακεραίων (m,n) που του αντιστοιχεί (το οποίο λέγεται τάξη του ρυθμού), συνήθως ο συγκεκριμένος ρυθμός συμβολίζεται με τον δείκτη mn . Για παράδειγμα, ο ρυθμός TE_{01} είναι ο ρυθμός τύπου TE τάξης $(0,1)$, δηλ. με $m = 0$ και $n = 1$, ο TM_{12} είναι ο TM ρυθμός με $m = 1$ και $n = 2$, κ.ο.κ. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση (ότι πρέπει $m + n > 0$) που έγινε σε σχέση με τις (2.2.5β-γ) συμπεραίνουμε ότι ρυθμός TE_{00} δεν υπάρχει.

Στο Σχ. 2.2 που ακολουθεί παρουσιάζεται η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου σε μια εγκάρσια τομή του κυματοδηγού για τους ρυθμούς TE των πρώτων τάξεων.



Σχ. 2.2: Μορφή ρυθμών TE των χαμηλότερων τάξεων

Πρέπει εδώ να τονισθεί ότι το σύνολο των ρυθμών TE και TM, για όλα τα ζεύγη τιμών των m , n , αποτελεί ένα πλήρες σύστημα με βάση το οποίο μπορούν να εκφραστούν όλα τα πεδία που είναι δυνατόν να αναπτυχθούν στον κυματοδηγό. Δηλαδή ένα οποιοδήποτε κύμα μέσα στον κυματοδηγό δεν συμπίπτει κατανάγκη με κάποιον από τους ρυθμούς, μπορεί όμως πάντοτε να αναλυθεί σε άθροισμα (υπέρθθεση) πεπερασμένων ή άπειρων το πλήθος ρυθμών TE ή TM ή και των δύο ειδών. Το ποιοί ρυθμοί θα περιέχονται στο εν λόγω άθροισμα εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος και από τον τρόπο διέγερσης, δηλ. το είδος και τη μορφή της πηγής που το παράγει. Όπως θα δούμε όμως κατωτέρω, στην πράξη προτιμάται να διαδίδεται ένας και μόνο ρυθμός στον κυματοδηγό (μονορρυθμική λειτουργία).

2.2.2. Συχνότητες αποκοπής

Συγκεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στην εξ. (2.2.4), η οποία σε συνδυασμό με τις (2.2.5β-γ) δείχνει ότι για κάθε ζεύγος τιμών των m , n , δηλ. για κάθε ρυθμό, η μιγαδική σταθερά διάδοσης γ παίρνει διαφορετική τιμή, έστω γ_{mn} . Από τις εν λόγω εξισώσεις προκύπτει

$$\gamma_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon \quad (2.2.11)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το τετράγωνο της σταθεράς γ_{mn} είναι αριθμός πραγματικός, θετικός ή αρνητικός, και άρα η γ_{mn} είναι είτε καθαρά πραγματική είτε καθαρά φανταστική. Στην πρώτη περίπτωση ($\gamma_{mn}^2 > 0$) η εξάρτηση $\exp(-\gamma z)$ λαμβάνει τη μορφή ενός παράγοντα $\exp(-\alpha_{mn}z)$, ο οποίος αντιστοιχεί σε μια εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση που αποσβένεται χωρίς να ταλαντώνει και άρα στην ουσία *δεν αποτελεί κύμα*. Στην άλλη περίπτωση ($\gamma_{mn}^2 < 0$) έχουμε

$$\gamma_{mn} = j\beta_{mn} \quad (2.2.12)$$

δηλ. η γ_{mn} είναι καθαρά φανταστική, οπότε η εξάρτηση $\exp(-\gamma z)$ γίνεται $\exp(-j\beta_{mn}z)$ και εκφράζει ένα οδεύον κύμα, και μάλιστα χωρίς καθόλου απόσβεση. Συμπεραίνουμε ότι *κυματοδότηση συμβαίνει μόνο εφόσον $\gamma_{mn}^2 < 0$* . Με αυτή την απαίτηση, η (2.2.11) οδηγεί στην ακόλουθη **συνθήκη κυματοδότησης**

$$\omega > \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\omega = 2\pi f$ και ότι η ταχύτητα του φωτός (και γενικότερα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων) στο υλικό που περιέχει ο κυματοδηγός είναι

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.2.14)$$

η συνθήκη κυματοδότησης παίρνει τη μορφή

$$f > f_{Cmn} \quad (2.2.15)$$

όπου

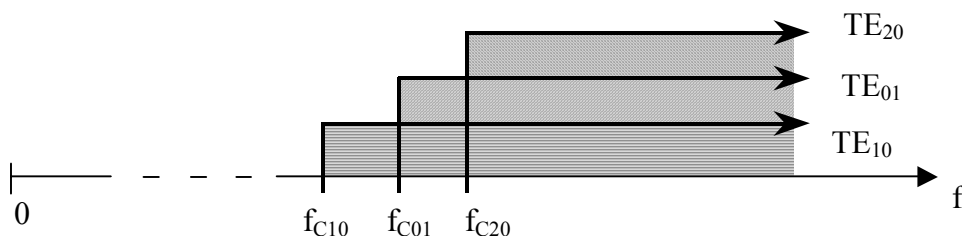
$$f_{Cmn} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.16)$$

Οι συχνότητες f_{Cmn} λέγονται **συχνότητες αποκοπής** (cutoff frequencies) των αντίστοιχων ρυθμών. Σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, η συνθήκη κυματοδότησης (2.2.15)

σημαίνει ότι, εφόσον η πηγή που τροφοδοτεί τον κυματοδηγό έχει συχνότητα μεγαλύτερη από τη συχνότητα αποκοπής f_{Cmn} , θα εμφανισθεί στον κυματοδηγό ένα κύμα που θα αντιστοιχεί στον ρυθμό τάξης (m,n). Αντίθετα, αν η συχνότητα λειτουργίας είναι μικρότερη από τη συχνότητα αποκοπής f_{Cmn} , τότε ο ρυθμός τάξης (m,n) πρακτικά δεν μπορεί να υπάρξει, διότι ακόμη και αν αυτός διεγερθεί θα εμφανίσει κάποιο πεδίο που θα φθίνει ταχύτατα εκθετικά και σε ελάχιστη απόσταση θα γίνεται αμελητέο. Με άλλα λόγια, η συχνότητα αποκοπής f_{Cmn} είναι η συχνότητα από την οποία και κάτω δεν εμφανίζεται (αποκόπεται) ο ρυθμός TE_{mn} στον κυματοδηγό (εξ ου και η ονομασία της), ενώ φυσικά την ίδια ακριβώς έννοια έχει και για τους ρυθμούς TM_{mn} . Είναι προφανές ότι η χαμηλότερη από όλες τις συχνότητες αποκοπής θέτει το κατώτατο όριο της περιοχής συχνοτήτων λειτουργίας του κυματοδηγού, επειδή για συχνότητες μικρότερες από αυτή δεν κυματοδηγείται κανένας ρυθμός και κατά συνέπεια ο κυματοδηγός δεν μπορεί να μεταφέρει σήμα. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι οι πρώτες συχνότητες αποκοπής είναι οι

$$f_{C10} = \frac{c}{2a} \quad f_{C01} = \frac{c}{2b} \quad f_{C20} = \frac{c}{a} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

και από αυτές η μικρότερη είναι η f_{C10} , επειδή εξ υποθέσεως έχουμε ότι $a > b$. Η αμέσως επόμενη είναι είτε η f_{C01} είτε η f_{C20} , ανάλογα με το αν ισχύει $a < 2b$ ή $a > 2b$. Συνεπώς ο ρυθμός TE_{10} είναι εκείνος που εμφανίζεται πρώτος, δηλ. στη μικρότερη συχνότητα, και λέγεται **κύριος ή επικρατέστερος ρυθμός** για λόγους που θα δούμε στα επόμενα. Η εμφάνιση των ρυθμών TE καθώς αυξάνει η συχνότητα λειτουργίας παρουσιάζεται σχηματικά στο επόμενο Σχ. 2.3 (για την περίπτωση $f_{C10} < f_{C01} < f_{C20}$). Όπως θα δούμε στα επόμενα, αντίστοιχη είναι και η συμπεριφορά των ρυθμών TM με τη διαφορά ότι ορισμένες τάξεις δεν εμφανίζονται καθόλου.



Σχ. 2.3: Εμφάνιση ρυθμών TE στον κυματοδηγό

2.2.3. Σταθερά διάδοσης - Μήκος κύματος στον κυματοδηγό

Εισάγοντας τις (2.2.14) και (2.2.16) στην (2.2.11), και λαμβάνοντας υπόψη την (2.2.12), παίρνουμε για τη σταθερά διάδοσης του ρυθμού TE_{mn}

$$\beta_{mn} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{Cmn}^2}{c^2} \right)^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.17)$$

όπου $\omega_{Cmn} = 2\pi f_{Cmn}$ είναι η κυκλική συχνότητα αποκοπής του ρυθμού. Όπως έχει ήδη παρατηρηθεί, εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη κυματοδότησης (δηλ. για συχνότητες που υπερβαίνουν τη συχνότητα αποκοπής) ισχύει $\gamma_{mn} = j\beta_{mn}$, δηλ. η σταθερά απόσβεσης $\alpha_{mn} = 0$ και το κύμα στον κυματοδηγό διαδίδεται χωρίς απόσβεση (με αμείωτο πλάτος), ενώ αλλιώς δεν κυματοδηγείται καθόλου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα τοιχώματα του κυματοδηγού έχουν θεωρηθεί απείρως αγωγίμα, δηλ. χωρίς απώλειες. Το μοντέλο αυτό είναι προφανώς εξιδανικευμένο, αλλά διευκολύνει τη μελέτη. Οι κυματοδηγοί που χρησιμοποιούνται στην πράξη έχουν τοιχώματα με αγωγιμότητα πεπερασμένη και όχι άπειρη, και ως εκ τούτου παρουσιάζουν κάποια απόσβεση. Επειδή όμως η αγωγιμότητα είναι μεγάλη, τα ανωτέρω αποτελέσματα ισχύουν και στην πράξη με μεγάλη ακρίβεια σε ό,τι αφορά τις συχνότητες αποκοπής.

Λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστή σχέση που συνδέει το μήκος κύματος με τη συχνότητα και την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ελεύθερο χώρο

$$c = \lambda f = \frac{\lambda}{2\pi} \omega \quad (2.2.18)$$

η (2.2.17) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\beta_{mn} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.2.19)$$

Τονίζεται και πάλι ότι το μήκος κύματος λ ανωτέρω αναφέρεται σε *ελεύθερο χώρο* που περιέχει το υλικό με το οποίο είναι γεμάτος ο κυματοδηγός. Πρόκειται λοιπόν για το μήκος κύματος *έξω* από τον κυματοδηγό, ενώ το μήκος κύματος *μέσα* σε αυτόν δίνεται από την (2.1.3) εισάγοντας την (2.2.19), οπότε προκύπτει

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.2.20)$$

Παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι έξω από αυτόν (στον ελεύθερο χώρο) για την ίδια συχνότητα. Είναι επίσης προφανές ότι σε κάθε ρυθμό TE_{mn} αντιστοιχεί διαφορετικό μήκος κύματος (στο σύμβολο λ_g θα μπορούσε να τεθεί δείκτης mn , πράγμα που δεν έγινε για να αποφευχθεί επιβάρυνση του συμβολισμού).

2.2.4. Ταχύτητα φάσης και ταχύτητα ομάδας

Η ταχύτητα v_p των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στον κυματοδηγό δίνεται από μια σχέση εντελώς ανάλογη της (2.2.18) ως εξής

$$v_p = \lambda_g f = \frac{\lambda_g}{2\pi} \omega = \frac{\omega}{\beta_{mn}} \quad (2.2.21)$$

όπου η εξάρτηση από m, n οφείλεται προφανώς στην εξάρτηση του λ_g από m, n , και δείχνει ότι σε κάθε ρυθμό αντιστοιχεί διαφορετική ταχύτητα. Εισάγοντας στην (2.2.21) την (2.2.20) και λαμβάνοντας υπόψη την (2.2.18) παίρνουμε

$$v_p = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (2.2.22)$$

Πρέπει να τονισθεί ότι η ανωτέρω είναι η **ταχύτητα φάσης** του κύματος ρυθμού TE_{mn} μέσα στον κυματοδηγό, δηλ. η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση κατά τη διεύθυνση z . (Ισοδύναμα μπορεί να ορισθεί ως η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένας κινούμενος παρατηρητής για να βλέπει το πεδίο σαν να ήταν σταθερό στο χρόνο). Ένα συνεχές κύμα καθαρά ημιτονοειδούς μορφής περιέχει μία μόνο συχνότητα και χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα φάσης και μόνο. Όμως ένα τέτοιο κύμα, αν και μεταφέρει ενέργεια, δεν μεταφέρει πληροφορία, διότι η μορφή του παραμένει απαράλλακτη επ' άπειρον. Η πληροφορία μεταφέρεται από κύμα παλμικής μορφής ή γενικότερα **διαμορφωμένο κύμα**, το οποίο, σύμφωνα με την ανάλυση Fourier, αποτελείται από υπέρθεση πολλών συχνοτήτων. Διαμορφωμένο κύμα είναι κύμα του οποίου είτε το πλάτος είτε η συχνότητα είτε η φάση μεταβάλλεται στο χρόνο, και ακριβώς αυτή η μεταβολή περιέχει τη μεταδιδόμενη πληροφορία. Αποδεικνύεται ότι η ταχύτητα διάδοσης μιας τέτοιας μεταβολής, και κατά συνέπεια η **ταχύτητα μετάδοσης της πληροφορίας** (αλλά και της ισχύος), δίνεται από τη λεγόμενη **ταχύτητα ομάδας** του κύματος

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \quad (2.2.23)$$

Με εφαρμογή της ανωτέρω σχέσης προκύπτει από την (2.2.17) η ταχύτητα ομάδας για τον ρυθμό TE_{mn} στον κυματοδηγό

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_{mn}} = \frac{1}{\partial \beta_{mn} / \partial \omega} = c \left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2.2.24)$$

Η έννοια της ταχύτητας ομάδας επιλύει το φαινομενικό παράδοξο της εξ. (2.2.22) η οποία δίνει τιμή της v_p μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, ώστε θα νόμιζε κανείς ότι

παραβιάζεται η θεωρία της σχετικότητας. Στην πραγματικότητα όμως η θεωρία της σχετικότητας απαγορεύει τη διάδοση πληροφορίας με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, πράγμα που βρίσκεται σε συμφωνία με την (2.2.24).

2.2.5. Χαρακτηριστική αντίσταση κυματοδηγού

Όπως έχει ήδη τονισθεί, ένας κυματοδηγός παρουσιάζει μεγάλη αναλογία με γραμμή μεταφοράς, με τη διαφορά ότι η περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του παρουσιάζει ένα κάτω όριο, και ότι αντί για την τάση και την ένταση ρεύματος πρέπει να μελετηθούν οι εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Μεταξύ των μεγεθών αυτών μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχει μια περαιτέρω αναλογία, και συγκεκριμένα από πολλές απόψεις μπορεί να παραλληλισθεί η τάση με την εγκάρσια συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (E_x ή E_y) και η ένταση ρεύματος με την εγκάρσια συνιστώσα της έντασης του μαγνητικού πεδίου (H_x ή H_y). Η αναλογία αυτή στο βάθος υποκρύπτει το γεγονός ότι η τάση (ή αλλιώς ΗΕΔ) δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης ηλεκτρικού πεδίου, και η ένταση ρεύματος δίνεται (σύμφωνα με το νόμο του Ampère) από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της έντασης μαγνητικού πεδίου. Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της αναλογίας αποτελεί η περίπτωση τερματισμού του κυματοδηγού σε αγωγίμη πλάκα, η οποία προφανώς λειτουργεί ως βραχυκύκλωμα. Πάνω σε μια τέτοια πλάκα, σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες, οι εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου οφείλουν να μηδενίζονται (όπως και η τάση πάνω σε βραχυκύκλωμα), ενώ οι εγκάρσιες συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου συνδέονται ευθέως με τα επιφανειακά ρεύματα στην πλάκα και οι τιμές τους μεταβάλλονται χωρίς περιορισμούς (όπως και η ένταση ρεύματος πάνω σε βραχυκύκλωμα).

Με βάση το ανωτέρω σκεπτικό, η **χαρακτηριστική αντίσταση** ενός κυματοδηγού (θεωρούμενου ως γραμμής μεταφοράς) που λειτουργεί στον ρυθμό TE_{mn} είναι

$$Z_{mn}^{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \frac{(\mu/\varepsilon)^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (2.2.25)$$

όπως προκύπτει από τις εξ. (2.2.1α-δ) εισάγοντας τις (2.2.12), (2.2.14) και (2.2.17). Αξίζει να σημειωθεί ότι $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ (συμβολίζεται επίσης με ζ) είναι η κυματική αντίσταση ενός άπειρου χώρου με το υλικό που περιέχει ο κυματοδηγός (βλ. την Εισαγωγή).

Η έννοια της χαρακτηριστικής αντίστασης σε κυματοδηγό παίζει τον ίδιο ρόλο όπως και για γραμμή μεταφοράς. Με βάση αυτή μπορεί π.χ. να προκύψει ο συντελεστής ανάκλασης

(και κατά συνέπεια το αν υπάρχει ή όχι προσαρμογή κτλ.), εφόσον είναι γνωστή η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του φορτίου στον τερματισμό.

2.3. ΡΥΘΜΟΙ TM

Η μελέτη των ρυθμών TM ακολουθεί τα ίδια βήματα και γενικά παρουσιάζει πλήρη αντιστοιχία με αυτή των ρυθμών TE. Οι ρυθμοί αυτοί χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι $H_z = 0$, δηλ. το μαγνητικό πεδίο είναι εγκάρσιο. Δεχόμενοι και πάλι τις (2.1.1α-β) οι οποίες δηλώνουν κυματοδήγηση, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μερική παραγωγή ως προς z με πολλαπλασιασμό με $(-\gamma)$, και βάσει αυτού από τις εξισώσεις Maxwell προκύπτουν οι αντίστοιχες των (2.2.1α-δ) σχέσεις

$$E_x = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.3.1\alpha)$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.3.1\beta)$$

$$H_x = \frac{j\omega \epsilon}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.3.1\gamma)$$

$$H_y = \frac{-j\omega \epsilon}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.3.1\delta)$$

οι οποίες δείχνουν ότι οι άλλες πεδιακές συνιστώσες μπορούν να υπολογισθούν από τη διαμήκη συνιστώσα E_z . Προκύπτει ότι η E_z διέπεται από την ίδια διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0 \quad (2.3.2)$$

και κατά συνέπεια η γενική λύση είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με την (2.2.3), ενώ η (2.2.4) ισχύει και στην περίπτωση αυτή. Οι οριακές συνθήκες επιβάλλουν και πάλι τον μηδενισμό των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου στα απείρως αγωγίμα τοιχώματα, αλλά τώρα εφαπτομενική συνιστώσα είναι και η E_z , και επομένως πρέπει

$$E_z = 0 \text{ για } x = 0, a \text{ και } \forall y \quad \text{και} \quad E_z = 0 \text{ για } y = 0, b \text{ και } \forall x$$

Επιβάλλοντας τις ανωτέρω συνθήκες προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές που υπεισέρχονται στη γενική λύση

$$A_1 = B_1 = 0 \quad (2.3.3\alpha)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3\beta)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3\gamma)$$

όπου παρατηρούμε ότι οι 2 τελευταίες είναι ταυτόσημες με τις (2.2.5β-γ), ενώ η πρώτη διαφέρει από την (2.2.5α). Με βάση αυτές προκύπτει η έκφραση για τη συνιστώσα E_z και στη συνέχεια, με τη βοήθεια των (2.3.1α-δ), και για τις άλλες συνιστώσες ως εξής:

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.3.4)$$

$$E_x = -\frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.3.5)$$

$$E_y = -\frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.3.6)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.3.7)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{\gamma_{mn}^2 + \omega^2\mu\epsilon} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-\gamma_{mn}z) \quad (2.3.8)$$

Επειδή η (2.2.4) και οι (2.2.5β-γ) ισχύουν αυτούσιες, προκύπτει με την ίδια διαδικασία η ίδια συνθήκη κυματοδότησης (2.2.13) και για ρυθμούς TM. Ισχύει επίσης η (2.2.12) για τη μιγαδική σταθερά διάδοσης. Οι συχνότητες αποκοπής των ρυθμών TM είναι οι ίδιες όπως για ρυθμούς TE και δίνονται από την (2.2.16), ενώ οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και για τη σταθερά διάδοσης β_{mn} , το μήκος κύματος λ_g μέσα στον κυματοδηγό, την ταχύτητα φάσης και την ταχύτητα ομάδας. Μια διαφορά μεταξύ των ρυθμών TE και TM, με σημαντική επίπτωση στην πράξη, προκύπτει από την παρατήρηση ότι, εκτός από τον ρυθμό TM_{00} (ο οποίος είναι ανύπαρκτος για τον ίδιο λόγο με τον TE_{00}), δεν είναι δυνατόν να υπάρξει ούτε ο TM_{01} ούτε ο TM_{10} . Αυτό διότι, όπως παρατηρούμε από τις (2.3.4-2.3.8), αν μηδενισθεί ο ένας μόνο από τους ακεραίους m και n , τότε όλα τα πεδία μηδενίζονται ταυτοτικά και επομένως δεν υπάρχει ο αντίστοιχος ρυθμός. Δηλ. πρέπει $mn \neq 0$, και κατά συνέπεια ο πρώτος (χαμηλότερος) ρυθμός TM είναι ο TM_{11} , με συχνότητα αποκοπής

$$f_{C11} = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3.9)$$

Τέλος, η χαρακτηριστική αντίσταση του κυματοδηγού στον ρυθμό TM_{mn} είναι

$$Z_{mn}^{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon} = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (2.3.10)$$

2.4. ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

2.4.1. Διέγερση κυματοδηγών

Όπως έγινε φανερό από τις προηγούμενες παραγράφους, η διοχέτευση μικροκυματικής ισχύος σε κυματοδηγό από μια πηγή (γεννήτρια) μικροκυμάτων θα προκαλέσει την εμφάνιση οδεύοντων κυμάτων σε αυτόν με τη συχνότητα της πηγής, που είναι και η συχνότητα λειτουργίας, εφόσον βέβαια αυτή υπερβαίνει τη χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής του κυματοδηγού, δηλ. ικανοποιεί τη συνθήκη κυματοδότησης. Στην αντίθετη περίπτωση εμφανίζεται εκθετικά φθίνον πεδίο που δεν αποτελεί καν κύμα και το οποίο μειώνεται ραγδαία, σε τρόπο ώστε η επίδρασή του να είναι πρακτικά αμελητέα για οποιαδήποτε υπολογίσιμη απόσταση. Τα εν λόγω κύματα ως προς τη μορφή υπάγονται σε κάποιον ή κάποιους από τους ρυθμούς κυματοδότησης. (Ο αναγνώστης ας θυμηθεί εδώ την προηγούμενη παρατήρηση ότι η γενική μορφή των πεδίων στον κυματοδηγό δίνεται από υπέρθεση των ρυθμών TE και TM.)

Το φαινόμενο αυτό αποκαλείται διέγερση του κυματοδηγού (από την πηγή). Με τον όρο διέγερση χαρακτηρίζεται επίσης συχνά και ο ιδιαίτερος τρόπος με τον οποίο η πηγή συζεύγνυται με τον κυματοδηγό για να δημιουργηθούν κύματα σε αυτόν (π.χ. με σύνδεση με ομοαξονική γραμμή και κατάλληλο βύσμα, με μικρό δίπολο ή μικρό βρόχο ρεύματος που ξεκινά από την πηγή και καταλήγει μέσα στον κυματοδηγό κτλ.) Γίνεται επίσης λόγος για διέγερση ρυθμού εννοώντας την εμφάνιση πεδίων που περιέχουν τον ρυθμό. Η γενική κατάσταση μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Όταν μια πηγή συνδεθεί με τον κυματοδηγό, τότε οι ρυθμοί με συχνότητα αποκοπής μικρότερη από αυτή της πηγής (δηλ. όσοι ικανοποιούν τη συνθήκη κυματοδότησης) διεγείρονται και εμφανίζεται οδεύον κύμα που αποτελεί "μίγμα" (υπέρθεση) των ρυθμών αυτών και το οποίο μεταφέρει ενέργεια κατά μήκος του κυματοδηγού. Οι ανώτεροι ρυθμοί (που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη κυματοδότησης), ακόμη και αν διεγερθούν, ενδέχεται το πολύ να δημιουργήσουν εκθετικά φθίνοντα πεδία που αποθηκεύουν κάποια ενέργεια σε περιοχές κοντά στην πηγή αλλά δεν μπορούν να τη μεταφέρουν. Σημασία, λοιπόν, έχουν ως επί το πλείστον οι ρυθμοί με συχνότητα αποκοπής μικρότερη από τη συχνότητα λειτουργίας. Αν αυτοί είναι περισσότεροι από ένας, το ποιο ακριβώς θα διεγερθούν και με ποια ισχύ καθορίζεται από τον τρόπο διέγερσης. Για παράδειγμα, αν η μέθοδος διέγερσης δημιουργεί διάμηκες μαγνητικό πεδίο (συνιστώσα H_z), τότε θα διεγερθούν κυρίως ρυθμοί TE, ενώ αν

δημιουργεί διάμηκες ηλεκτρικό πεδίο (συνιστώσα E_z) θα διεγερθούν κυρίως ρυθμοί TM, πάντα εφόσον αυτό επιτρέπεται από τη συχνότητα λειτουργίας.

2.4.2. Μονορρυθμική λειτουργία

Στις πρακτικές εφαρμογές το υψίσυχο κύμα που μεταφέρει ένας κυματοδηγός σχεδόν ποτέ δεν έχει την απλή μορφή ημιτονοειδούς συνάρτησης (επειδή, όπως προαναφέρθηκε, τέτοιο σήμα δεν μεταφέρει πληροφορία), αλλά είναι διαμορφωμένο με κάποιο τρόπο. Η ανάλυση Fourier αποδεικνύει ότι ένα διαμορφωμένο κύμα αποτελείται από υπέρθεση (είτε με άθροιση είτε με ολοκλήρωση) πολλών απλών ημιτονοειδών κυμάτων διαφόρων συχνοτήτων (τα οποία λέγονται και φασματικές συνιστώσες του κύματος). Με άλλα λόγια, ένα διαμορφωμένο κύμα περιέχει όχι μία και μοναδική συχνότητα (όπως ένα απλό ημιτονοειδές κύμα) αλλά μια ολόκληρη περιοχή συχνοτήτων (το λεγόμενο φάσμα του). Η συγκεκριμένη μορφή του κύματος προσδιορίζεται από την αναλογία των πλατών των επιμέρους φασματικών συνιστωσών και από το συγχρονισμό τους (δηλ. την αναλογία των φάσεών τους). Κατά τη διάδοση του κύματος σε κάποιο μέσο (όπως είναι ο κυματοδηγός), οι εν λόγω φασματικές συνιστώσες υφίστανται τόσο εξασθένηση όσο και καθυστέρηση. Εφόσον όμως η εξασθένηση και η καθυστέρηση αυτή είναι η ίδια για όλες (δηλ. ανεξάρτητη της συχνότητας), τότε η προαναφερθείσα αναλογία πλατών και φάσεων παραμένει η ίδια και μετά τη διέλευση του κύματος από το μέσο διάδοσης. Συνεπώς το κύμα διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση, πράγμα που προφανώς αποτελεί θεμελιώδη επιδίωξη για οποιοδήποτε σύστημα τηλεπικοινωνίας. Ο αναγνώστης παραπέμπεται σχετικά και στις παρατηρήσεις του προηγούμενου κεφαλαίου περί γραμμών μεταφοράς χωρίς παραμόρφωση.

Από την ανωτέρω ανάλυση προκύπτει ότι, αν σε κυματοδηγό διαδίδονται περισσότεροι από ένας ρυθμοί ταυτόχρονα (πολυρρυθμική λειτουργία), τότε η παραμόρφωση του συνολικού κύματος είναι μεγάλη, διότι σύμφωνα με τα πορίσματα των προηγούμενων παραγράφων η ταχύτητα φάσης διαφέρει αισθητά από ρυθμό σε ρυθμό, επομένως αντίστοιχα διαφέρει και η καθυστέρηση των φασματικών συνιστωσών ανάλογα με τον ρυθμό με τον οποίο διαδόθηκαν (καταστρέφεται λοιπόν ο συγχρονισμός τους). Πρόσθετος λόγος παραμόρφωσης είναι το γεγονός ότι και η εξασθένηση διαφέρει αρκετά μεταξύ διαφορετικών ρυθμών.

Για τους λόγους αυτούς, στην πράξη επιδιώκεται πάντοτε η μονορρυθμική λειτουργία ενός κυματοδηγού, δηλ. η διάδοση ενός και μοναδικού ρυθμού. Από τις σχέσεις που δίνουν την ταχύτητα φάσης και ομάδας φαίνεται ότι και τότε θα υπάρχει κάποια παραμόρφωση (διότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση της συχνότητας ακόμη και εντός του ίδιου ρυθμού), η οποία

όμως είναι σαφώς μικρότερη από ό,τι για πολυρρυθμική λειτουργία. Στην πράξη μονορρυθμική λειτουργία μπορεί να συμβεί μόνο στο ρυθμό που εμφανίζεται πρώτος, δηλ. αυτόν με τη χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής, και υπό την προϋπόθεση ότι το φάσμα του μεταδιδόμενου σήματος περιέχεται εξολοκλήρου μεταξύ της πρώτης (χαμηλότερης) και της δεύτερης (αμέσως επόμενης) συχνότητας αποκοπής. Αν η συχνότητα του σήματος υπερβεί τη δεύτερη συχνότητα αποκοπής, θα διεγερθεί και ο δεύτερος ρυθμός μαζί με τον πρώτο, κατά κανόνα όμως όχι ο δεύτερος μόνος του, και ομοίως για τους ακόμη ανώτερους ρυθμούς. Πρέπει βέβαια να σημειωθεί ότι θεωρητικά δεν είναι αδύνατο να επιτευχθεί διέγερση του ανώτερου μόνο ρυθμού χωρίς να συνοδεύεται από τον κατώτερο, στην πράξη όμως είναι πολύ δύσκολη και δεν προσφέρει ιδιαίτερα οφέλη. Κατά συνέπεια, ο κυματοδηγός πρέπει να λειτουργεί στον πρώτο (χαμηλότερο) ρυθμό, που για τον λόγο αυτό ονομάζεται κύριος ή επικρατέστερος, ενώ οι ρυθμοί από τον δεύτερο και άνω έχουν ελάχιστη πρακτική χρησιμότητα.

Όπως έχει ήδη παρατηρηθεί στα προηγούμενα, ο κύριος ρυθμός TE είναι ο TE_{10} , με συχνότητα αποκοπής

$$f_1 = f_{C10} = \frac{c}{2a} \quad (2.4.1)$$

ενώ η αμέσως επόμενη συχνότητα αποκοπής είναι

$$f_2 = \min\{f_{C01}, f_{C20}\} \quad \text{όπου } f_{C01} = \frac{c}{2b}, f_{C20} = \frac{c}{a} \quad (2.4.2)$$

και πιο συγκεκριμένα, αν ισχύει $a < 2b$ τότε $f_2 = f_{C01}$, ενώ αν $a > 2b$ τότε $f_2 = f_{C20}$. Κατά συνέπεια, η περιοχή μονορρυθμικής λειτουργίας του κυματοδηγού είναι η

$$f_1 < f < f_2$$

Από τους ρυθμούς TM, ο κύριος ρυθμός είναι ο TM_{11} , με συχνότητα αποκοπής που δίνεται από την (2.3.9). Σύγκριση της (2.3.9) με την (2.4.2), λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι $a > b$, δείχνει αμέσως ότι η f_{C11} είναι μεγαλύτερη και από την f_{C01} και από την f_{C20} , και άρα ισχύει πάντοτε $f_{C11} > f_2$, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η ανωτέρω περιοχή δεν είναι περιοχή μονορρυθμικής λειτουργίας μόνο σε ό,τι αφορά τους TE ρυθμούς αλλά γενικά ως προς όλους τους ρυθμούς.

Στο γεγονός αυτό οφείλεται η αυξημένη σημασία στην πράξη των TE ρυθμών έναντι των TM, και πιο συγκεκριμένα στο ότι είναι πολύ πιο εύκολο και αξιόπιστο να επιτευχθεί μονορρυθμική λειτουργία με τον ρυθμό TE_{10} . Αντίθετα, η επίτευξη μονορρυθμικής λειτουργίας με τον ρυθμό TM_{11} απαιτεί ειδικής μορφής διέγερση ώστε να μη διεγείρονται

ρυθμοί TE, και έτσι ο ρυθμός αυτός σπάνια χρησιμοποιείται, δεδομένου και ότι οι απώλειες που εμφανίζει είναι μεγαλύτερες.

2.4.3. Ο κύριος ρυθμός TE₁₀

Οι εξισώσεις που διέπουν τον ρυθμό TE₁₀ μπορούν φυσικά να προκύψουν από τις γενικές σχέσεις των ρυθμών TE της παραγράφου 2.2 θέτοντας m = 1 και n = 0, λόγω όμως της ιδιαίτερης σημασίας του παρατίθενται εδώ ξεχωριστά. Με την αντικατάσταση m = 1 και n = 0 προκύπτει καταρχήν από τις (2.2.7) και (2.2.10) ότι οι συνιστώσες E_x και H_y μηδενίζονται. Συνεπώς ο ρυθμός TE₁₀ έχει μόνο τις πεδιακές συνιστώσες E_y, H_x και H_z, για τις οποίες προκύπτουν οι σχέσεις

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp(-j\beta_{10}z) \quad (2.4.3)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp(-j\beta_{10}z) \quad (2.4.4)$$

$$H_x = \frac{j\beta_{10}a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp(-j\beta_{10}z) \quad (2.4.5)$$

όπου η σταθερά διάδοσης, από την (2.2.17) βάσει της (2.4.1), είναι

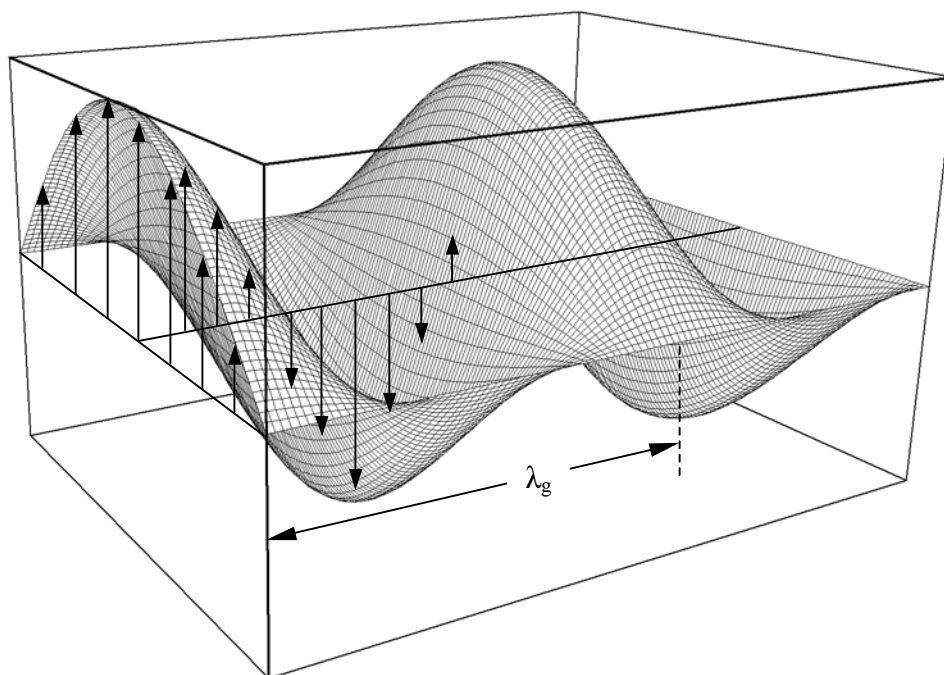
$$\beta_{10} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{f_{C10}}{f} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(\frac{c}{2af} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.4.6)$$

Το μήκος κύματος στον κυματοδηγό, από τις (2.2.20) και (2.4.1), δίνεται από

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.4.7)$$

ενώ ανάλογες σχέσεις προκύπτουν εύκολα και για τις ταχύτητες φάσης και ομάδας.

Από τις ανωτέρω εξ. (2.4.3-5) παρατηρείται ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι γραμμικά πολωμένο παράλληλα με τη μικρή πλευρά του κυματοδηγού, αφού έχει μόνο την E_y συνιστώσα. Πιο συγκεκριμένα, η μορφή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον κυματοδηγό φαίνεται στο Σχ. 2.4 που ακολουθεί, στο οποίο η δισδιάστατη επιφάνεια δείχνει το άκρο του διανύσματος \vec{E} σε κάθε θέση πάνω στο οριζόντιο επίπεδο xz. Πρόκειται βέβαια για ένα στιγμιότυπο του οδεύοντος κύματος στον κυματοδηγό σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή, δηλ. καθώς περνάει ο χρόνος η εικόνα αυτή κινείται προς τα δεξιά (ή προς τα αριστερά) με την ταχύτητα φάσης του κύματος.

Σχ. 2.4: Ηλεκτρικό πεδίο για τον ρυθμό TE₁₀

Η συγκεκριμένη εικόνα του Σχ. 2.4 αναφέρεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο στο μέσο του κυματοδηγού (δηλ. στη θέση $y = b/2$) αλλά είναι ακριβώς η ίδια και σε οποιοδήποτε άλλο οριζόντιο επίπεδο προς τα πάνω ή προς τα κάτω (δηλ. για άλλη τιμή του y) διότι στον συγκεκριμένο ρυθμό το πεδίο δεν μεταβάλλεται με το y . Ενδεικτικά παρουσιάζεται η εγκάρσια (κατά τη διεύθυνση x) μεταβολή του διανύσματος \vec{E} στη θέση $z = 0$, καθώς και η διαμήκης μεταβολή του κατά τη διεύθυνση z στο μέσο του κυματοδηγού (δηλ. στη θέση $x = a/2$). Παρατηρούμε ότι σε κάποια άλλη γραμμή παράλληλη με τον άξονα z (δηλ. για άλλη τιμή του x) το διάνυσμα \vec{E} παρουσιάζει την ίδια ημιτονοειδή μεταβολή αλλά μικρότερο μέγεθος (όπως άλλωστε φαίνεται από την δισδιάστατη επιφάνεια).

Ως εφαρμογή των εν λόγω εξισώσεων δίνουμε τον υπολογισμό των στιγμιαίων τιμών των συνιστωσών του πεδίου στον κυματοδηγό από τους φασιθέτες αυτών, με τη γνωστή μέθοδο πολλαπλασιασμού με τον παράγοντα ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής $\exp(j\omega t)$ και εν συνεχεία λήψης του πραγματικού μέρους. Τα αποτελέσματα, όπου έχει χρησιμοποιηθεί η πολική μορφή $H_0 = |H_0| \exp(j\varphi_0)$, είναι

$$H_z(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[H_z \exp(j\omega t)] = |H_0| \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos(\omega t - \beta_{10} z + \varphi_0) \quad (2.4.8)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{\omega \mu a}{\pi} |H_0| \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta_{10} z + \varphi_0) \quad (2.4.9)$$

$$H_x(x, y, z, t) = -\frac{\beta_{10} a}{\pi} |H_0| \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin(\omega t - \beta_{10} z + \varphi_0) \quad (2.4.10)$$

Ας προσεχθεί ότι τα ανωτέρω προέκυψαν με την προϋπόθεση ότι το μέτρο των φασιθετών είναι το πλάτος ταλάντωσης. Αν όμως οι φασιθέτες ορισθούν βάσει της ενεργού τιμής (δηλ. το μέτρο των φασιθετών ίσο με την ενεργό τιμή του ταλαντούμενου μεγέθους), τότε τα αποτελέσματα θα πρέπει να πολλαπλασιασθούν με $\sqrt{2}$.

Στα τοιχώματα του κυματοδηγού (για την ακρίβεια, στην εσωτερική επιφάνεια των τοιχωμάτων), που έχουν θεωρηθεί απείρως αγωγίμα, αναπτύσσονται επιφανειακά ρεύματα. Η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος σε οποιοδήποτε σημείο των τοιχωμάτων μπορεί να υπολογισθεί από την οριακή συνθήκη

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad J_s = H_t \quad (2.4.11)$$

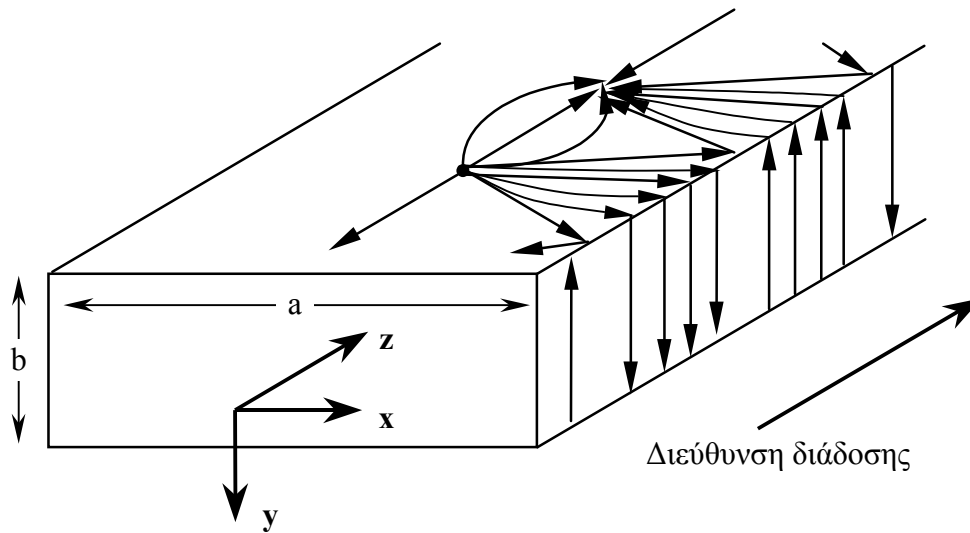
όπου J_s είναι η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος, \hat{n} μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του τοιχώματος και H_t η εφαπτομενική στο τοίχωμα συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Για το τοίχωμα της μικρής πλευράς (που προσδιορίζεται από τις $x = 0$ και $x = a$) είναι $\hat{n} = \hat{x}$ και $H_t = H_z$. Για το τοίχωμα της μεγάλης πλευράς, που προσδιορίζεται από τις $y = 0$ και $y = b$, είναι $\hat{n} = \hat{y}$ ή $\hat{n} = -\hat{y}$ αντίστοιχα, και η H_t προκύπτει με σύνθεση των H_z και H_x , δηλ. $\vec{H}_t = H_x \hat{x} + H_z \hat{z}$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι για τη μεγάλη πλευρά

$$\vec{J}_s = \pm H_0 \exp(-j\beta_{10} z) \left[\cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{x} - \frac{j\beta_{10} a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \hat{z} \right] \quad (2.4.12)$$

και για τη μικρή πλευρά

$$\vec{J}_s = H_0 \exp(-j\beta_{10} z) \hat{y} \quad (2.4.13)$$

ενώ σημειώνεται ότι στην (2.4.12) το πρόσημο \pm αντιστοιχεί στο κάτω ($y = 0$) ή το πάνω ($y = b$) τοίχωμα. Μια ενδεικτική εικόνα της ρευματικής αυτής κατανομής σε κάποια χρονική στιγμή φαίνεται στο Σχ. 2.5. Είναι βέβαια προφανές ότι και η κατανομή αυτή αποτελεί κύμα οδεύον στη διεύθυνση z .



Σχ. 2.5: Επιφανειακά ρεύματα για τον ρυθμό TE₁₀

2.4.4. Ισχύς σε κυματοδηγό – Εξασθένιση

Τα οδεύοντα κύματα που αναπτύσσονται στο εσωτερικό ενός κυματοδηγού μεταφέρουν ισχύ κατά τη διεύθυνση z. Η πυκνότητα ισχύος που μεταφέρεται σε κάθε σημείο δίνεται από τη z συνιστώσα του διανύσματος Poynting (αφού αυτή είναι η διεύθυνση διάδοσης). Το διάνυσμα Poynting δίνεται, ως γνωστόν, από τη γενική σχέση

$$\vec{P}(\vec{r}) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \quad (2.4.14)$$

όπου έχει γίνει η παραδοχή ότι οι φασιθέτες ορίζονται βάσει της ενεργού τιμής (και όχι του πλάτους ταλάντωσης) των πεδίων, και για το λόγο αυτό ο παράγοντας 2 έχει παραλειφθεί από τον παρονομαστή.

Ειδικότερα για τον ρυθμό TE₁₀, το διάνυσμα Poynting έχει μόνο z συνιστώσα και προκύπτει με βάση τις (2.4.4-5) ως εξής

$$\vec{P}(\vec{r}) = P_z(\vec{r}) \hat{z} = -E_y H_x^* \hat{z} = \frac{\omega \mu \beta_{10} a^2}{\pi^2} |H_0|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{z} \quad (2.4.15)$$

Η συνολική ισχύς W που μεταφέρεται με τον συγκεκριμένο ρυθμό υπολογίζεται, κατά τα γνωστά, από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος Poynting πάνω σε κάποια διατομή του κυματοδηγού

$$W = \int_0^a dx \int_0^b dy P_z(\vec{r}) = \frac{\omega \mu \beta_{10} a^2}{\pi^2} |H_0|^2 \frac{ab}{2} \quad (2.4.16)$$

Προφανώς η ισχύς αυτή είναι ανεξάρτητη του z, δηλ. παραμένει σταθερή κατά μήκος του κυματοδηγού. Αυτό βέβαια είναι συνέπεια του γεγονότος ότι, όπως έχει ήδη παρατηρηθεί, όλες οι προηγούμενες εξισώσεις για τους ρυθμούς TE και TM δεν προβλέπουν απόσβεση

των πεδίων στον κυματοδηγό, πράγμα που οφείλεται στο ότι δεν έχουν ληφθεί υπόψη οι απώλειες στα τοιχώματα και ενδεχομένως στο διηλεκτρικό που περιέχει ο κυματοδηγός.

Για να ληφθούν υπόψη με απόλυτη ακρίβεια οι απώλειες αυτές θα έπρεπε να λυθεί εκ νέου από την αρχή το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα με την παραδοχή τοιχωμάτων πεπερασμένης (και όχι άπειρης) αγωγιμότητας και διηλεκτρικού υλικού με μιγαδική διηλεκτρική σταθερά (δηλ. πεπερασμένη και όχι μηδενική αγωγιμότητα). Όπως έχει αναφερθεί, όμως, επειδή στην πράξη οι απώλειες δεν είναι μεγάλες, ισχύει για τα πεδία με πολύ καλή προσέγγιση η λύση που έχει βρεθεί υποθέτοντας μηδενικές απώλειες. Πρακτικά, λοιπόν, ο υπολογισμός των απωλειών ισχύος γίνεται ως εξής: Δεχόμαστε τις τιμές πεδίων που έχουν βρεθεί στα προηγούμενα και από αυτές υπολογίζουμε τα επιφανειακά ρεύματα στα τοιχώματα. Στη συνέχεια εισάγεται η πεπερασμένη αγωγιμότητα των τοιχωμάτων και με βάση αυτή υπολογίζεται η θερμική ισχύς σε αυτά ανά μονάδα μήκους, η οποία αφαιρείται από την κυματική ισχύ που μεταφέρει ο κυματοδηγός, και προκύπτει ο ρυθμός μείωσης (εξασθένησης) της εν λόγω ισχύος κατά μήκος του κυματοδηγού. Η εξασθένηση λόγω απωλειών του διηλεκτρικού υλικού μπορεί να υπολογισθεί με ανάλογο σκεπτικό, αλλά ο τρόπος υπολογισμού είναι απλούστερος διότι αρκεί να αντικατασταθεί η σταθερά ϵ στην (2.2.11) από την αντίστοιχη μιγαδική σταθερά υλικού με αγωγιμότητα. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες προσεγγιστικές εκφράσεις για τους συντελεστές απόσβεσης.

α) Συντελεστής απόσβεσης λόγω απωλειών στα τοιχώματα:

$$\alpha'_{10} = \frac{1}{b} \left(\frac{\omega \mu' \epsilon}{2 \mu \sigma'} \right)^{1/2} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad m = 1, n = 0 \quad (2.4.17)$$

όπου μ' και σ' η μαγνητική διαπερατότητα και η ειδική αγωγιμότητα του μετάλλου των τοιχωμάτων, ενώ ϵ και μ , όπως και στα προηγούμενα, οι σταθερές του διηλεκτρικού υλικού που περιέχει ο κυματοδηγός. Τονίζεται όμως ότι η (2.4.17) ισχύει για τον κύριο ρυθμό TE_{10} , ο οποίος εμφανίζει και τις μικρότερες απώλειες.

β) Συντελεστής απόσβεσης λόγω απωλειών του διηλεκτρικού:

$$\alpha''_{mn} = \frac{\sigma \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.4.18)$$

όπου σ είναι η ειδική αγωγιμότητα του διηλεκτρικού. Η (2.4.18) ισχύει για οποιοδήποτε ρυθμό, ο οποίος υπεισέρχεται στον τύπο διαμέσου της συχνότητας αποκοπής f_{Cmn} .

Εφόσον συνυπάρχουν και οι δύο παραπάνω παράγοντες εξασθένησης σε κυματοδηγό, ο ολικός συντελεστής απόσβεσης προκύπτει με συνδυασμό των επιμέρους

$$\alpha_{mn} = \alpha'_{mn} + \alpha''_{mn} \quad (2.4.19)$$

Τονίζεται ότι ο ανωτέρω είναι ο **συντελεστής απόσβεσης πεδίου** ή **πλάτους**. Όπως και στις γραμμές μεταφοράς, εκφράζει το ρυθμό μείωσης του πλάτους των ταλαντώσεων των ηλεκτρικών πεδίων κατά μήκος του κυματοδηγού, σε μονάδες Np/m. Συνδυάζοντας, σύμφωνα με την (2.1.2), τον συντελεστή απόσβεσης πεδίου α_{mn} με τη σταθερά διάδοσης β_{mn} (που έχει υπολογισθεί στα προηγούμενα), προκύπτει η μιγαδική σταθερά διάδοσης για τον συγκεκριμένο ρυθμό. Εισάγοντας αυτή στις εξισώσεις που δίνουν τα πεδία και λαμβάνοντας μέτρο των μιγαδικών αριθμών προκύπτει π.χ. από την (2.2.6)

$$|H_z| = |H_z(x, y, 0)| \exp(-\alpha_{mn} z) \quad (2.4.20)$$

όπου για συντομία έχει συμβολισθεί με $|H_z(x, y, 0)|$ η έκφραση που δίνει η (2.2.6) για το μέτρο του πεδίου θέτοντας $z = 0$ (δηλ. σε μια διατομή αναφοράς του κυματοδηγού). Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν εύκολα για όλες τις συνιστώσες των πεδίων και δείχνουν ότι τα πλάτη των πεδίων μειώνονται εκθετικά με το z , δικαιολογώντας τον όρο “συντελεστής απόσβεσης πεδίου”. Σε αντιδιαστολή ορίζεται ο **συντελεστής απόσβεσης ισχύος** α_p (ο δείκτης mn έχει παραλειφθεί για απλότητα), ο οποίος εκφράζει το ρυθμό εξασθένησης της ισχύος κατά μήκος του κυματοδηγού, δηλ.

$$W(z_0 + \Delta z) = W(z_0) \exp(-\alpha_p \Delta z) \quad (2.4.21)$$

Επειδή η διαδιδόμενη ισχύς είναι *ανάλογη του τετραγώνου του πεδίου* (βλ. και την (2.4.16) ανωτέρω), προκύπτει αμέσως ότι ο **συντελεστής απόσβεσης ισχύος είναι διπλάσιος από τον συντελεστή απόσβεσης πεδίου**, όπως και στην (1.2.12) για τους συντελεστές απόσβεσης ισχύος και τάσης στις γραμμές μεταφοράς

$$\alpha_p = 2\alpha \quad (2.4.22)$$

Η ανωτέρω σχέση ισχύει προφανώς εφόσον ο συντελεστής απόσβεσης ισχύος έχει εκφρασθεί σε Np/m, συνήθως όμως στην πράξη αυτός εκφράζεται σε dB/m (οπότε συμβολίζεται με A_p). Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$A_p = -\frac{1}{\Delta z} 10 \log \left[\frac{W(z_0 + \Delta z)}{W(z_0)} \right] \quad (2.4.23)$$

ή ισοδύναμα

$$W(z_0 + \Delta z) = W(z_0) 10^{-A_p \Delta z / 10} \quad (2.4.24)$$

Στην πράξη συνήθως ενδιαφέρει ο συντελεστής απόσβεσης ισχύος A_p , ο οποίος προσδιορίζεται πειραματικά. Από αυτόν μπορεί να βρεθεί στη συνέχεια, εφόσον απαιτείται, και ο συντελεστής απόσβεσης πεδίου α . Όπως μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ο αναγνώστης, η σχέση μετατροπής από τον ένα στον άλλο είναι και εδώ η (1.2.16).

2.4.5. Τυποποίηση ορθογωνικών κυματοδηγών

Οι ορθογωνικοί κυματοδηγοί που κατασκευάζονται και χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι τυποποιημένοι σύμφωνα με τις διαστάσεις τους. Η τυποποίηση που θα αναφέρουμε ισχύει για κυματοδηγούς με αέρα, οι οποίοι είναι το συνηθέστερο είδος (εκτός περιπτώσεων ειδικών εφαρμογών), και κατά συνέπεια οι διαστάσεις του κυματοδηγού προσδιορίζουν πλήρως την ωφέλιμη περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας του (η οποία, όπως έχει εξηγηθεί, είναι η περιοχή μονορρυθμικής λειτουργίας). Από τους κατασκευαστές διατίθενται κυματοδηγοί σε συγκεκριμένες διαστάσεις, οι οποίες έχουν γίνει κοινά αποδεκτές με βάση την εμπειρία και έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να καλύπτονται όλες οι περιοχές συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται (και συνήθως υπάρχει αλληλοεπικάλυψη, ώστε μπορούν να βρεθούν παραπάνω από ένας τύποι κυματοδηγών για μια ορισμένη συχνότητα λειτουργίας). Η πιο διαδεδομένη τυποποίηση προέρχεται από τα αμερικανικά στρατιωτικά πρότυπα και χαρακτηρίζει τους κυματοδηγούς με κωδικούς της μορφής WR- x όπου x ένας ακέραιος αριθμός. Ο κωδικός WR αντιστοιχεί στα αρχικά των λέξεων Waveguide και Rectangular, ενώ ο αριθμός x δίνει τη μεγάλη διάσταση a του κυματοδηγού μετρημένη σε εκατοστά της ίντσας. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί η αγγλοσαξωνική μονάδα mil (ή thou) η οποία ισούται με το 1/1000 της ίντσας, δηλ.

$$1 \text{ mil} = 0,001 \text{ in} = 10^{-3} \cdot 2,54 \text{ cm} = 2,54 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,0254 \text{ mm}$$

Για παράδειγμα, ο κυματοδηγός τύπου WR-1150 έχει μεγάλη διάσταση $a = 1150 \cdot 0,01 \text{ in} = 1150 \cdot 10 \text{ mil}$, δηλ. $a = 1150 \cdot 10 \cdot 0,0254 \text{ mm} = 292,1 \text{ mm}$. Η μικρή διάσταση b κατασκευάζεται κοντά στο $\frac{1}{2}$ της μεγάλης. Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τις τυποποιημένες κατηγορίες* κυματοδηγών, με τις εσωτερικές διαστάσεις αυτών, και την τυπική** περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας τους.

* Δεν είναι αυτονόητο ότι όλες αυτές οι κατηγορίες είναι και εμπορικά διαθέσιμες, ενώ στην πράξη κάποιες είναι πιο συνηθισμένες (επειδή συνεργάζονται με τις υπάρχουσες συσκευές). Όπως θα δείτε και στο εργαστήριο, ο τύπος WR-90 είναι από τους πλέον διαδεδομένους.

** Πρόκειται για την περιοχή συχνοτήτων όπου κατά κανόνα χρησιμοποιείται ο κυματοδηγός στην πράξη. Αυτή (όπως εύκολα επαληθεύεται) είναι μέρος της θεωρητικής περιοχής μονορρυθμικής λειτουργίας, αφήνοντας και μια αχρησιμοποίητη περιοχή συχνοτήτων για να διασφαλίζεται η απρόσκοπτη λειτουργία.

Ονομασία	Διαστάσεις a × b (mm × mm)	Περιοχή συχνοτήτων (GHz)
WR-2300	584 × 292	0,32 – 0,49
WR-2100	533 × 267	0,35 – 0,53
WR-1800	457 × 229	0,41 – 0,625
WR-1500	381 × 191	0,49 – 0,75
WR-1150	292 × 146	0,64 – 0,96
WR-975	248 × 124	0,75 – 1,12
WR-770	196 × 98	0,96 – 1,45
WR-650	165 × 83	1,12 – 1,7
WR-510	131 × 65	1,45 – 2,2
WR-430	109 × 55	1,7 – 2,6
WR-340	86 × 43	2,2 – 3,3
WR-284	72 × 34	2,6 – 3,95
WR-229	59 × 29	3,3 – 4,9
WR-187	48 × 22	3,95 – 5,85
WR-159	40 × 20	4,9 – 7,05
WR-137	35 × 16	5,85 – 8,2
WR-112	29 × 13	7,05 – 10
WR-90	23 × 10	8,2 – 12,4
WR-75	19 × 9,5	10 – 15
WR-62	16 × 7,9	12,4 – 18
WR-51	13 × 5,8	15 – 22
WR-42	11 × 4,3	18 – 26,5
WR-34	8,6 × 4,3	22 – 33
WR-28	7,1 × 3,6	26,5 – 40
WR-22	5,7 × 2,9	33 – 50
WR-19	4,8 × 2,4	40 – 60
WR-15	3,8 × 1,9	50 – 75
WR-12	3,1 × 1,6	60 – 90
WR-10	2,4 × 1,3	75 – 110
WR-8	2 × 1	90 – 140
WR-7	1,7 × 0,82	110 – 170
WR-5	1,3 × 0,65	140 – 220
WR-4	1,1 × 0,55	170 – 260
WR-3	0,87 × 0,44	220 – 325

2.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 2.1. Ορθογωνικός κυματοδηγός κενός (ή με αέρα, πράγμα ισοδύναμο) έχει διαστάσεις 6×10 cm. Να βρεθούν: **α)** Οι συχνότητες αποκοπής των ρυθμών TE_{10} , TE_{20} , TM_{01} και TE_{01} . **β)** Η ταχύτητα διάδοσης της φάσης για τους ρυθμούς TE_{10} και TE_{20} στη συχνότητα $f = 1,5 f_{C10}$.

Απάντηση

α) Σύμφωνα με τον συμβολισμό που ακολουθήθηκε σε όλα τα προηγούμενα, ονομάζουμε $a = 10$ cm = 0,1 m και $b = 6$ cm = 0,06 m. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, βάσει της θεωρίας, σε ορθογωνικούς κυματοδηγούς δεν υπάρχουν γενικά ρυθμοί TM_{0n} (ή TM_{m0}), άρα δεν υπάρχει ο TM_{01} . Για τους υπόλοιπους χρησιμοποιούμε την (2.2.16), η οποία λόγω μηδενισμού ενός των m, n παίρνει απλούστερη μορφή και με αριθμητικές αντικαταστάσεις προκύπτουν

$$f_{C10} = \frac{c}{2a} = 1,5 \text{ GHz} \quad f_{C01} = \frac{c}{2b} = 2,5 \text{ GHz} \quad f_{C20} = \frac{c}{a} = 2 f_{C10} = 3 \text{ GHz}$$

όπου η ταχύτητα του φωτός $c = 3 \cdot 10^8$ m επειδή ο κυματοδηγός είναι κενός ή με αέρα.

β) Προφανώς ισχύει πάντοτε $f_{C20} = 2 f_{C10}$, και άρα για τη συχνότητα $f = 1,5 f_{C10}$ ισχύει $f < f_{C20}$ και ο ρυθμός TE_{20} δεν διαδίδεται. Για τον ρυθμό TE_{10} χρησιμοποιούμε την (2.2.22) και με αριθμητική αντικατάσταση παίρνουμε

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_{C10}/f)^2}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}{\sqrt{1 - (1/1,5)^2}} = 4,025 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

Παράδειγμα 2.2. Έστω κυματοδηγός (κενός ή με αέρα) διαστάσεων 2×1 cm. **α)** Να προσδιορισθεί η περιοχή συχνοτήτων για τις οποίες μπορεί να μεταδοθεί μόνο ο ρυθμός TE_{10} . **β)** Αν η συχνότητα λειτουργίας του κυματοδηγού είναι 10 GHz και η ισχύς που μεταφέρεται από αυτόν 1 nW, να βρεθεί η ταχύτητα διάδοσης της φάσης, η μέγιστη ένταση ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον κυματοδηγό και σε ποια σημεία εμφανίζεται.

Απάντηση

α) Είναι $a = 0,02$ m και $b = 0,01$ m. Με αντικατάσταση προκύπτει αμέσως η μικρότερη συχνότητα αποκοπής $f_{C10} = c/2a = 7,5$ GHz. Η αμέσως επόμενη συχνότητα αποκοπής είναι είτε η f_{C01} είτε η f_{C20} , εδώ όμως συμβαίνει να είναι ίσες διότι $a = 2b$, και έχουν την τιμή

$f_{C01} = f_{C20} = 2 f_{C10} = 15 \text{ GHz}$. Επομένως η περιοχή συχνοτήτων μονορρυθμικής λειτουργίας είναι $7,5 \text{ GHz} < f < 15 \text{ GHz}$.

β) Η συχνότητα $f = 10 \text{ GHz}$ βρίσκεται στην ανωτέρω περιοχή μονορρυθμικής λειτουργίας, συνεπώς κυματοδηγείται μόνο ο ρυθμός TE_{10} . Κατά συνέπεια, το ηλεκτρικό πεδίο στον κυματοδηγό έχει μόνο y συνιστώσα που δίνεται από την (2.4.4), η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-j\beta_{10} z) \quad (1)$$

όπου

$$E_0 = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} H_0$$

Εισάγοντας αυτή, η εξ. (2.4.16) για την ισχύ παίρνει τη μορφή

$$P = \frac{\beta_{10}}{\omega\mu} |E_0|^2 \frac{ab}{2} = \frac{|E_0|^2}{Z_{10}} \frac{ab}{2} \quad (2)$$

όπου $Z_{10} = \frac{\omega\mu}{\beta_{10}}$ είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του κυματοδηγού στον ρυθμό TE_{10} .

Η σταθερά διάδοσης β_{10} μπορεί να υπολογισθεί από την (2.2.11) χρησιμοποιώντας τις (2.2.12) και (2.2.14) και θέτοντας $m = 1$ και $n = 0$, οπότε προκύπτει

$$\beta_{10}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

και με αντικατάσταση $\omega = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^9 \text{ rad/sec}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$, $a = 0,02 \text{ m}$ παίρνουμε

$$\beta_{10} \cong 138,53 \text{ rad/m}$$

Προφανώς βέβαια το ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει και από την (2.2.17).

Στη συνέχεια επιλύοντας την (2) ως προς $|E_0|$, αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές και εκτελώντας τις πράξεις παίρνουμε

$$|E_0| = \sqrt{P \frac{\omega\mu}{\beta_{10}} \frac{2}{ab}} \cong 0,0755 \text{ V/m} = 75,5 \text{ mV/m}$$

(όπου έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$).

Όπως έχει σημειωθεί, η εξ. (2.4.16), και κατά συνέπεια η (2) ανωτέρω, προϋποθέτει ορισμό των φασιθετών με βάση την ενεργό τιμή. Επομένως, για να βρεθεί η στιγμιαία τιμή του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει ο φασιθέτης που δίνεται από την (2) να πολλαπλασιασθεί με $\sqrt{2}$ (για να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης), και στη συνέχεια να πολλαπλασιασθεί με

$\exp(j\omega t)$ και να ληφθεί το πραγματικό μέρος. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η στιγμιαία τιμή του πεδίου E_y

$$E_y(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\left[\sqrt{2} E_y e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2}|E_0| \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10}z + \theta_0) \quad (3)$$

όπου $E_0 = |E_0| \exp(j\theta_0)$ είναι η σταθερά E_0 σε πολική μορφή. (Σημείωση: Εξηγήστε πως συμβιβάζεται η σχέση αυτή με την (2.4.9) που έχει προηγηθεί).

Από την παραπάνω σχέση (3) φαίνεται αμέσως ότι η συνιστώσα E_y , και άρα η συνολική ένταση ηλεκτρικού πεδίου, μεγιστοποιείται για $x = a/2$ και για εκείνους τους συνδυασμούς χρονικής στιγμής t και θέσης z για τους οποίους το συνημίτονο της (3) είναι ίσο με 1. Δηλ. η θέση μεγίστου μεταβάλλεται με το χρόνο, αλλά κινείται πάντοτε στο μέσο της μεγάλης πλευράς του κυματοδηγού. Η μέγιστη τιμή του πεδίου είναι $\sqrt{2}|E_0| \cong 0,1068 \text{ V/m} = 106,8 \text{ mV/m}$.

Παράδειγμα 2.3. α) Να προσδιορισθούν οι διαστάσεις κενού ορθογωνικού κυματοδηγού ώστε η περιοχή μονορρυθμικής λειτουργίας του να είναι 5 – 7,5 GHz. β) Αν στον κυματοδηγό αυτό επιβληθεί συχνότητα 12 GHz, ποιοί ρυθμοί διαδίδονται; γ) Θα μπορούσε ο ίδιος κυματοδηγός (δηλ. με τις διαστάσεις που βρέθηκαν προηγουμένως) να λειτουργεί μονορρυθμικά στην περιοχή 2 – 3 GHz, και αν ναι πως;

Απάντηση

α) Προφανώς πρέπει οι δύο χαμηλότερες συχνότητες αποκοπής να είναι 5 και 7,5 GHz. Η μικρότερη συχνότητα αποκοπής είναι πάντοτε η f_{C10} , οπότε θέτοντας $f_{C10} = c_0/2a = 5$ GHz, όπου $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ η γνωστή ταχύτητα του φωτός στο κενό, προκύπτει $a = 0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$.

Η αμέσως επόμενη συχνότητα αποκοπής είναι μία από τις

$$f_{C01} = \frac{c_0}{2b}, \quad f_{C20} = \frac{c_0}{a}$$

Παρατηρούμε όμως ότι $f_{C20} = 10 \text{ GHz}$, επειδή $f_{C20} = 2f_{C10}$, και επομένως θα πρέπει να τεθεί $f_{C01} = c_0/2b = 7,5 \text{ GHz}$, απ' όπου προκύπτει $b = 2 \text{ cm}$.

β) Αν στον κυματοδηγό επιβληθεί συχνότητα 12 GHz (δηλ. αν η πηγή τροφοδοσίας έχει αυτή τη συχνότητα), τότε θα διαδοθούν οι ρυθμοί που έχουν συχνότητα αποκοπής μικρότερη από 12 GHz, δηλ. εκείνοι για τους οποίους ισχύει

$$f_{Cmn} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} < 12 \text{ GHz}$$

απ' όπου με αριθμητικές αντικαταστάσεις $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/sec, $a = 3 \cdot 10^{-2}$ m, $b = 2 \cdot 10^{-2}$ m προκύπτει ισοδύναμα

$$\sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4}} < \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{m^2}{9} + \frac{n^2}{4} < 0,64 \Leftrightarrow 4m^2 + 9n^2 < 23,04$$

Με διαδοχικές δοκιμές βρίσκουμε ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται από τις συχνότητες αποκοπής f_{C10} , f_{C01} , f_{C20} , f_{C11} (πράγμα, άλλωστε, που για τις τρεις πρώτες ήταν ήδη προφανές από το σκέλος (α)). Επομένως οι ρυθμοί που θα διαδοθούν στον κυματοδηγό είναι οι TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} , TE_{11} , TM_{11} (αφού για τους ρυθμούς TM_{mn} πρέπει και οι δύο δείκτες m και n να μην είναι 0).

γ) Για να λειτουργεί ο κυματοδηγός μονορρυθμικά στην περιοχή 2 – 3 GHz με τις ίδιες διαστάσεις, το μόνο που μπορεί να γίνει, όπως δείχνει η (2.2.16), είναι να αλλάξει η τιμή της ταχύτητας του φωτός c . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αλλάζοντας το υλικό που περιέχει ο κυματοδηγός, δηλ. γεμίζοντας το εσωτερικό του με ένα διηλεκτρικό (μονωτικό) υλικό με κάποια σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r , δηλ. με διηλεκτρική επιτρεπτότητα $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. Τα μονωτικά υλικά που διατίθενται στην πράξη έχουν μαγνητική διαπερατότητα μ_0 (ίδια με αυτή του κενού), και επομένως η ταχύτητα του φωτός σε ένα τέτοιο υλικό είναι

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Άρα για τη χαμηλότερη συχνότητα αποκοπής έχουμε τη νέα τιμή

$$f_{C10}' = \frac{c}{2a} = \frac{c_0}{2a\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{f_{C10}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2 \text{ GHz}$$

και δεδομένου ότι $a = 3$ cm και $f_{C10} = c_0/2a = 5$ GHz, παίρνουμε $\epsilon_r = 6,25$.

Με το υλικό αυτό, η αμέσως επόμενη συχνότητα αποκοπής είναι ακριβώς η επιθυμητή $f_{C01}' = 3$ GHz, πράγμα άλλωστε που προκύπτει και από την

$$\frac{f_{C10}'}{f_{C10}} = \frac{f_{C01}'}{f_{C01}}$$

Παρατηρούμε ότι αν με τα ίδια δεδομένα είχε ζητηθεί η μονορρυθμική λειτουργία του κυματοδηγού σε κάποια υποπεριοχή της 2 – 3 GHz, π.χ. στην περιοχή 2 – 2,9 GHz, τότε το πρόβλημα θα είχε λύση, και μάλιστα την ίδια ($\epsilon_r = 6,25$). (Ερώτηση: Θα υπήρχε μήπως και άλλη λύση, και αν ναι ποια;) Αν όμως η επιθυμητή περιοχή εκτεινόταν πέραν των 3 GHz, π.χ. 2 – 3,1 GHz, τότε δεν θα υπήρχε λύση.

Παράδειγμα 2.4. Για έναν ορθογωνικό κυματοδηγό (κενό ή με αέρα) διαστάσεων $a \times b$ με $a > b$ δίνεται ότι το μήκος κύματος μέσα στον κυματοδηγό για συχνότητα λειτουργίας 9 GHz είναι $\lambda_g = 6,03$ cm, καθώς και ότι η συχνότητα αποκοπής του δεύτερου ρυθμού TE είναι 12,5 GHz. Να βρεθούν **α)** η ταχύτητα φάσης, η ταχύτητα ομάδας και η χαρακτηριστική αντίσταση του κυματοδηγού στη συγκεκριμένη συχνότητα λειτουργίας, **β)** οι διαστάσεις του εν λόγω κυματοδηγού, **γ)** η συχνότητα αποκοπής του τρίτου ρυθμού TE.

Απάντηση

α) Το μήκος κύματος εκτός του κυματοδηγού είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^9} = \frac{1}{30} \text{ m} \cong 3,33 \text{ cm}$$

Είναι προφανές ότι στη συχνότητα λειτουργίας 9 GHz κυματοδηγείται ο κύριος ρυθμός TE₁₀ διότι $f = 9 \text{ GHz} < 12,5 \text{ GHz}$, δηλ. στη συχνότητα αυτή δεν διεγείρεται ο δεύτερος ρυθμός (ούτε φυσικά κανένας ανώτερος). Το μήκος κύματος εντός του κυματοδηγού δίνεται από την (2.2.20), από την οποία προκύπτει

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{f_{C10}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{f_{C10}}{f}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\lambda}{\lambda_g} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{6,03 \cdot 10^{-2}} \cong 0,5528$$

Χρησιμοποιώντας την αριθμητική τιμή που βρέθηκε παραπάνω παίρνουμε:

- Για την ταχύτητα φάσης από την (2.2.22)

$$v_p = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{f_{C10}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \cong \frac{3 \cdot 10^8}{0,5528} \cong 5,427 \cdot 10^8$$

- Για την ταχύτητα ομάδας από την (2.2.24)

$$v_g = c \left[1 - \left(\frac{f_{C10}}{f}\right)^2\right]^{1/2} \cong 3 \cdot 10^8 \cdot 0,5528 \cong 1,658 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

- Για την χαρακτηριστική αντίσταση του κυματοδηγού από την (2.2.25) (αντικαθιστώντας την αριθμητική τιμή της κυματικής αντίστασης ελεύθερου χώρου $\zeta \cong 120 \pi$)

$$Z_{10}^{\text{TE}} = \frac{(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}}{\left[1 - \left(\frac{f_{\text{C10}}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \cong \frac{120\pi}{0,5528} \cong 682 \Omega$$

β) Επιλύοντας τη σχέση που δίνει το μήκος κύματος εντός του κυματοδηγού παίρνουμε

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{f_{\text{C10}}}{f}\right)^2\right]^{1/2}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f_{\text{C10}}^2}{f^2} = 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2} \Leftrightarrow f_{\text{C10}} = f \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_g^2}}$$

απ' όπου με αριθμητικές αντικαταστάσεις παίρνουμε $f_{\text{C10}} \cong 7,5 \text{ GHz}$. Επομένως

$$f_{\text{C10}} = \frac{c}{2a} \Rightarrow a = \frac{c}{2f_{\text{C10}}} \cong \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 7,5 \cdot 10^9} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

Για τη διάσταση b παρατηρούμε ότι ο δεύτερος ρυθμός είναι είτε ο TE_{20} είτε ο TE_{01} . Αν όμως ήταν ο TE_{20} θα ήταν

$$f_{\text{C20}} = \frac{c}{a} = 2f_{\text{C10}} \cong 15 \text{ GHz} \neq 12,5 \text{ GHz}$$

πράγμα άτοπο με βάση τα δεδομένα. Άρα πρόκειται για τον TE_{01} , οπότε:

$$f_{\text{C01}} = \frac{c}{2b} = 12,5 \text{ GHz} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_{\text{C01}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 12,5 \cdot 10^9} = \dots = 1,2 \text{ cm}$$

γ) Ο τρίτος ρυθμός είναι είτε ο TE_{20} είτε ο TE_{11} . (Ερώτηση: γιατί είναι βέβαιο ότι δεν είναι ο TE_{02} ;) Έχουμε βρει ήδη ότι

$$f_{\text{C20}} = \frac{c}{a} = 2f_{\text{C10}} \cong 15 \text{ GHz}$$

και με μία ακόμη δοκιμή βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_{\text{C11}} &= \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 1,5 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} + \frac{1}{1,44 \cdot 10^{-4}}} \cong \\ &\cong 1,5 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{0,9444} \cong 1,458 \cdot 10^{10} = 14,58 \text{ GHz} \end{aligned}$$

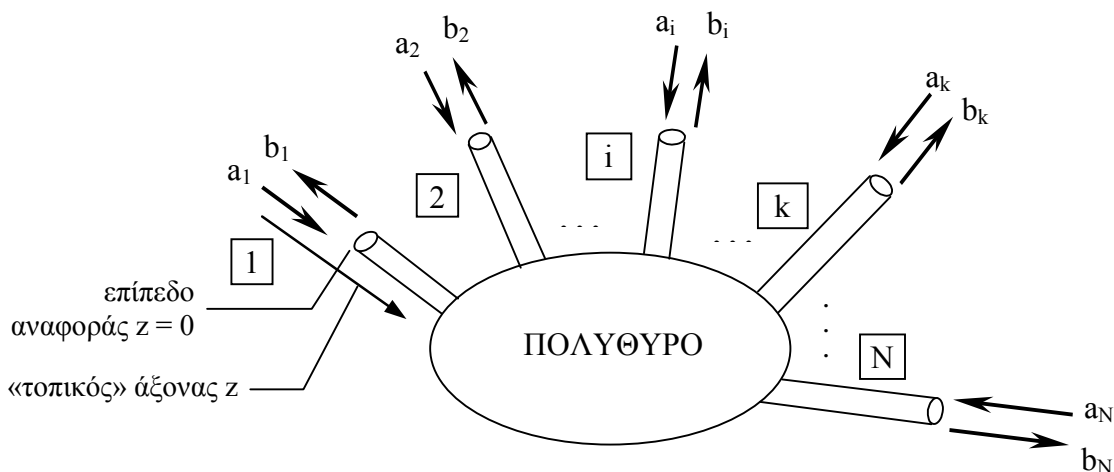
Από τη σύγκριση των δύο παραπάνω τιμών γίνεται προφανές ότι ο τρίτος ρυθμός είναι ο TE_{11} με συχνότητα αποκοπής 14,58 GHz.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

3.1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΟΛΥΘΥΡΩΝ

3.1.1. Εισαγωγικά

Μικροκυματικά πολύθυρα ονομάζονται τα κυκλωματικά στοιχεία τα οποία λειτουργούν σε μικροκυματικές συχνότητες και συνδεσμολογούμενα κατάλληλα σχηματίζουν μικροκυματικά κυκλώματα. Ο όρος «πολύθυρα» οφείλεται στο ότι τα εν λόγω στοιχεία επικοινωνούν (δηλ. ανταλλάσσουν μικροκυματική ισχύ) με τον «έξω κόσμος» δια μέσου συγκεκριμένων σημείων που ονομάζονται **θύρες** και μπορεί να είναι είτε άκρα γραμμής μεταφοράς ή μικροταινίας (πιθανώς με διάφορα είδη συνδετήρων) είτε ανοίγματα κυματοδηγού κατάλληλων διαστάσεων. Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία κυκλωμάτων χαμηλής συχνότητας, τα πολύθυρα έχουν και εκεί αντίστοιχη έννοια, με τη μόνη διαφορά ότι συνήθως δεν είναι απλά κυκλωματικά στοιχεία αλλά ολόκληρα κυκλώματα, ενώ οι θύρες (δηλ. τα σημεία εισόδου ή εξόδου των σημάτων) είναι ζεύγη αγωγών στα οποία εμφανίζονται οι τάσεις και τα ρεύματα εισόδου και εξόδου του κυκλώματος. Στα μικροκυματικά στοιχεία δεν μπορούν (κατά κανόνα) να χρησιμοποιηθούν απλά ζεύγη αγωγών (και τα ίδια τα φυσικά μεγέθη τάσης και έντασης ρεύματος δεν προσφέρονται για τη μελέτη, και συνήθως ούτε καν έχουν σαφή έννοια). Όμως ο φυσικός ρόλος των πολυθύρων είναι αντίστοιχος με την περίπτωση κυκλωμάτων χαμηλής συχνότητας και η μελέτη τους βασίζεται (και πάλι) στη σχέση μεταξύ των σημάτων εισόδου και των σημάτων εξόδου (διέγερσης και απόκρισης όπως είναι γνωστά στη θεωρία συστημάτων). Στο Σχ. 3.1 που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα μικροκυματικό πολύθυρο στην πιο γενική μορφή του, με κάποιον (οποιοδήποτε) αριθμό θυρών (έστω N). Στη γενική περίπτωση από κάθε θύρα είναι δυνατό να εισέρχεται κάποιο κύμα (σήμα εισόδου, ή με ορολογία συστημάτων **διέγερση**) και να εξέρχεται κάποιο άλλο (σήμα εξόδου ή **απόκριση**). Στην πράξη είναι αναμενόμενο κάποιες θύρες να λειτουργούν ως είσοδοι και κάποιες άλλες ως έξοδοι (όχι κατανάγκη πάντοτε οι ίδιες, ανάλογα με τη συνδεσμολογία του πολυθύρου), αλλά αυτό καλύπτεται θέτοντας τα κατάλληλα κύματα ίσα με 0. Κάθε θύρα αριθμείται, όπως φαίνεται στο σχήμα, για να ταυτοποιηθεί (ο τρόπος μπορεί να είναι αυθαίρετος).



Σχ. 3.1: Γενική μορφή μικροκυματικού N-θύρου

Σημειώνουμε επίσης ότι στην παρούσα ενότητα ασχολούμαστε κυρίως με **παθητικά** μικροκυματικά πολύθυρα, δηλ. με πολύθυρα που δεν παράγουν ισχύ, τα οποία μελετώνται με βάση τη θεωρία του πίνακα σκέδασης που ακολουθεί. Τα πολύθυρα που παράγουν ισχύ είναι είτε πηγές είτε ενισχυτές, για τα οποία η θεωρία του πίνακα σκέδασης δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη χρησιμότητα (π.χ. οι μικροκυματικοί ενισχυτές μπορούν να μελετηθούν όπως όλοι οι ενισχυτές με βάση την γνωστή έννοια της απόκρισης συχνότητας). Ορισμένα παραδείγματα μικροκυματικών πηγών παρουσιάζονται σε χωριστή υποενότητα του παρόντος κεφαλαίου.

3.1.2. Κανονικοποιημένες κυματικές τάσεις

Όπως είναι γνωστό, στην περιοχή των μικροκυματικών συχνοτήτων η τάση (διαφορά δυναμικού ή ΗΕΔ) και η ένταση ρεύματος κατά κανόνα δεν είναι χρήσιμα μεγέθη για τη μελέτη. Π.χ. σε ένα άνοιγμα κυματοδηγού δεν είναι σαφές μεταξύ ποιων σημείων θα οριζόταν η τάση, αλλά και αν ληφθούν δύο σημεία αυθαίρετα δεν ισχύει μεταξύ αυτών η διατηρητικότητα του πεδίου που είναι προϋπόθεση για τον μονοσήμαντο ορισμό της τάσης, ενώ επίσης το συνολικό ρεύμα στα τοιχώματα του κυματοδηγού είναι μηδενικό. Για το λόγο αυτό ορίζεται το φυσικό μέγεθος που ονομάζεται **κανονικοποιημένη κυματική τάση** για να περιγραφούν τα κύματα εισόδου και εξόδου στο πολύθυρο. Χρησιμοποιείται εδώ ο συμβολισμός a_i για την κανονικοποιημένη κυματική τάση του κύματος εισόδου και b_i του κύματος εξόδου της τυχούσας θύρας $\#i$, τονίζοντας ότι και τα δύο σύμβολα αναφέρονται στο ίδιο φυσικό μέγεθος.

Στη θεωρία των μικροκυματικών κυκλωμάτων, η κανονικοποιημένη κυματική τάση στη θύρα $\#i$ (ενδεικτικά για το εισερχόμενο κύμα) ορίζεται από τη σχέση

$$a_i = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right]^{1/2} \quad (3.1.1)$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κυματοδηγούμενα κύματα σε γραμμή μεταφοράς ή μικροταινία ή κυματοδηγό (ό,τι από αυτά αποτελεί τη συγκεκριμένη θύρα), δηλ. κύματα τα οποία ακολουθούν τις εξ. (2.1.1α – β), και πάνω σε ένα επίπεδο αναφοράς $z = 0$ που ορίζεται αυθαίρετα (θα μπορούσε να είναι το φυσικό επίπεδο όπου βρίσκεται η συγκεκριμένη θύρα, π.χ. άκρο γραμμής ή άνοιγμα κυματοδηγού, ή το επίπεδο στο οποίο η γραμμή ή ο κυματοδηγός ενώνεται με το πολύθυρο κτλ.). Για να ορίσουμε το επίπεδο αναφοράς έχουμε θεωρήσει έναν «τοπικό» άξονα z για τη συγκεκριμένη θύρα, πάνω στον οποίο γίνεται η κυματοδότηση και ο οποίος δεν είναι άλλος από τον φυσικό άξονα της γραμμής μεταφοράς ή μικροταινίας ή κυματοδηγού που αποτελεί τη θύρα αυτή. Το διπλό ολοκλήρωμα λαμβάνεται πάνω στο επίπεδο αναφοράς, τα πεδία E και H αντιστοιχούν στο κύμα που εισέρχεται στο πολύθυρο και S είναι το εμβαδόν της θύρας πάνω στο επίπεδο αναφοράς. Κατά συνέπεια το στοιχειώδες εμβαδό dS (ως διάνυσμα) έχει, κατά τα γνωστά, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο αναφοράς, η οποία είναι και η διεύθυνση διάδοσης του κύματος στη θύρα, ενώ η φορά του λαμβάνεται από έξω προς τα μέσα (προς το εσωτερικό του πολυθύρου). Τα διανύσματα E και H του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου παριστάνονται, ως συνήθως, με μιγαδικούς αριθμούς (phasors) διότι προϋποτίθεται ότι τα πεδία μεταβάλλονται ημιτονοειδώς, και ο αστερίσκος (*) δηλώνει το μιγαδικό συζυγές. Είναι φανερό ότι ο παραπάνω ορισμός έχει στενή συνάφεια με το διάνυσμα Poynting που εκφράζει την πυκνότητα ισχύος που μεταφέρει το κύμα. Πιο συγκεκριμένα, ο ορισμός (3.1.1) υποδηλώνει ένα πραγματικό μέγεθος (προσέξτε τον τελεστή Re) το οποίο ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ισχύος* που διέρχεται από τη γραμμή μεταφοράς ή τον κυματοδηγό σε ένα ορισμένο επίπεδο το οποίο (αυθαίρετα, δηλ. κατά σύμβαση) έχουμε επιλέξει ως επίπεδο αναφοράς $z = 0$.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις της κυματοδότησης (2.1.1α – β) οι οποίες, όπως είπαμε, αποτελούν προϋπόθεση του ορισμού της κανονικοποιημένης κυματικής τάσης, ο ορισμός (3.1.1) γενικεύεται ώστε να ισχύει όχι μόνο πάνω στο επίπεδο αναφοράς αλλά σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα z (κατά μήκος της γραμμής μεταφοράς ή του κυματοδηγού της συγκεκριμένης θύρας). Η ιδέα είναι ότι η τιμή της κανονικοποιημένης κυματικής τάσης σε οποιοδήποτε άλλο σημείο z προκύπτει με «κυματοδότηση» της τιμής της στη θέση αναφοράς $z = 0$, ως εξής:

* Υπενθυμίζουμε ότι η ισχύς αυτή δίνεται με τη βοήθεια του διανύσματος Poynting.

$$a_i(z) = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{S} \right]^{1/2} e^{-\gamma z} = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \cdot d\vec{S} \right]^{1/2} e^{-\alpha z - j\beta z} \quad (3.1.2)$$

όπου τα (βοηθητικά) τονούμενα μεγέθη E' και H' είναι οι εκφράσεις που δίνουν τα εξάρτηση των ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία πάνω στο επίπεδο $z = 0$, και προφανώς εξαρτώνται μόνο από τις εγκάρσιες συνιστώσες (x,y) . Με τον συμβολισμό αυτό, εύκολα διαπιστώνουμε ότι θέτοντας $z = 0$ η (3.1.2) ανάγεται στην (3.1.1), και άρα για άλλο z αποτελεί γενίκευση αυτής. Η γενίκευση αυτή καθίσταται δυνατή επειδή η εξάρτηση από z θεωρείται δεδομένη στη μορφή που δίνεται από τις εξισώσεις κυματοδότησης. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, εφόσον η θύρα #1 αποτελείται από κυματοδηγό, η (3.1.2) ισχύει για κύμα ενός συγκεκριμένου ρυθμού (αλλιώς δεν θα υπήρχε μονοσήμαντη τιμή της μιγαδικής σταθεράς διάδοσης γ), δηλ. προϋποθέτει μονορρυθμική διάδοση στον κυματοδηγό, πράγμα που μπορεί να θεωρηθεί δεδομένο διότι όπως γνωρίζουμε αυτή είναι η κατάσταση λειτουργίας που χρησιμοποιείται πάντοτε στην πράξη. Σημειώνουμε ότι η (3.1.2) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$a_i(z) = a_i(0) e^{-\gamma z} = a_i(0) e^{-\alpha z - j\beta z} \quad (3.1.3)$$

όπου η τιμή $a_i(0)$ είναι αυτή που δίνεται από την (3.1.1)

Για το εξερχόμενο κύμα ισχύει ακριβώς ο ίδιος ορισμός (3.1.1) και γενικότερα (3.1.2), με τη διαφορά ότι τα πεδία E και H (όπως και τα E' και H') αντιστοιχούν στο εξερχόμενο κύμα και η φορά του στοιχειώδους εμβαδού dS λαμβάνεται προς τα έξω, ενώ στην (3.1.2) θα πρέπει να γραφεί $e^{+\gamma z}$ αντί $e^{-\gamma z}$.

Η (3.1.2), ή ισοδύναμα η (3.1.3), ορίζει την κανονικοποιημένη κυματική τάση ως μία μιγαδική ποσότητα (phasor) η οποία αντιστοιχεί σε ένα κυμαινόμενο μέγεθος που διαδίδεται κατά τον άξονα z με τον γνωστό τρόπο της διάδοσης κυμάτων σε γραμμές μεταφοράς ή κυματοδηγούς. Για τη μελέτη του πολυθύρου μπορούμε να λάβουμε την τιμή της σε οποιοδήποτε επίπεδο θέλουμε (όχι μόνο στο επίπεδο $z = 0$), το οποίο μπορούμε να ορίσουμε ως νέο επίπεδο αναφοράς. Στα επόμενα θα γράφουμε απλώς a_i ή b_i και θα εννοούμε την τιμή της κανονικοποιημένης κυματικής τάσης του εισερχόμενου ή του εξερχόμενου κύματος στο επίπεδο αναφοράς της αρεσκείας μας. Από την (3.1.2) ή (3.1.3) παρατηρούμε ότι η αλλαγή του επιπέδου αναφοράς, π.χ. από $z = 0$ σε $z = z_1$, ουσιαστικά εκφράζει μια στροφή φάσης της κανονικοποιημένης κυματικής τάσης κατά $\exp(-j\beta z_1)$ για εισερχόμενο κύμα ή κατά $\exp(+j\beta z_1)$ για εξερχόμενο κύμα. Αυτό ισχύει στην (πολύ συνηθισμένη) περίπτωση όπου οι απώλειες στη γραμμή μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες, ενώ αν υπάρχουν και απώλειες εμφανίζεται εκτός από τη στροφή φάσης και αλλαγή του μέτρου.

Από τα προηγούμενα απορρέει η φυσική ερμηνεία της κανονικοποιημένης κυματικής τάσης, η οποία προσφέρεται καλύτερα για την πρακτική χρήση της. Γράφοντας την κανονικοποιημένη κυματική τάση στην πολική μορφή μιγαδικού

$$a_i = |a_i| \exp(j\varphi_i) \quad , \quad b_i = |b_i| \exp(j\theta_i) \quad (3.1.4)$$

παρατηρούμε ότι το όρισμα (φ_i ή θ_i) είναι η σταθερά φάσης του κύματος πάνω στο επίπεδο αναφοράς, ενώ το μέτρο συνδέεται στενά με την ισχύ που μεταφέρει το κύμα ως εξής

$$|a_i| = \sqrt{W_{i, \text{in}}} \quad , \quad |b_i| = \sqrt{W_{i, \text{out}}} \quad (3.1.5)$$

όπου $W_{i, \text{in}}$ και $W_{i, \text{out}}$ είναι αντίστοιχα η εισερχόμενη και η εξερχόμενη ισχύς διαμέσου της θύρας #i.

Σημειώνουμε ότι για την περιγραφή των εισερχόμενων και εξερχόμενων κυμάτων μπορούν να ορισθούν και άλλα παραπλήσια μεγέθη (τα οποία προσομοιάζουν στην τάση και στην ένταση), όμως η κανονικοποιημένη κυματική τάση είναι ίσως το επικρατέστερο και το πιο εύχρηστο για τους σκοπούς της παρούσας προσέγγισης.

3.1.3. Οι παράμετροι σκέδασης

Όπως τονίσθηκε παραπάνω, αυτό που πραγματικά χρειάζεται να ξέρουμε για ένα μικροκυματικό πολύθυρο είναι η σχέση ανάμεσα στα κύματα εισόδου και εξόδου, δηλαδή η σχέση που συνδέει τα a_i με τα b_i . Πρέπει να επισημανθεί εδώ ότι τα a_i (όλα μαζί) είναι το αίτιο και τα b_i (όλα μαζί) το αποτέλεσμα (υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι το πολύθυρο δεν περιέχει πηγή κυμάτων). Θα πρέπει να τονισθεί ότι κατά κανόνα όλα μαζί τα a_i (ή έστω πολλά από αυτά και όχι ένα μόνο) δημιουργούν καθένα από τα b_i (κάθε b_i είναι αποτέλεσμα πολλών συνυπαρχόντων αιτιών και όχι μόνο ενός). Ανάλογα με την κατασκευή του πολυθύρου κάθε εισερχόμενο κύμα a_k από κάποια θύρα #k μπορεί να συνεισφέρει σε περισσότερα εξερχόμενα κύματα b_i διάφορων θυρών #i, μη εξαιρουμένης και της ίδιας της θύρας #k διότι ένα τμήμα του κύματος μπορεί να ανακλασθεί προς τα πίσω και να ξαναβγει από την ίδια θύρα (μπορούμε να σκεπτόμαστε ότι το εισερχόμενο κύμα a_k στο πολύθυρο «υποδιαιρείται» σε περισσότερα «τμήματα» από τα οποία καθένα εξέρχεται από άλλη θύρα #i).

Για να προσδιορισθεί η εν λόγω σχέση εισόδου – εξόδου, ορίζονται οι λεγόμενες παράμετροι σκέδασης (ή συντελεστές σκέδασης) του πολυθύρου S_{ik} ως εξής

$$S_{ik} = \left. \frac{b_i}{a_k} \right|_{a_n=0 \quad \forall n \neq k} \quad (3.1.6)$$

Όπως φαίνεται από τον ορισμό, ο κάθε συντελεστής S_{ik} εκφράζει το κύμα b_i που εμφανίζεται στη θύρα #i ως αποτέλεσμα του κύματος a_k που εισήλθε από τη θύρα #k και

μόνο αυτού διότι τα άλλα πιθανά αίτια (εισερχόμενα κύματα) έχουν εξαναγκασθεί να είναι 0. Ορίζεται, λοιπόν, ο συντελεστής S_{ik} έτσι ώστε να απομονώνει την επίδραση μίας θύρας σε μία άλλη. Για να το επιτύχουμε αυτό στην πράξη θα έπρεπε όχι απλώς όλες οι άλλες θύρες του πολυθύρου πλην της θύρας #k να μην συνδέονται με πηγές, αλλά και να συνδεθούν σε αυτές προσαρμοσμένα φορτία (δηλ. ίσα με την χαρακτηριστική αντίσταση του τμήματος κυματοδηγού ή γραμμής μεταφοράς που αποτελεί την κάθε θύρα), ώστε τα τυχόν εξερχόμενα κύματα από αυτές να μην ανακλώνται και επιστρέφουν στο πολύθυρο διότι τότε θα έπαιζαν τον ρόλο (δευτερογενών) εισερχόμενων κυμάτων και θα παραβιάζονταν οι προϋποθέσεις του ορισμού (3.1.6). Η παρατήρηση αυτή, πάντως, έχει κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον, επειδή για την πρακτική μέτρηση του S_{ik} δεν χρησιμοποιείται ο ορισμός. Από την (3.1.6) παρατηρούμε επίσης, εφόσον το πολύθυρο είναι παθητικό, ότι το μέτρο του συντελεστή σκέδασης δεν μπορεί να υπερβαίνει τη μονάδα (δηλ. δεν μπορεί να εξέρχεται περισσότερη ισχύς από όση εισήλθε):

$$0 \leq |S_{ik}| \leq 1$$

Όπως είναι ευνόητο, ορίζεται ένας συντελεστής για κάθε διατεταγμένο ζεύγος θυρών (i,k), συμπεριλαμβανομένων και των ζευγών της μορφής (i,i), και κατά συνέπεια οι συντελεστές σκέδασης ενός N-θύρου είναι συνολικά N^2 το πλήθος. Ειδικότερα για $i = k$ ο συντελεστής S_{ii} ονομάζεται **συντελεστής ανάκλασης** επειδή αντιστοιχεί στο τμήμα του κύματος εισόδου που ανακλάται και επιστρέφει από την ίδια θύρα, ενώ για $i \neq k$ ο συντελεστής S_{ik} ονομάζεται **συντελεστής διέλευσης** επειδή αντιστοιχεί στο τμήμα του κύματος εισόδου που από τη θύρα #k περνά στη θύρα #i. Ο συντελεστής διέλευσης (για την ακρίβεια το μέτρο $|S_{ik}|$) είναι μέτρο της σύζευξης μεταξύ των δύο θυρών, δηλ. εκφράζει το κατά πόσον οι θύρες είναι (όπως λέμε) ισχυρά ή ασθενώς συζευγμένες μεταξύ τους. **Ισχυρή σύζευξη** σημαίνει ότι η μία θύρα έχει μεγάλη επίδραση στην άλλη (μεγάλο τμήμα του σήματος εισόδου της μίας θύρας περνά στην άλλη), ενώ **ασθενής σύζευξη** το αντίθετο. Ειδικότερα αν $S_{ik} = 0$, τότε λέμε ότι οι δύο θύρες είναι **ασύζευκτες**, δηλ. δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους (ενώ το άλλο άκρο είναι η περίπτωση της μέγιστης τιμής $|S_{ik}| = 1$, οπότε το σύνολο του σήματος εισόδου της θύρας #k περνά στη θύρα #i). Σημειώνουμε επίσης ότι όταν ο συντελεστής ανάκλασης μιας θύρας είναι μηδενικός ($S_{ii} = 0$), η θύρα αυτή ονομάζεται **προσαρμοσμένη** (κατ' αναλογία προς την προσαρμοσμένη γραμμή μεταφοράς η οποία δεν έχει ανακλάσεις).

Επανερχόμαστε προς στιγμήν στον γενικευμένο ορισμό (3.1.2) ή (3.1.3) των κανονικοποιημένων μικροκυματικών τάσεων, ο οποίος μας οδήγησε στην παρατήρηση ότι η αλλαγή του επιπέδου αναφοράς μεταφράζεται σε μια στροφή φάσης του μιγαδικού μεγέθους a_i ή b_i . Αν θεωρήσουμε ότι τα επίπεδα αναφοράς στις θύρες #i και #k του

ορισμού μετατοπίζονται σε νέες θέσεις z_i και z_k αντίστοιχα, και εφαρμόσουμε την παρατήρηση αυτή στον ορισμό (3.1.6) των παραμέτρων σκέδασης, αυτός γράφεται

$$S'_{ik} = \left. \frac{b_i e^{j\beta z_i}}{a_k e^{-j\beta z_k}} \right|_{a_n=0 \forall n \neq k} = S_{ik} e^{j\beta(z_i - z_k)}$$

όπου η τονούμενη τιμή είναι η νέα τιμή της παραμέτρου σκέδασης και η άτονη είναι η αρχική τιμή της (πριν την αλλαγή των επιπέδων αναφοράς). Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι με αλλαγή των επιπέδων αναφοράς στις θύρες του πολυθύρου μπορεί να προκύψει οποιαδήποτε στροφή φάσης στις τιμές των παραμέτρων σκέδασης*.

Με τη βοήθεια των συντελεστών σκέδασης που εκφράζουν τη σχέση μεταξύ δύο θυρών μπορεί να βρεθεί η επιθυμητή γενική σχέση μεταξύ όλων των θυρών με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας. Ας υποθεθεί προς στιγμήν ότι υπάρχει μόνο ένα εισερχόμενο κύμα, π.χ. το a_1 (από τη θύρα #1) και όλα τα άλλα a_k έχουν μηδενισθεί. Τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του ανωτέρω ορισμού και μπορεί αυτός να εφαρμοσθεί για όλες τις θύρες δίνοντας

$$b_1 = S_{11} a_1$$

$$b_2 = S_{21} a_1$$

...

$$b_N = S_{N1} a_1$$

Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό για μοναδικό εισερχόμενο κύμα το a_2 , το a_3 κ.ο.κ., παίρνουμε τα ακόλουθα σύνολα εξισώσεων για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις:

(μόνο a_1)	(μόνο a_2)	(μόνο a_N)
$b_1 = S_{11} a_1$,	$b_1 = S_{12} a_2$, ... ,	$b_1 = S_{1N} a_N$
$b_2 = S_{21} a_1$,	$b_2 = S_{22} a_2$, ... ,	$b_2 = S_{2N} a_N$
	...	
$b_N = S_{N1} a_1$,	$b_N = S_{N2} a_2$, ... ,	$b_N = S_{NN} a_N$

Εφόσον το πολύθυρο έχει κατασκευασθεί αποκλειστικά από γραμμικά στοιχεία (κατά κανόνα έχει), τότε είναι γραμμικό σύστημα και ισχύει η αρχή της επαλληλίας (υπέρθησης), η οποία λέει ότι προστιθεμένων των αιτίων προστίθενται και τα αποτελέσματα, δηλ. αν επενεργήσουν διάφορα αίτια από κοινού τότε το συνολικό αποτέλεσμα θα είναι το άθροισμα των επιμέρους αποτελεσμάτων που θα προκαλούνταν αν επενεργούσαν

* Δεν σημαίνει βέβαια ότι μπορεί να επιτευχθεί αυθαίρετη στροφή φάσης σε όλες τις παραμέτρους σκέδασης συγχρόνως, καθώς η στροφή φάσης ρυθμίζεται από τους N συντελεστές z_1, z_2, \dots, z_N , ενώ οι παράμετροι σκέδασης είναι N^2 το πλήθος.

χωριστά. Κατά συνέπεια, για να υπολογισθούν τα κύματα εξόδου στη γενικότερη δυνατή περίπτωση που συνυπάρχουν όλα τα κύματα εισόδου αρκεί να προστεθούν όλες οι ανωτέρω σχέσεις. Το τελικό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + \dots + S_{1N} a_N \\ b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + \dots + S_{2N} a_N \\ &\dots \\ b_N &= S_{N1} a_1 + S_{N2} a_2 + \dots + S_{NN} a_N \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

το οποίο εκφράζει το σύνολο των κυμάτων εξόδου συναρτήσει του συνόλου των κυμάτων εισόδου, και προφανώς μπορεί να γραφεί και σε μορφή πινάκων

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{S}][\mathbf{a}] \quad (3.1.8)$$

όπου

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{1N} \\ \dots & & \dots \\ S_{N1} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

Ο πίνακας $[\mathbf{S}]$ λέγεται **πίνακας σκέδασης** ή **μήτρα σκέδασης** (scattering matrix) του πολυθύρου και, όπως έχει προαναφερθεί, χρησιμεύει για την τυποποιημένη περιγραφή της συμπεριφοράς και των ιδιοτήτων του πολυθύρου.

Τέλος, θα πρέπει να τονισθεί ότι η προηγούμενη μελέτη έχει βασισθεί στην παραδοχή ότι όλα τα πεδία μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με μια ορισμένη συχνότητα (δηλ. βρισκόμαστε στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση), πράγμα άλλωστε που αποτελεί την προϋπόθεση για τη χρήση μιγαδικών αριθμών (phasors). Αν επαναληφθεί η διαδικασία για άλλη συχνότητα, θα προκύψουν τα ίδια συμπεράσματα αλλά με άλλες αριθμητικές τιμές των συντελεστών. Δηλ. οι παράμετροι σκέδασης των μικροκυματικών πολυθύρων είναι συναρτήσεις της συχνότητας. Η ιδιότητα αυτή τονίζει την αναλογία (που θα παρατήρησε ήδη ο προσεκτικός αναγνώστης) ανάμεσα στη μήτρα σκέδασης πολυθύρου και την απόκριση συχνότητας συστήματος (ή τη συνάρτηση μεταφοράς της θεωρίας συστημάτων). Με ορολογία θεωρίας συστημάτων θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο πίνακας σκέδασης αντιστοιχεί στον πίνακα συναρτήσεων μεταφοράς ενός πολυδιάστατου συστήματος (πολλών εισόδων – πολλών εξόδων).

3.1.4. Ο πίνακας σκέδασης σε ειδικές κατηγορίες πολυθύρων

Αμφίδρομα πολύθυρα

Όταν το πολύθυρο περιέχει μόνο ιστροπικά υλικά (πράγμα που συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις, αν και όχι σε όλες)*, τότε ο πίνακας είναι συμμετρικός, δηλ. ισχύει

$$S_{ik} = S_{ki} \quad \forall i, k \quad (3.1.10)$$

και με συμβολισμό πινάκων

$$S^T = S \quad (3.1.11)$$

(όπου ο άνω δείκτης T δηλώνει, κατά τα γνωστά, τον ανάστροφο πίνακα ο οποίος προκύπτει με μετατροπή των γραμμών σε στήλες).

Στην περίπτωση αυτή το πολύθυρο λέγεται **αμφίδρομο**. Η ιδιότητα αυτή είναι χρήσιμη στην πράξη και απλοποιεί τη μελέτη του πολυθύρου. Είναι προφανές ότι σε αμφίδρομα πολύθυρα απαιτείται η γνώση λιγότερων συντελεστών σκέδασης από ό,τι σε μη αμφίδρομα. Πιο συγκεκριμένα, για τον πλήρη προσδιορισμό της μήτρας σκέδασης (και άρα την πλήρη γνώση της συμπεριφοράς του πολυθύρου) χρειάζονται τα N διαγώνια στοιχεία της μήτρας και το 1/2 των υπόλοιπων (N² - N) μη διαγώνιων, ήτοι συνολικά $\frac{N}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$ στοιχεία.

Πολύθυρα χωρίς απώλειες

Πολύθυρα χωρίς απώλειες είναι αυτά στα οποία δεν καταναλώνεται μικροκυματική ισχύς. Στην πράξη, βέβαια, όλα τα πολύθυρα έχουν κάποιες απώλειες, πολύ συχνά όμως αυτές είναι τόσο μικρές ώστε μπορούν με καλή προσέγγιση να αγνοηθούν. Θεωρώντας επίσης ότι τα εν λόγω πολύθυρα δεν παράγουν μικροκυματική ισχύ (είναι παθητικά, όπως προαναφέρθηκε), αυτό σημαίνει ότι η συνολική εισερχόμενη ισχύς είναι ίση με τη συνολική εξερχόμενη ισχύ, ή με άλλα λόγια σε ένα τέτοιο πολύθυρο ισχύει η διατήρηση της μικροκυματικής ενέργειας. Βάσει της (3.1.4), η οποία απορρέει από τον ορισμό των κανονικοποιημένων κυματικών τάσεων, η διατήρηση της μικροκυματικής ενέργειας διατυπώνεται ως εξής:

$$\sum_{m=1}^N |a_m|^2 = \sum_{m=1}^N |b_m|^2 \quad (3.1.12)$$

* Στην πράξη τα μη αμφίδρομα πολύθυρα περιέχουν κατά κανόνα είτε φερρίτες είτε πλάσμα.

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων, δηλ. εκφράζοντας το σύνολο των κανονικοποιημένων κυματικών τάσεων σε όλες τις θύρες με τα διανύσματα στήλης [a] και [b] όπως στην (3.1.9), η συνθήκη (3.1.12) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* & b_2^* & \dots & b_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{bmatrix}$$

δηλαδή

$$[a^*]^T [a] = [b^*]^T [b] \quad (3.1.13)$$

όπου, ως γνωστόν, ο αστερίσκος (*) δηλώνει το μιγαδικό συζυγές και ο άνω δείκτης T τον ανάστροφο πίνακα. Εισάγοντας την (3.1.8) παίρνουμε

$$[a^*]^T [a] = [a^*]^T [S^*]^T [S][a] \Leftrightarrow [a^*]^T \left([S^*]^T [S] - [I] \right) [a] = 0$$

όπου [I] ο μοναδιαίος πίνακας.

Για να ισχύει η δεύτερη των ανωτέρω ταυτοτικά, δηλ. για οποιαδήποτε διέγερση [a], πρέπει και αρκεί ο πίνακας μέσα στην παρένθεση να είναι μηδενικός, δηλ.

$$[S^*]^T [S] = [I] \quad (3.1.14)$$

ή ισοδύναμα

$$[S^*]^T = [S]^{-1}$$

Εκτελώντας τις πράξεις πινάκων ανά γραμμές και στήλες, η (3.1.14) γράφεται επίσης

$$\sum_{i=1}^N S_{im}^* S_{in} = \delta_{mn} \quad (3.1.15)$$

όπου το σύμβολο δ_{mn} (ονομαζόμενο δέλτα του Kronecker) είναι ίσο με 1 εφόσον $m = n$ και με 0 εφόσον $m \neq n$.

Αναλυτικά η (3.1.14) δίνει N^2 συνθήκες για τις παραμέτρους σκέδασης, μία για κάθε στοιχείο του πίνακα, ως εξής (η (3.1.15) δεν είναι τίποτε άλλο παρά το σύνολο των σχέσεων αυτών σε συνεπτυγμένη μορφή):

$$|S_{1m}|^2 + |S_{2m}|^2 + \dots + |S_{Nm}|^2 = 1 \quad , \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.1.16)$$

$$S_{1m}^* S_{1n} + S_{2m}^* S_{2n} + \dots + S_{Nm}^* S_{Nn} = 0 \quad , \quad m \neq n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.1.17)$$

Οι συνθήκες αυτές διευκολύνουν αρκετά τον προσδιορισμό των συντελεστών σκέδασης (αφού ουσιαστικά μειώνουν τον αριθμό των στοιχείων που πρέπει να προσδιορισθούν) προκειμένου για πολύθυρα χωρίς απώλειες, ενώ στη συνηθισμένη περίπτωση που το πολύθυρο είναι συγχρόνως και αμφίδρομο η διευκόλυνση είναι ακόμη μεγαλύτερη.

Εφαρμογή: Αμφίδρομο δίθυρο χωρίς απώλειες

Στην ενδιαφέρουσα περίπτωση ενός διθύρου που είναι αμφίδρομο και χωρίς απώλειες, με βάση την αμφιδρομικότητα η μήτρα σκέδασης γράφεται

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη συνθήκη (3.1.14)

$$[S^*]^T [S] = \begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

η οποία αναλύεται στις ακόλουθες επιμέρους σχέσεις*

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \quad (3.1.18\alpha)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \quad (3.1.18\beta)$$

$$S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0 \quad (3.1.18\gamma)$$

Συνδυάζοντας τις (3.1.18α-β) προκύπτει (με αφαίρεση κατά μέλη)

$$|S_{11}| = |S_{22}| \quad (3.1.19)$$

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι σε κάθε τέτοιο δίθυρο (αμφίδρομο και χωρίς απώλειες), οι δύο θύρες οφείλουν να έχουν τον ίδιο συντελεστή ανάκλασης κατά μέτρο. Ως άσκηση, εξηγήστε την ιδιότητα αυτή από φυσικής απόψεως**.

Γράφοντας τις παραμέτρους σκέδασης στην πολική μορφή

$$S_{mn} = |S_{mn}| \exp(j\varphi_{mn})$$

η (3.1.18γ) δίνει

$$|S_{11}| |S_{22}| \left[e^{j(\varphi_{12} - \varphi_{11})} + e^{j(\varphi_{22} - \varphi_{12})} \right] = 0$$

Για να ισχύει η τελευταία θα πρέπει

$$e^{j(\varphi_{12} - \varphi_{11})} = -e^{j(\varphi_{22} - \varphi_{12})} \Leftrightarrow \varphi_{12} - \varphi_{11} = \varphi_{22} - \varphi_{12} \pm \pi \Leftrightarrow \varphi_{22} = 2\varphi_{12} - \varphi_{11} \pm \pi$$

(προφανώς οι γωνίες φ_{11} , φ_{12} και φ_{22} κυμαίνονται μεταξύ 0 και 2π , άρα δεν χρειάζεται να

* Ουσιαστικά πρόκειται για τις (3.1.15) και (3.1.16) για $N=2$. Λόγω της αμφιδρομικότητας, οι δύο σχέσεις που θα έδινε η (3.1.16) είναι ταυτόσημες μεταξύ τους και ανάγονται σε μία, την (3.1.17γ).

** Υπόδειξη: Εάν κάποιο κύμα ισχύος W εισέρχεται σε μια θύρα του διθύρου, π.χ. την θύρα #1, τότε στην θύρα #2 περνάει κάποιο κλάσμα της ισχύος αυτού, έστω X . Τότε (επειδή το δίθυρο είναι χωρίς απώλειες) από την ίδια την θύρα #1 ανακλάται το υπόλοιπο της ισχύος, δηλ. $(1 - X)W$, άρα το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης S_{11} είναι $\sqrt{1 - X}$. Εάν η ίδια ισχύς W εισέλθει από την θύρα #2, τότε το ίδιο κλάσμα X της ισχύος αυτής θα περάσει στη θύρα #1, λόγω της αμφιδρομικότητας. Επομένως από τη θύρα #2 ανακλάται η ίδια ισχύς $(1 - X)W$ όπως για τη θύρα #1. Οι υπόλοιποι συλλογισμοί είναι προφανείς.

προσθέσουμε $2n\pi$).

Χρησιμοποιώντας και την (3.1.19), ο συντελεστής S_{22} μπορεί να έλθει στη μορφή

$$S_{22} = |S_{22}| e^{j\varphi_{22}} = |S_{11}| e^{j(2\varphi_{12}-\varphi_{11}\pm\pi)} = -|S_{11}| e^{j(2\varphi_{12}-\varphi_{11})} \quad (3.1.20)$$

Παρατηρώντας προσεκτικά την (3.1.18α), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι τα μέτρα των συντελεστών S_{11} και S_{12} μπορούν να γραφούν ως συνημίτονο και ημίτονο μιας βοηθητικής παραμέτρου ξ (με $0 \leq \xi \leq \pi/2$, αφού πρόκειται για θετικούς αριθμούς)

$$|S_{11}| = |S_{22}| = \cos \xi \quad (3.1.21\alpha)$$

$$|S_{12}| = \sin \xi \quad (3.1.21\beta)$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα (3.1.20) και (3.1.21α-β), ο πίνακας σκέδασης του διθύρου γράφεται στην (εντυπωσιακά) απλουστευμένη μορφή

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos \xi e^{j\varphi_{11}} & \sin \xi e^{j\varphi_{12}} \\ \sin \xi e^{j\varphi_{12}} & -\cos \xi e^{j(2\varphi_{12}-\varphi_{11})} \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

η οποία περιέχει μόνο τρεις πραγματικές παραμέτρους ξ , φ_{11} και φ_{12} έναντι οκτώ που θα χρειάζονταν στη γενική περίπτωση διθύρου (2 πραγματικοί αριθμοί για καθέναν από τους 4 συντελεστές σκέδασης).

Η μορφή αυτή θα μπορούσε να απλουστευθεί ακόμη περισσότερο με αλλαγή των επιπέδων αναφοράς στις θύρες 1 και 2. Αν λάβουμε νέα επίπεδα αναφοράς σε θέσεις z_1 και z_2 τις οποίες επιλέγουμε ώστε να ικανοποιούν τις

$$2\beta z_1 = -\varphi_{11}$$

$$2\beta z_2 = -2\varphi_{12} + \varphi_{11}$$

τότε οι νέες τιμές των παραμέτρων σκέδασης είναι

$$S_{11}' = S_{11} e^{j2\beta z_1} = \cos \xi e^{j\varphi_{11}} e^{-j\varphi_{11}} = \cos \xi$$

$$S_{22}' = S_{22} e^{j2\beta z_2} = -\cos \xi e^{j(2\varphi_{12}-\varphi_{11})} e^{j(-2\varphi_{12}+\varphi_{11})} = -\cos \xi$$

$$S_{12}' = S_{12} e^{j\beta z_1 + j\beta z_2} = \sin \xi e^{j\varphi_{12}} e^{-j\frac{\varphi_{11}}{2} - j\varphi_{12} + j\frac{\varphi_{11}}{2}} = \sin \xi = S_{21}'$$

και κατά συνέπεια ο πίνακας σκέδασης παίρνει τη μορφή (ο τόνος πλέον παραλείπεται)

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ \sin \xi & -\cos \xi \end{bmatrix} \quad (3.1.23)$$

η οποία περιέχει μία μόνο παράμετρο. Ας σημειωθεί εδώ ότι η αλλαγή των επιπέδων αναφοράς επιτυγχάνει σημαντικές αλλαγές στη φάση των παραμέτρων σκέδασης, όχι όμως και οποιεσδήποτε, π.χ. αν θέλαμε η παράμετρος S_{22} να πάρει την τιμή $\cos \xi$ αντί $(-\cos \xi)$, αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί με άλλες κατάλληλες τιμές των z_1 και z_2 , τότε όμως θα είχαμε άλλες τιμές για τις παραμέτρους S_{12} και S_{21} . (Ο αναγνώστης μπορεί ως άσκηση να

προσδιορίσει τις απαιτούμενες τιμές των z_1 και z_2 και τις τιμές των S_{12} και S_{21} που θα προέκυπταν.)

3.2. ΠΑΘΗΤΙΚΑ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

3.2.1. Εξασθενητής

Ο εξασθενητής είναι δίθυρο αμφίδρομο στοιχείο, με τις θύρες του προσαρμοσμένες, το οποίο επιφέρει απόσβεση (σταθερή ή μεταβλητή) στο κύμα που το διαρρέει. Όπως είναι προφανές, πρόκειται για δίθυρο με απώλειες, οι οποίες είναι ωμικού χαρακτήρα (η μείωση της ισχύος του κύματος αντιστοιχεί σε ισχύ που μετατρέπεται σε θερμότητα Joule).

Ο απλούστερος τρόπος να χαρακτηρισθεί ένας εξασθενητής είναι με την απόσβεση που προκαλεί, εκφραζόμενη σε dB (όπως μετράται πάντα η απόσβεση), η οποία θεωρώντας κύμα εισερχόμενο από τη θύρα #1 (και εξερχόμενο από την #2) δίνεται από την

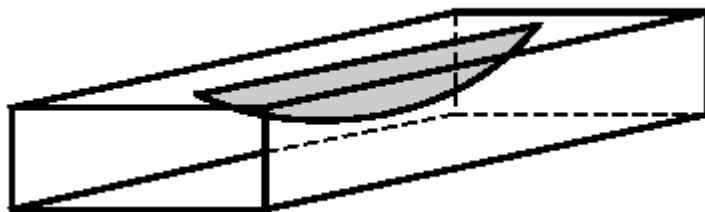
$$A = 10 \log \left(\frac{W_{2,\text{out}}}{W_{1,\text{in}}} \right) = -20 \log \left(\left| \frac{b_2}{a_1} \right| \right) = -20 \log(|S_{21}|) \quad (3.2.1)$$

οπότε (λαμβάνοντας υπόψη και την αμφιδρομικότητα) ο συντελεστής διέλευσης, εφόσον τον χρειαζόμαστε, προκύπτει:

$$|S_{12}| = |S_{21}| = 10^{-A/20} \quad (3.2.2)$$

Μπορεί να σημειωθεί εδώ ότι, όπως εξηγήθηκε στα προηγούμενα, με κατάλληλη μετατόπιση των επιπέδων αναφοράς στις θύρες 1 και 2 είναι πάντοτε δυνατόν οι συντελεστές S_{12} και S_{21} να λάβουν πραγματική τιμή, και άρα η (3.2.2) προσδιορίζει πλήρως τον πίνακα σκέδασης του εξασθενητή ο οποίος μπορεί πάντα να τεθεί στη μορφή*

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & |S_{12}| \\ |S_{12}| & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$



Σχ. 3.2: Απλοποιημένη κατασκευαστική μορφή ενός εξασθενητή

Ένας εξασθενητής μπορεί να κατασκευασθεί από κυματοδηγό εντός του οποίου τοποθετείται μεταλλικό φύλλο παράλληλα προς τον άξονά του, όπως φαίνεται στο

* Εύκολα παρατηρούμε ότι η μορφή αυτή είναι απόλυτα συμβατή με την (3.1.22) ή την (3.1.23).

παραπάνω σχήμα. Υπό την επίδραση του πεδίου του κυματοδηγού αναπτύσσονται ρεύματα πάνω στο μεταλλικό φύλλο και καταναλώνουν ισχύ ως θερμότητα, η οποία αφαιρείται από την ισχύ που μεταφέρει το κύμα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

- η απορροφώμενη ισχύς, και άρα η απόσβεση, αυξάνει με την επιφάνεια του φύλλου μέσα στον κυματοδηγό επειδή αυτή είναι το «θερμαντικό στοιχείο»
- επίσης η απορροφώμενη ισχύς και η απόσβεση αυξάνει όσο πλησιέστερα βρίσκεται το φύλλο στο μέσον του κυματοδηγού επειδή εκεί το πεδίο είναι ισχυρότερο (θεωρούμε δεδομένο ότι ο κυματοδηγός λειτουργεί στον κύριο ρυθμό) και άρα δημιουργεί ισχυρότερα ρεύματα, ενώ αντίθετα αν το μεταλλικό φύλλο εφάπτεται στο πλάγιο τοίχωμα τότε ουσιαστικά δεν επηρεάζει.

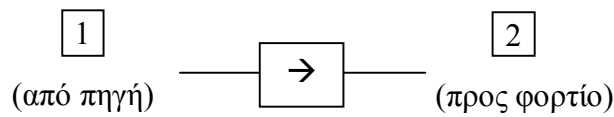
Για τους παραπάνω λόγους, αυτός ο τρόπος κατασκευής προσφέρεται για την κατασκευή μεταβλητού εξασθενητή, στον οποίο η απόσβεση μεταβάλλεται είτε μετακινώντας το φύλλο οριζόντια μεταξύ του πλευρικού τοιχώματος και του μέσου του κυματοδηγού είτε κρατώντας σταθερή τη θέση του φύλλου στο μέσον του κυματοδηγού και μετακινώντας το κατακόρυφα μέσα από μια σχισμή* στο άνω τοίχωμα του κυματοδηγού, δηλ. μεταβάλλοντας (με βύθιση ή ανύψωση) το τμήμα του που είναι μέσα στον κυματοδηγό.

3.2.2. Απομονωτής

Ο απομονωτής είναι ένα δίθυρο μη αμφίδρομο στοιχείο το οποίο, όπως δείχνει η ονομασία του, έχει την ιδιότητα (στην ιδανική περίπτωση) να επιτρέπει τη διέλευση του H/M κύματος μόνο προς τη μία κατεύθυνση, π.χ. από τη θύρα #1 προς τη θύρα #2, και να απαγορεύει τη διέλευση προς την αντίθετη κατεύθυνση. (Προφανώς οι δύο θύρες θα μπορούσαν να αριθμηθούν και αντίστροφα οπότε η επιτρεπτή φορά θα ήταν από την #2 προς την #1). Στην πράξη ο απομονωτής εμφανίζει πολύ μικρή απόσβεση (περίπου μηδενική) κατά την «ορθή» φορά (από τη θύρα #1 προς τη θύρα #2) και πολύ μεγάλη απόσβεση (σχεδόν άπειρη) κατά την «ανάστροφη» φορά (από την #2 προς την #1). Από αυτό γίνεται φανερό ότι ο απομονωτής, εκτός από μη αμφίδρομο στοιχείο, είναι επίσης στοιχείο με απώλειες (δηλ. δεν εφαρμόζονται οι ειδικές περιπτώσεις της παραγρ. 3.1.4).

* Ένας τέτοιος κυματοδηγός με σχισμή στο άνω τοίχωμά του λέγεται συχνά σχισμογραμμή (ο όρος δεν πρέπει να συγχέεται με τη σχισμοσειρά που είναι μια σειρά σχισμών στο πλευρικό τοίχωμα κυματοδηγού οι οποίες εκπέμπουν μέρος του κύματος που μεταφέρει ο κυματοδηγός, δηλ. είναι κεραία – για την ακρίβεια στοιχειοκεραία). Η σχισμή πρέπει να τοποθετείται στο μέσον του άνω τοιχώματος διότι στη θέση αυτή επηρεάζει το λιγότερο δυνατό τα επιφανειακά ρεύματα στο τοίχωμα, και άρα το κύμα μέσα στον κυματοδηγό. Παρατηρήστε σχετικά το Σχ. 2.5 από το οποίο φαίνεται ότι όταν η σχισμή τοποθετηθεί στο μέσον δεν διακόπτει καμμία «ρευματική γραμμή».

Στην πράξη χρησιμοποιείται κυρίως για προστασία κάποιου υποσυστήματος (π.χ. της πηγής) από τα ανακλώμενα κύματα.



Σχ. 3.3: Συμβολική παράσταση απομονωτή

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο πίνακας σκέδασης ενός ιδανικού απομονωτή έχει τη μορφή

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

ενώ για έναν πραγματικό απομονωτή έχουμε

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

όπου οι παράμετροι σ και τ εκφράζουν τους συντελεστές διέλευσης κατά την ορθή και την ανάστροφη φορά, αντίστοιχα, και σύμφωνα με τα όσα προαναφέρθηκαν ισχύει $|\sigma| \rightarrow 1$ και $|\tau| \rightarrow 0$. Εδώ οι παράμετροι σ και τ θεωρήθηκαν κατ' αρχήν μιγαδικές, αλλά σύμφωνα με τα προηγούμενα, με κατάλληλη μετατόπιση των επιπέδων αναφοράς στις θύρες 1 και 2 είναι πάντοτε δυνατόν τουλάχιστον η μία από αυτές, έστω η τ , να μετατραπεί σε πραγματική. Η παράμετρος τ , ανάλογα με το πόσο προσεγγίζει το 0, δείχνει πόσο καλά αποδίδει ο απομονωτής στο έργο του. Για το σκοπό αυτό στην πράξη χρησιμοποιείται ο **συντελεστής απομόνωσης** (isolation factor) σε dB, ο οποίος εκφράζει την απόσβεση ισχύος που επιτυγχάνει ο απομονωτής κατά την ανάστροφη φορά:

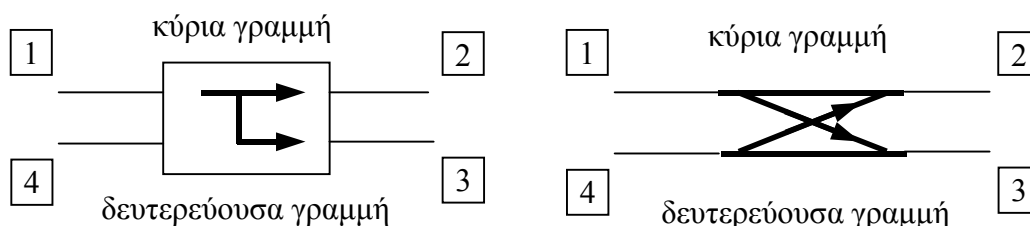
$$I = 10 \log \left(\frac{W_{2,in}}{W_{1,out}} \right) = -20 \log \left(\left| \frac{b_1}{a_2} \right| \right) = -20 \log(|S_{12}|) = -20 \log \tau \quad (3.2.6)$$

Μια τυπική περιοχή τιμών του συντελεστή απομόνωσης είναι από 13 ως 40 dB περίπου.

Στην πράξη ο απομονωτής κατασκευάζεται κατά κανόνα με χρήση φερρίτη, ο οποίος είναι ένα ειδικό σιδηρομαγνητικό υλικό ανισοτροπικού χαρακτήρα. (**Ανισοτροπικά** ονομάζονται τα υλικά που συμπεριφέρονται διαφορετικά ανάλογα με τη διεύθυνση, φορά και πόλωση του πεδίου που αναπτύσσεται σε αυτά. Στα υλικά αυτά οι ηλεκτρικές και μαγνητικές σταθερές, δηλ. η διηλεκτρική επιτρεπτότητα ή ϵ και η μαγνητική διαπερατότητα, δεν είναι βαθμωτά μεγέθη αλλά τανυστές.) Η λειτουργία του απομονωτή βασίζεται στο γεγονός ότι ο φερρίτης προκαλεί στροφή του επιπέδου πόλωσης ενός H/M κύματος (λεγόμενη στροφή Faraday), η οποία διαφέρει ανάλογα με τη φορά του κύματος. Η κατάλληλη στροφή του επιπέδου πόλωσης ώστε να έχουμε απομόνωση επιτυγχάνεται για μια ορισμένη συχνότητα και προσεγγιστικά για μια περιορισμένη περιοχή συχνοτήτων γύρω από αυτή, και άρα ο απομονωτής αυτός είναι διάταξη στενής ζώνης.

3.2.3. Κατευθυντικός ζεύκτης

Ο κατευθυντικός ζεύκτης είναι ένα τετράθυρο αμφίδρομο, χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες. Με κατάλληλη αρίθμηση των θυρών του, το τετράθυρο αυτό μπορεί πάντοτε να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο συζευγμένες μεταξύ τους γραμμές μεταφοράς (ή κυματοδηγούς, πράγμα που για τους σκοπούς της μελέτης μας είναι ακριβώς το ίδιο). Δηλαδή οι 4 θύρες του κατευθυντικού ζεύκτη μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ζεύγη, εκ των οποίων το ένα, έστω οι θύρες #1 και #2, μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί την κύρια γραμμή, και το άλλο, έστω οι θύρες #3 και #4, την δευτερεύουσα γραμμή. Αυτό απεικονίζεται συμβολικά στο ακόλουθο σχήμα.



Σχ. 3.4: Συμβολική παράσταση κατευθυντικού ζεύκτη (δύο εναλλακτικά σύμβολα)

Το βασικό χαρακτηριστικό του κατευθυντικού ζεύκτη είναι ότι μεταφέρει ένα μέρος του προσπίπτοντος και ένα μέρος του ανακλώμενου κύματος της κύριας γραμμής στην δευτερεύουσα γραμμή, διαχωρίζοντας αυτά, δηλαδή οδηγώντας τα σε διαφορετικές θύρες της δευτερεύουσας γραμμής. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι το κύμα a_1 που εισέρχεται από τη θύρα #1 θεωρείται ως προσπίπτον της κύριας γραμμής, οπότε το κύμα a_2 που εισέρχεται από τη θύρα #2 αντιστοιχεί στο ανακλώμενο. Εάν το ζεύγος των θυρών #1 και #2 παρεμβληθεί σε μία πραγματική γραμμή μεταφοράς ή κυματοδηγό, τότε όντως το κύμα a_1 είναι το προσπίπτον και το κύμα a_2 το ανακλώμενο. Αυτός είναι και ο κατεξοχήν τρόπος που χρησιμοποιείται ο κατευθυντικός ζεύκτης στην πράξη. Τότε από τη θύρα #3 θα εξέλθει κύμα b_3 ίσο με ένα ορισμένο κλάσμα του προσπίπτοντος κύματος a_1 και ανεξάρτητο από το ανακλώμενο κύμα a_2 , ενώ από τη θύρα #4 θα εξέλθει κύμα b_4 ίσο με το ίδιο κλάσμα του ανακλώμενου κύματος a_2 και ανεξάρτητο από το προσπίπτον κύμα a_1 (π.χ. αν από τη θύρα #3 εξέρχεται το $1/10$ του κύματος a_1 , τότε από τη θύρα #4 θα εξέρχεται το $1/10$ του κύματος a_2). Ο διαχωρισμός αυτός του προσπίπτοντος από το ανακλώμενο κύμα (ενώ στη γραμμή μεταφοράς ή στον κυματοδηγό συνυπήρχαν «ανάμικτα») είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην πράξη διότι επιτρέπει να «παρακολουθούμε» χωριστά τα δύο αυτά κύματα από τις δύο θύρες της δευτερεύουσας γραμμής. Π.χ. για τη μέτρηση του συντελεστή ανάκλασης στη γραμμή (κατά μέτρο) αρκεί να μετρηθούν οι ισχείς των εξερχόμενων κυμάτων από τις θύρες #3 και #4, οι οποίες είναι ανάλογες προς την προσπίπτουσα και την ανακλώμενη ισχύ στην κύρια γραμμή, και να ληφθεί η

τετραγωνική ρίζα του λόγου αυτών. Αυτό γίνεται με μεγάλη ευκολία, ενώ η απευθείας μέτρηση του προσπίπτοντος και ανακλώμενου στην ίδια γραμμή δεν είναι ευχερής.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι ο κατευθυντικός ζεύκτης ορίστηκε παραπάνω ως «τετράθυρο αμφίδρομο, χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες». Αξίζει να σημειωθεί ότι, με βάση τη θεωρία των μικροκυματικών πολυθύρων, τα χαρακτηριστικά αυτά προσδιορίζουν πλήρως όλες τις υπόλοιπες ιδιότητες αυτού. Δηλαδή η θεωρία αποδεικνύει ότι οποιοδήποτε τετράθυρο αμφίδρομο, χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες είναι ένας κατευθυντικός ζεύκτης*.

Με την παραπάνω αρίθμηση των θυρών, ο πίνακας σκέδασης του κατευθυντικού ζεύκτη μπορεί να έλθει στη μορφή

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ \cos \xi & 0 & 0 & \sin \xi \\ \sin \xi & 0 & 0 & -\cos \xi \\ 0 & \sin \xi & -\cos \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

ή τη μορφή

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \cos \xi & j \sin \xi & 0 \\ \cos \xi & 0 & 0 & j \sin \xi \\ j \sin \xi & 0 & 0 & \cos \xi \\ 0 & j \sin \xi & \cos \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

με κατάλληλη, κατά περίπτωση, μετακίνηση των επιπέδων αναφοράς στις θύρες.

Μια παράμετρος που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά του κατευθυντικού ζεύκτη είναι ο **συντελεστής ζεύξης** που ορίζεται ως

$$C = 10 \log \left(\frac{W_{1,\text{in}}}{W_{3,\text{out}}} \right) = -20 \log \left(\left| \frac{b_3}{a_1} \right| \right) = -20 \log(|S_{31}|) \quad (3.2.9)$$

όπου $W_{1,\text{in}}$ και $W_{3,\text{out}}$ είναι αντίστοιχα η εισερχόμενη ισχύς από τη θύρα #1 και η εξερχόμενη από τη θύρα #3. Από τον ορισμό είναι προφανές ότι ο συντελεστής ζεύξης μετράται σε dB και εκφράζει το αντίστροφο κλάσμα της ισχύος που μεταδίδεται από την κύρια στη δευτερεύουσα γραμμή. Με διαφορετική αλλά ισοδύναμη διατύπωση, ο συντελεστής ζεύξης δείχνει κατά πόσα dB η ισχύς εισόδου στην κύρια γραμμή υπερβαίνει την ισχύ που μεταδίδεται στη δευτερεύουσα γραμμή. Μεγάλη τιμή του συντελεστή ζεύξης σημαίνει ότι ένα μικρό τμήμα της ισχύος της κύριας γραμμής περνά στη δευτερεύουσα, δηλ. η κύρια και η δευτερεύουσα γραμμή είναι ασθενώς συζευγμένες, ενώ μικρή τιμή δείχνει ισχυρή σύζευξη. Π.χ. ένας κατευθυντικός ζεύκτης 10 dB μεταδίδει το 1/10 της

* Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη αλλά ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος.

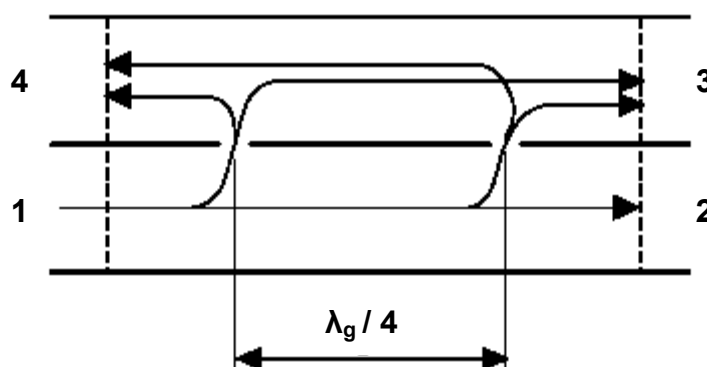
ισχύος στη δευτερεύουσα γραμμή (από τη θύρα #1 στη θύρα #3), ενώ ένας κατευθυντικός ζεύκτης 3 dB μεταδίδει τη μισή ισχύ.

Στην πράξη χρησιμεύει επίσης και ο **συντελεστής κατευθυντικότητας** ο οποίος ορίζεται μέσω του πηλίκου της ισχύος που μεταδίδεται στη θύρα #3 προς την ισχύ που μεταδίδεται στη θύρα #4 (από τη θύρα #1)

$$D = 10 \log \left(\frac{W_{3,\text{out}}}{W_{4,\text{out}}} \right) \quad (3.2.10)$$

Ουσιαστικά ο συντελεστής κατευθυντικότητας μετράει το (πολύ μικρό) κλάσμα της ισχύος που (αν και δεν θα έπρεπε) μεταδίδεται στη θύρα #4 αντί για τη θύρα #3. Δηλαδή δείχνει την απόκλιση του κατευθυντικού ζεύκτη από την ιδανική θεωρητική συμπεριφορά, για την οποία (με τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων σκέδασης) η τιμή του θα ήταν $D = \infty$. Στην πράξη οι τιμές που λαμβάνει είναι της τάξης των 30 dB και άνω.

Ένας απλός τρόπος υλοποίησης του κατευθυντικού ζεύκτη είναι με δύο τμήματα κυματοδηγού με κοινό τοίχωμα τα οποία επικοινωνούν με δύο ίδιες οπές σε απόσταση τετάρτου μήκους κύματος ($\lambda_g / 4$) μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 3.5: Κατασκευαστική μορφή ενός απλού κατευθυντικού ζεύκτη

Η λειτουργία αυτού του κατευθυντικού ζεύκτη βασίζεται στην απόσταση $\lambda_g / 4$ των δύο οπών, λόγω της οποίας

- Τα κύματα από τη θύρα # 1 που διέρχονται διαμέσου των οπών στον πάνω κυματοδηγό με φορά προς τα δεξιά έχουν το ίδιο πλάτος (ίδιος «συντελεστής διέλευσης» επειδή οι οπές είναι ίδιες) και την ίδια φάση επειδή διήνυσαν την ίδια απόσταση (το ένα στον κάτω κυματοδηγό και το άλλο στον πάνω), και κατά συνέπεια συμβάλλουν προσθετικά και εξέρχονται από τη θύρα #3.
- Τα κύματα από τη θύρα # 1 που διέρχονται διαμέσου των οπών στον πάνω κυματοδηγό με φορά προς τα αριστερά έχουν και πάλι το ίδιο πλάτος (για τον ίδιο λόγο) αλλά αντίθετη φάση επειδή διήνυσαν απόσταση διαφορετική κατά $\lambda_g / 2$

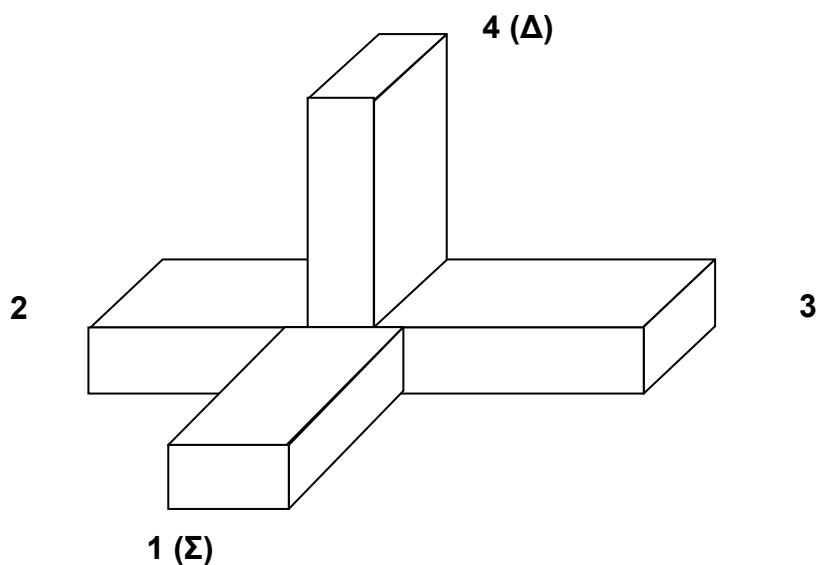
(παρατηρήστε προσεκτικά το σχήμα), και κατά συνέπεια συμβάλλουν αναίρετικά ώστε από τη θύρα #4 δεν εξέρχεται κανένα κύμα.

Το γεγονός ότι η απαιτούμενη απόσταση των δύο οπών συνδέεται άμεσα με το μήκος κύματος δείχνει ότι πρόκειται για διάταξη στενής ζώνης, δηλ. η επιθυμητή λειτουργία επιτυγχάνεται ακριβώς για μία μόνο συχνότητα (τη συχνότητα για την οποία το μήκος κύματος ισούται με το τετραπλάσιο της φυσικής απόστασης των δύο οπών) και κατά προσέγγιση για μια στενή περιοχή συχνοτήτων γύρω από αυτή. Χρησιμοποιώντας περισσότερες οπές μπορεί να αυξηθεί το εύρος ζώνης του κατευθυντικού ζεύκτη.

3.2.4. Υβριδικό ή μαγικό T

Μια ειδική περίπτωση κατευθυντικού ζεύκτη με ιδιαίτερη χρησιμότητα είναι το λεγόμενο υβριδικό ή μαγικό T. Το μαγικό T είναι κατ' ουσίαν ένας τετράθυρος κατευθυντικός ζεύκτης 3 dB (μισής ισχύος) ο οποίος, εάν συνδεσμοποιηθεί με τη θύρα #1 ή την #4 σε ρόλο εισόδου, υποδιαιρεί το κύμα εισόδου σε δύο κύματα ίσης ισχύος και ίδιας φάσης (εάν αυτό εισήλθε από τη θύρα #1) είτε σε δύο κύματα ίσης ισχύος και αντίθετης φάσης (εάν εισήλθε από τη θύρα #4). Τα κύματα αυτά εξέρχονται από τις θύρες #2 και #3. Λόγω αμφιδρομικότητας, το μαγικό T μπορεί να συνδεσμοποιηθεί και αντίστροφα, με τις θύρες #2 και #3 σε ρόλο εισόδων, οπότε από τη θύρα #1 εξέρχεται κύμα ανάλογο προς το άθροισμα των εισερχόμενων κυμάτων και από την #4 ανάλογο της διαφοράς τους.

Το μαγικό T μπορεί να κατασκευασθεί με ένωση τεσσάρων κυματοδηγών, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Στο εσωτερικό της ένωσης κατά περίπτωση μπορεί να υπάρχουν στυλίσκοι ή άλλα παρεμφερή στοιχεία για προσαρμογή των θυρών.



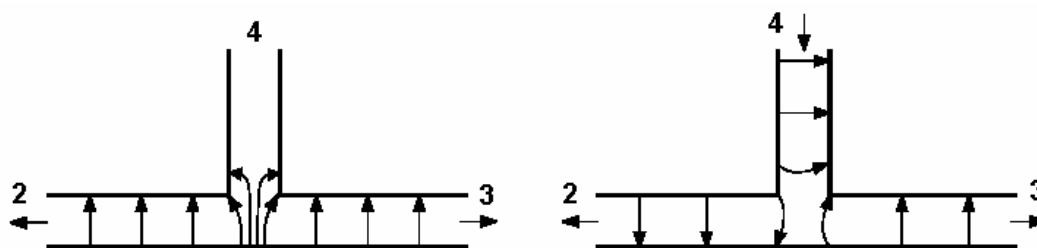
Σχ. 3.6: Σχηματική απεικόνιση ενός μαγικού T

Η θύρα #1 του σχήματος συχνά αποκαλείται θύρα Σ (αθροίσματος), ενώ η θύρα #4 αντίστοιχα θύρα Δ (διαφοράς). Επίσης η ένωση κυματοδηγών των θυρών 2 – 4 – 3 λέγεται E-ένωση (E-junction) διότι είναι στο επίπεδο του ηλεκτρικού πεδίου (E) του κύριου ρυθμού TE_{10} στον οποίο λειτουργούν οι κυματοδηγοί, ενώ η ένωση των 2 – 1 – 3 λέγεται αντίστοιχα H-ένωση (H-junction) διότι είναι στο επίπεδο του μαγνητικού πεδίου (H) του ρυθμού αυτού. Είναι βέβαια αυτονόητο ότι η αρίθμηση των θυρών μπορεί να γίνει και με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, οπότε τα παραπάνω τροποποιούνται ανάλογα.

Με την παραπάνω αρίθμηση των θυρών, ο πίνακας σκέδασης του μαγικού T μπορεί να έλθει στη μορφή*

$$[S] = \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

όπου η γωνία φ εξαρτάται από τα επίπεδα αναφοράς στις θύρες (προφανώς μπορεί να μηδενισθεί με κατάλληλες μετακινήσεις αυτών).



(α) Κύμα εισέρχεται από τη θύρα Σ

(β) Κύμα εισέρχεται από τη θύρα Δ

Σχ. 3.7: Ενδεικτική εικόνα των ηλεκτρικών πεδίων σε ένα μαγικό T

Το Σχ. 3.7α δείχνει την εικόνα των ηλεκτρικών πεδίων όταν εισέλθει κύμα από την θύρα Σ (η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και δεν δείχνεται σε αυτό). Το πεδίο του εισερχόμενου κύματος της θύρας Σ παρουσιάζει άρτια συμμετρία ως προς το μέσον της θύρας Δ , η οποία διατηρείται και κατά την διέλευσή του στις θύρες εξόδου, άρα θα εξέλθει με την ίδια φάση. Λόγω της συμμετρίας αυτής όμως δεν είναι δυνατή η διέλευσή του στην θύρα Δ (ο κύριος ρυθμός απαιτεί σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τη μικρή διάσταση του κυματοδηγού), και κατά συνέπεια οι θύρες Σ και Δ είναι ασύζευκτες. Αντίστοιχα, όταν εισέλθει κύμα από την θύρα Δ , θα εξέλθει από τις θύρες εξόδου με περιττή συμμετρία, άρα με αντίθετη φάση, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.7β, ενώ για τον ίδιο λόγο δεν είναι δυνατή η

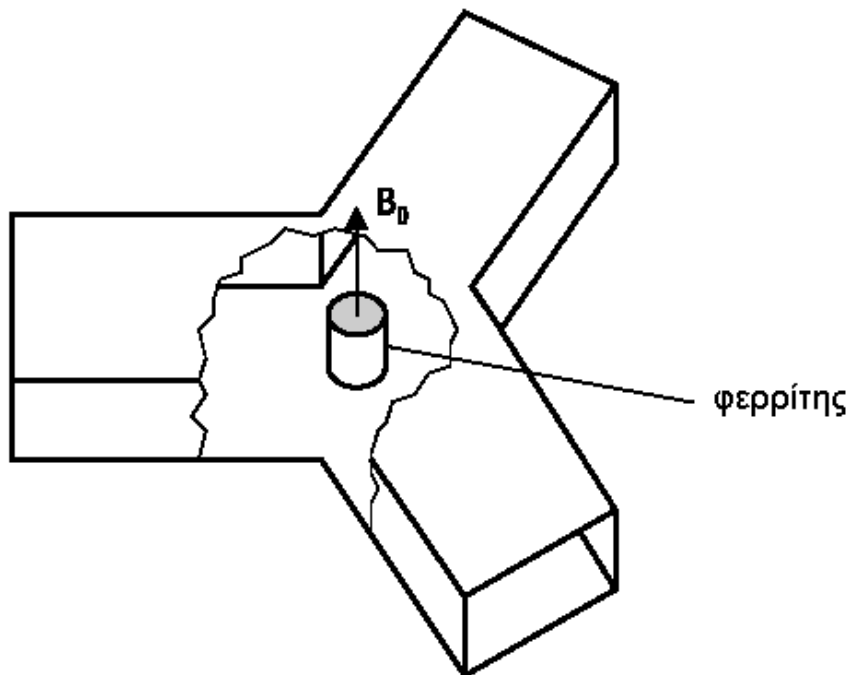
* Παρατηρούμε ότι η μορφή αυτή προέρχεται από την (3.2.7) θέτοντας $\xi = \pi/4$.

διέλευσή του στην θύρα Σ, όπου ο κύριος ρυθμός απαιτεί ηλεκτρικό πεδίο με άρτια συμμετρία κατά τη μεγάλη διάσταση του κυματοδηγού.

3.2.5. Κυκλοφορητής

Ο κυκλοφορητής είναι ένα μη αμφίδρομο τρίθυρο χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες. Η λειτουργία του συνίσταται στο να μεταφέρει το κύμα «κυκλικά» μεταξύ των θυρών, π.χ. με την αρίθμηση που φαίνεται στο επόμενο σχήμα η ροή της ισχύος έχει τη φορά #1 → #2 → #3. (Με τη φορά αυτή ο κυκλοφορητής αποκαλείται δεξιόστροφος, ενώ με τη φορά #1 → #3 → #2 θα είχαμε έναν αριστερόστροφο κυκλοφορητή).

Με παθητικά στοιχεία η κατασκευή του κυκλοφορητή μπορεί να γίνει με εκμετάλλευση των ανισοτροπικών ιδιοτήτων του φερρίτη, ο οποίος τοποθετείται σε ένωση κυματοδηγών, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



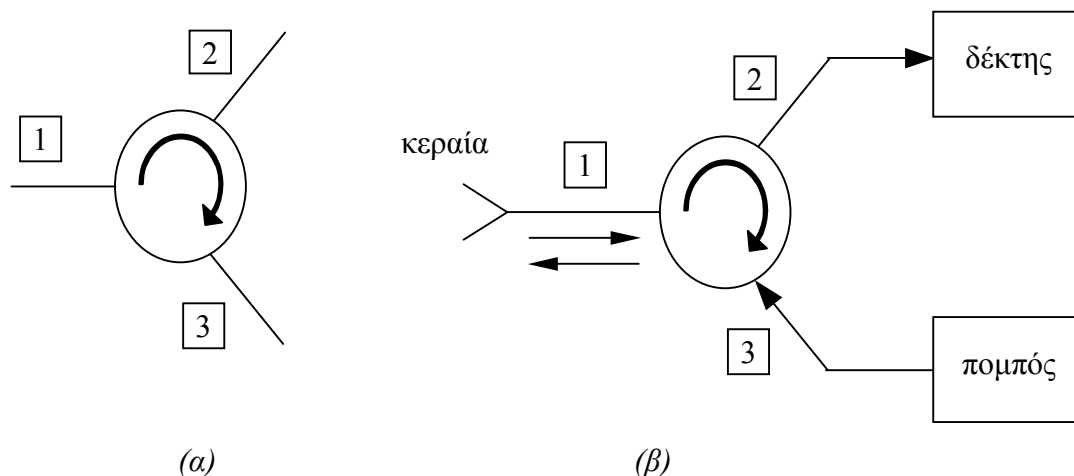
Σχ. 3.8: Κατασκευαστική μορφή ενός τρίθυρου κυκλοφορητή

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο πίνακας σκέδασης του (δεξιόστροφου) κυκλοφορητή έχει τη μορφή (ή μπορεί να έλθει σε αυτή)

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.12)$$

Ιδιαίτερα σημαντική εφαρμογή ενός κυκλοφορητή είναι η χρήση του ως διπλέκτη (duplexer) σε ένα ραντάρ ή γενικότερα σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα που χρησιμοποιεί την ίδια κεραία για εκπομπή και για λήψη, όπως φαίνεται στο σχήμα που

ακολουθεί. Το σημαντικό είναι ότι ο κυκλοφορητής μεταφέρει το σήμα από τον πομπό στην κεραία και από την κεραία στον δέκτη χωρίς να επιτρέπει την αντίστροφη διαδρομή ούτε βέβαια τη διέλευση σήματος κατευθείαν από τον πομπό στον δέκτη.



Σχ. 3.9: α) Συμβολική παράσταση τρίθρου κυκλοφορητή, β) Συνδεσμολογία αυτού ως διπλέκτη

3.3. ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

3.3.1. Λυχνία Klystron με ανακλαστήρα

Η λειτουργία των μικροκυματικών λυχνιών για την παραγωγή και ενίσχυση μικροκυματικών σημάτων βασίζεται, σε γενικές γραμμές, στην αλληλεπίδραση μιας δέσμης ηλεκτρονίων με μία κοιλότητα συντονισμένη σε κατάλληλη συχνότητα ή έναν κυματοδηγό κατάλληλου τύπου και διαστάσεων. Σήμερα χρησιμοποιούνται επίσης για τον ίδιο σκοπό ημιαγωγικές διατάξεις που λειτουργούν στις μικροκυματικές συχνότητες, οι λυχνίες όμως παραμένουν σε ευρεία χρήση, ιδίως για εφαρμογές υψηλής ισχύος.

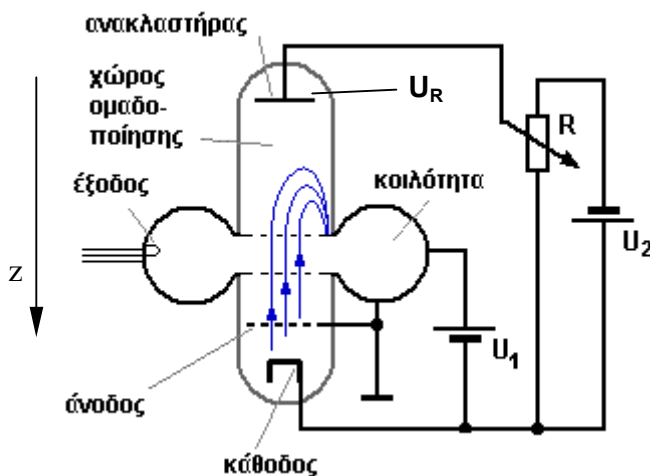
Οι λυχνίες Klystron ήταν από τις πρώτες που αναπτύχθηκαν (γύρω στο 1940). Άλλοι τύποι μικροκυματικών λυχνιών είναι η Magnetron η οποία είναι ταλαντωτής υψηλής ισχύος αλλά με υψηλή στάθμη θορύβου* και η TWT (Traveling Wave Tube) η οποία χρησιμοποιείται ως ενισχυτής. Από τους διάφορους τύπους** λυχνιών Klystron παρουσιάζουμε εδώ την αρχή λειτουργίας της λυχνίας Klystron με ανακλαστήρα η οποία χρησιμοποιείται ως μικροκυματικός ταλαντωτής χαμηλής ισχύος. Η χρήση της τα τελευταία χρόνια τείνει να υποκατασταθεί από τους ημιαγωγικούς ταλαντωτές (όπως η

* Ιστορικά οι λυχνίες Magnetron πρωτοχρησιμοποιήθηκαν στα βρετανικά ραντάρ κατά τον Β' παγκόσμιο πόλεμο. Παρά τον σχετικά υψηλό θόρυβο, παρουσιάζουν καλή απόδοση ισχύος, κατασκευαστική αντοχή και ιδιαίτερα χαμηλό κόστος και χρησιμοποιούνται σήμερα κυρίως σε εφαρμογές όπου ο θόρυβος δεν είναι κρίσιμος παράγοντας, όπως ναυτιλιακά ραντάρ, φούρνοι μικροκυμάτων κτλ.

** Άλλος τύπος είναι η λυχνία Klystron πολλών κοιλοτήτων η οποία χρησιμεύει ως ενισχυτής.

δίοδος Gunn που ακολουθεί), η μελέτη της όμως παρέχει ένα απλό παράδειγμα των αρχών που διέπουν τη λειτουργία των μικροκυματικών λυχνιών γενικότερα.

Η δομή της λυχνίας αυτής φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 3.10: Σχηματική παράσταση λυχνίας Klystron με ανακλαστήρα

Όπως όλες οι ηλεκτρονικές λυχνίες, η λειτουργία της βασίζεται καταρχήν στο φαινόμενο της θερμοϊονικής εκπομπής ηλεκτρονίων, η οποία πραγματοποιείται από το ηλεκτρόδιο της καθόδου με θέρμανση από νήματα που τροφοδοτούνται με ρεύμα και πυρακτώνονται (δεν φαίνονται στο σχήμα). Η κάθοδος τίθεται σε αρνητική τάση ώστε τα ηλεκτρόνια που απελευθερώνονται από αυτή λόγω θέρμανσης να επιταχυνθούν προς την άνοδο (η οποία έχει θετικό δυναμικό σε σχέση με την κάθοδο). Η άνοδος έχει τη μορφή πλέγματος, σε τρόπο ώστε τα ηλεκτρόνια που εκπέμπει η κάθοδος την διαπερνούν και συνεχίζουν την πορεία τους πέραν αυτής. Στον χώρο μετά την κάθοδο υπάρχει μια μεταλλική κοιλότητα (cavity), αποκαλούμενη και (μικροκυματικό) **αντηχείο** (resonator), της οποίας τα τμήματα των τοιχωμάτων που παρεμβάλλονται στη διαδρομή των ηλεκτρονίων έχουν επίσης μορφή πλέγματος και επιτρέπουν τη διέλευση των ηλεκτρονίων, ταυτόχρονα όμως συμπεριφέρονται ως αγωγικά τοιχώματα σε ό,τι αφορά τα κύματα μέσα στην κοιλότητα. Λόγω της κλειστής μορφής της κοιλότητας, σε αυτή αναπτύσσονται στάσιμα κύματα σε συχνότητες που καθορίζονται από τη γεωμετρία της. Όπως όλα τα αντίστοιχα κλειστά συστήματα, η κοιλότητα εμφανίζει συμπεριφορά **συντονισμού**, δηλ. ιδανικά επιτρέπει ταλαντώσεις σε μία* συχνότητα (τη συχνότητα συντονισμού) και πρακτικά σε μια ολόκληρη ζώνη συχνοτήτων γύρω από αυτή (όπως συμβαίνει σε ένα ιδανικό κύκλωμα LC χωρίς απώλειες και ένα πραγματικό κύκλωμα RLC με απώλειες). Πέρα από την κοιλότητα, υπάρχει ένα ακόμη ηλεκτρόδιο που ονομάζεται **ανακλαστήρας** (reflector), το

* Για την ακρίβεια, μια ιδανική κοιλότητα επιτρέπει άπειρες διακριτές τιμές συχνότητας (κάτι σαν αρμονικές) αλλά στην πράξη μία μόνο από αυτές θα είναι εντός της περιοχής λειτουργίας της λυχνίας.

οποίο τροφοδοτείται με τάση αρνητική σε σχέση με την κάθοδο (και άρα ακόμη πιο αρνητική σε σχέση με την άνοδο). Ο χώρος μεταξύ της κοιλότητας και του ανακλαστήρα λέγεται **χώρος ομαδοποίησης** για λόγους που θα φανούν στη συνέχεια.

Όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.10, τα τοιχώματα της κοιλότητας είναι σε κοινή στάθμη τάσης με την άνοδο και κατά συνέπεια τα ηλεκτρόνια, έχοντας επιταχυνθεί από τη διαφορά δυναμικού καθόδου – ανόδου, συνεχίζουν τη διαδρομή τους μέχρι αυτή, διαπερνούν το πλέγμα και βγαίνουν στο χώρο ομαδοποίησης. Εκεί υφίστανται την επίδραση της διαφοράς δυναμικού ανόδου – ανακλαστήρα η οποία αρχικά τα επιβραδύνει. Επειδή η διαφορά αυτή είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά δυναμικού καθόδου – ανόδου, τα ηλεκτρόνια δεν φτάνουν στον ανακλαστήρα αλλά αναστρέφουν την πορεία τους και επιστρέφουν (επιταχυνόμενα πλέον) προς την κοιλότητα.

Μέσα στην κοιλότητα, όπως προαναφέρθηκε, αναπτύσσονται ταλαντώσεις συγκεκριμένης συχνότητας (εντός της ζώνης συχνοτήτων συντονισμού), η έναρξη των οποίων γίνεται κατά την έναρξη λειτουργίας της λυχνίας. (Όταν η λυχνία τίθεται υπό τάση, η κοιλότητα δέχεται έναν βηματικό παλμό ο οποίος με βάση την ανάλυση Fourier περιέχει όλες τις συχνότητες. Από αυτές η κοιλότητα επιλέγει όσες είναι εντός της ζώνης συχνοτήτων συντονισμού και απορρίπτει τις άλλες). Το σημαντικό είναι η **συντήρηση** των ταλαντώσεων αυτών διότι, λόγω των απωλειών της κοιλότητας, αν δεν λαμβάνουν διαρκώς νέα ισχύ θα αποσβεσθούν πολύ σύντομα.

Έστω λοιπόν ότι στην κοιλότητα υπάρχει ένα εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο με συχνότητα f (και περίοδο $T = 1/f$) το οποίο φροντίζουμε κατασκευαστικά (βλ. τα οριζόντια άνω και κάτω τοιχώματα της κοιλότητας) να είναι κατακόρυφο στον χώρο όπου διέρχονται τα ηλεκτρόνια, οπότε εκεί θα δίνεται από μια έκφραση της μορφής

$$E_z(t) = E_0 \sin(2\pi ft) \quad (3.3.1)$$

Σημειώνουμε ότι ο άξονας z , όπως φαίνεται και στο σχήμα, έχει ληφθεί με φορά προς τα κάτω ώστε οι θετικές τιμές του πεδίου E_z να ασκούν δύναμη προς τα πάνω στα ηλεκτρόνια (λόγω του αρνητικού φορτίου του ηλεκτρονίου).

Όπως περιγράψαμε, τα ηλεκτρόνια διέρχονται δύο φορές από τον χώρο της κοιλότητας. Την πρώτη φορά εισέρχονται στον χώρο αυτό, σε μια χρονική στιγμή έστω t_0 , με την ταχύτητα που έχουν αποκτήσει από τη διαφορά δυναμικού καθόδου – ανόδου

$$v(t_0) = \sqrt{2 \frac{eV_1}{m_e}} \quad (3.3.2)$$

όπου e το φορτίο και m_e η μάζα του ηλεκτρονίου.

Υπό την επίδραση του εσωτερικού πεδίου της κοιλότητας τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται ή επιβραδύνονται ανάλογα με την πολικότητα του πεδίου αυτού, δηλ. ανάλογα με τον χρόνο

εισόδου τους (ο μισός χρόνος αντιστοιχεί σε επιτάχυνση και ο άλλος μισός σε επιβράδυνση). Επειδή η επιτάχυνση των ηλεκτρονίων λόγω της δύναμης που ασκεί σε αυτά το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι κατά τα γνωστά ($-eE_z/m_e$), η ταχύτητα εξόδου των ηλεκτρονίων από την κοιλότητα δίνεται από την

$$v(t_1) - v(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{e}{m_e} E_0 \sin(2\pi ft) dt = \frac{eE_0}{m_e} [\cos(2\pi f t_1) - \cos(2\pi f t_0)] \quad (3.3.3)$$

όπου t_0 η χρονική στιγμή εισόδου των ηλεκτρονίων στην κοιλότητα, t_1 η χρονική στιγμή εξόδου των ηλεκτρονίων από την κοιλότητα και $v(t_1)$ η ταχύτητά τους κατά την έξοδό τους από αυτή. Εφόσον ο χρόνος παραμονής των ηλεκτρονίων στην κοιλότητα είναι μικρός (δηλ. $t_1 - t_0 \ll T$), μπορούμε απλώς να θεωρούμε ότι η αύξηση ή μείωση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων είναι ανάλογη του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου της κοιλότητας, δηλ. ακολουθεί αντίστοιχη ημιτονοειδή μεταβολή οπότε τα ηλεκτρόνια που βγαίνουν σε στιγμές μέγιστου ηλεκτρικού πεδίου ($\sin 2\pi ft = 1$) έχουν μέγιστη ταχύτητα, όσα βγαίνουν σε στιγμές μηδενικού πεδίου έχουν αμετάβλητη ταχύτητα (δεν αλλάζουν την ταχύτητά τους καθώς διέρχονται από την κοιλότητα) κ.ο.κ.

Στη συνέχεια τα ηλεκτρόνια βγαίνουν στον χώρο ομαδοποίησης με διαφοροποιημένες ταχύτητες και εκτελούν μια κίνηση κατακόρυφης βολής υπό την επίδραση του πεδίου του χώρου αυτού (δηλ. της διαφοράς δυναμικού ανόδου – ανακλαστήρα), με επιτάχυνση προς τα κάτω (δηλ. επιβράδυνση)

$$\gamma = \frac{e}{m_e} \frac{V_1 - V_R}{L} \quad (3.3.4)$$

όπου L η απόσταση από την έξοδο (άνω τοίχωμα) της κοιλότητας ως τον ανακλαστήρα.

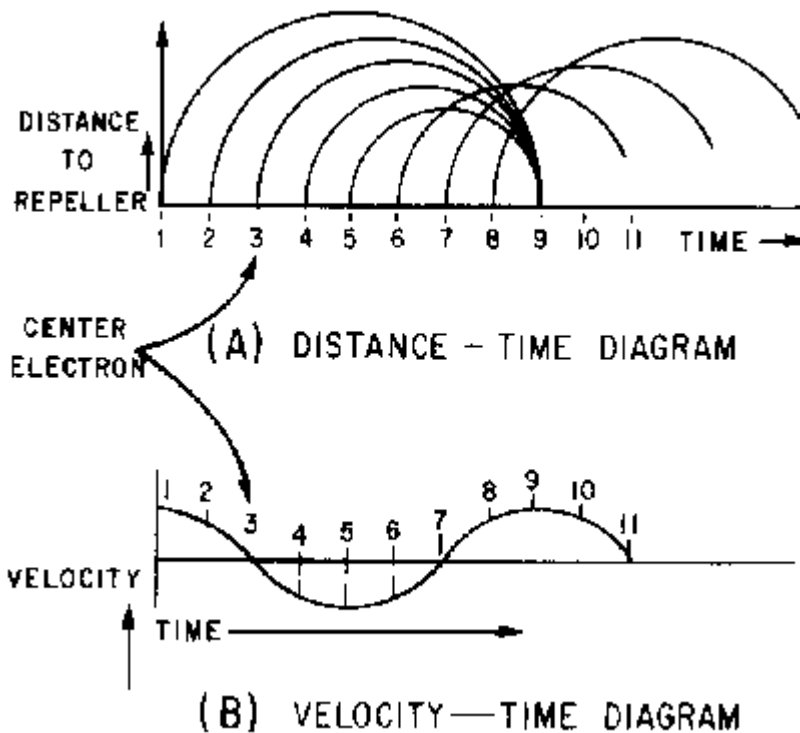
Ο χρόνος αυτής της κίνησης των ηλεκτρονίων μέχρι να επιστρέψουν στο σημείο από όπου ξεκίνησαν, δηλ. στο σημείο εξόδου τους από την κοιλότητα (άνω τοίχωμα – πλέγμα της κοιλότητας), δίνεται από τη γνωστή σχέση της κατακόρυφης βολής

$$t_2 - t_1 = 2 \frac{v(t_1)}{\gamma} \quad (3.3.5)$$

όπου t_2 η χρονική στιγμή επανόδου των ηλεκτρονίων στην κοιλότητα.

Τα ηλεκτρόνια που επιταχύνθηκαν από το πεδίο της κοιλότητας μένουν μεγαλύτερο χρόνο στο χώρο ομαδοποίησης (διότι είχαν μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα), ενώ όσα επιβραδύνθηκαν μένουν λιγότερο. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα σύνολο ηλεκτρονίων που επιταχύνθηκαν κατά τη διάρκεια μιας ημιπεριόδου του πεδίου της κοιλότητας, αυτά θα τείνουν να καθυστερήσουν να επιστρέψουν (σε σχέση με την επιστροφή τους αν δεν είχαν επιταχυνθεί), ενώ τα αμέσως επόμενα που επιβραδύνθηκαν κατά την επόμενη ημιπερίοδο

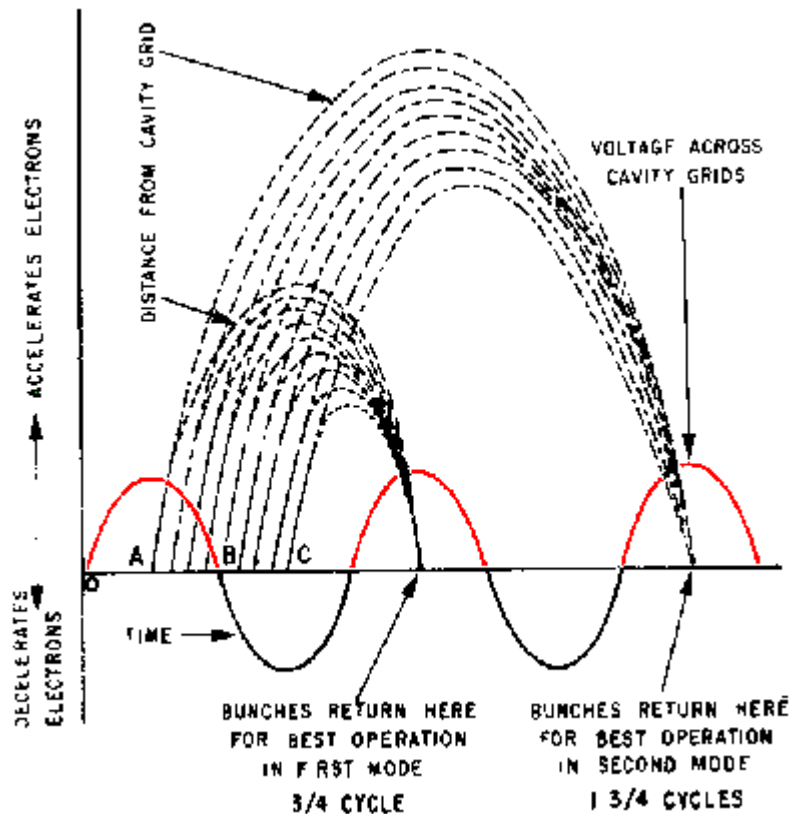
θα επιστρέψουν συντομότερα. Αυτό σημαίνει ότι τα δεύτερα θα προσεγγίσουν τα πρώτα κατά την επάνοδό τους στην κοιλότητα και θα σχηματίσουν ένα πύκνωμα. Ταυτόχρονα θα απομακρυνθούν από τα επόμενα ηλεκτρόνια που είχαν επιταχυνθεί και καθυστερούν να επιστρέψουν, σχηματίζοντας έτσι ένα αραιώμα μετά το πύκνωμα, κ.ο.κ. Σχηματικά αυτό απεικονίζεται στο επόμενο διάγραμμα. Ας προσεχθεί ότι το πύκνωμα εμφανίζεται μεταξύ ηλεκτρονίων που επιταχύνθηκαν και των επόμενων που επιβραδύνθηκαν, και στο μέσον αυτού βρίσκονται τα ηλεκτρόνια που δεν άλλαξαν ταχύτητα καθώς διήλθαν από την κοιλότητα, δηλ. αυτά που πέρασαν από αυτή σε μια χρονική στιγμή μηδενισμού του εσωτερικού πεδίου της μεταξύ θετικής και αρνητικής ημιπεριόδου (βλ. “Center Electron” στο διάγραμμα). Αντίστοιχα το αραιώμα εμφανίζεται μεταξύ ηλεκτρονίων που επιβραδύνθηκαν και των επόμενων που επιταχύνθηκαν, γύρω από ένα σημείο μηδενισμού του εσωτερικού πεδίου μεταξύ αρνητικής και θετικής ημιπεριόδου. Συμπερασματικά, στο χώρο μεταξύ κοιλότητας και ανακλαστήρα συμβαίνει ομαδοποίηση (bunching) των ηλεκτρονίων τα οποία επιστρέφουν στην κοιλότητα σε πυκνώματα και αραιώματα, και για το λόγο αυτό ο χώρος αυτός λέγεται χώρος ομαδοποίησης (όπως προαναφέρθηκε).



Σχ. 3.11: Διάγραμμα ταχυτήτων ηλεκτρονίων και ομαδοποίηση αυτών

Τα ηλεκτρόνια επιστρέφοντας ομαδοποιημένα στην κοιλότητα αλληλεπιδρούν με το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο αυτής. Ρυθμίζοντας κατάλληλα την τάση του ανακλαστήρα μπορούμε να επιτύχουμε τα πυκνώματα να επιστρέφουν στην κοιλότητα σε χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το εσωτερικό πεδίο της κοιλότητας τα επιβραδύνει, δηλ. στις

στιγμές που το ηλεκτρικό πεδίο E_z είναι μέγιστο με φορά προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (θυμίζουμε ότι ο άξονας z έχει ληφθεί με θετική φορά προς τα κάτω).



Σχ. 3.12: Επιβράδυνση του πυκνώματος των ηλεκτρονίων που επιστρέφουν

Όταν συμβαίνει αυτό, τα ηλεκτρόνια χάνουν κινητική ενέργεια, η οποία μεταβιβάζεται στην κοιλότητα και ενισχύει τις ταλαντώσεις*. Ως αποτέλεσμα αυτού, το εσωτερικό πεδίο της κοιλότητας αυξάνει και επιβραδύνει περισσότερο τα ηλεκτρόνια αφαιρώντας από αυτά ακόμη περισσότερη ενέργεια, και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αποκατασταθεί ισορροπία**, οπότε έχουμε σταθερή λειτουργία της λυχνίας. (Ο χρόνος που απαιτείται για να συμβεί αυτό πρακτικά είναι μικρός και συνήθως δεν τον παρατηρούμε.)

Ποσοτικά η συνθήκη για να συμβαίνουν τα παραπάνω είναι ο χρόνος που παραμένουν τα ηλεκτρόνια στον χώρο ομαδοποίησης να είναι τέτοιος ώστε

$$t_2 - t_1 = \left(N + \frac{3}{4}\right)T = \left(N + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{f} \quad (3.3.6)$$

* Στην αντίθετη περίπτωση θα λάμβαναν ενέργεια από την κοιλότητα και θα απόσβεναν τις ταλαντώσεις, πράγμα προφανώς ανεπιθύμητο.

** Στην κατάσταση ισορροπίας (σταθερής λειτουργίας της λυχνίας) τα ηλεκτρόνια αποδίδουν ένα μεγάλο μέρος της κινητικής τους ενέργειας στο εσωτερικό πεδίο της κοιλότητας και στη συνέχεια, έχοντας επιβραδυνθεί αρκετά, πέφτουν πάνω στα τοιχώματα της κοιλότητας ή / και στην άνοδο και απορροφώνται.

όπου T η περίοδος του του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου της κοιλότητας, δηλ. η περίοδος συντονισμού (και αντίστοιχα f η συχνότητα συντονισμού) της κοιλότητας. Αυτό εξηγείται από το προηγούμενο σχήμα, στο οποίο παρατηρούμε ότι τα ηλεκτρόνια που βγήκαν από την κοιλότητα π.χ. τη στιγμή B αντιστοιχούν σε ένα πύκνωμα, για την ακρίβεια είναι ακριβώς στο «μέσον» του πυκνώματος διότι βρίσκονται μεταξύ θετικής και αρνητικής ημιπεριόδου. Δηλ. το πύκνωμα επιστρέφει όταν επιστρέφουν τα ηλεκτρόνια αυτά. Όπως προαναφέρθηκε, το πύκνωμα πρέπει να επιστρέψει σε στιγμή μέγιστου ηλεκτρικού πεδίου, δηλ. τα ηλεκτρόνια που έφυγαν τη στιγμή B πρέπει να επιστρέψουν σε ένα από τα επόμενα μέγιστα, τα οποία προφανώς (βλ. το σχήμα) απέχουν από το σημείο B χρονική απόσταση $\frac{3}{4} T$ (το πρώτο), $1 + \frac{3}{4} T$ (το δεύτερο) κ.ο.κ.*

Αναφερόμενοι στα ηλεκτρόνια αυτά που δεν άλλαξαν ταχύτητα καθώς διήλθαν από την κοιλότητα, δηλ. $v(t_1) = v(t_0)$, και συνδυάζοντας τις (3.3.2), (3.3.4) και (3.3.5) με την (3.3.6) παίρνουμε τη συνθήκη λειτουργίας της λυχνίας

$$\frac{2Lf\sqrt{2V_1}}{V_1 - V_R} \sqrt{\frac{m_e}{e}} = N + \frac{3}{4} \quad (3.3.7)$$

Για δεδομένη συχνότητα f η συνθήκη αυτή δίνει μια σειρά τιμών για την τάση ανακλαστήρα** V_R , μία για κάθε τιμή του ακεραίου N , οι οποίες είναι κατάλληλες ώστε η λυχνία να ταλαντώνεται. Δηλαδή για να λειτουργήσει η λυχνία ως ταλαντωτής (σε συχνότητα f) πρέπει η τάση V_R να ρυθμισθεί στην τιμή που υπαγορεύει η (3.3.7). Όπως προαναφέρθηκε, η συχνότητα ταλάντωσης f εξαρτάται από την κοιλότητα και μπορεί να λάβει μια περιοχή τιμών γύρω από τη συχνότητα συντονισμού αυτής, η οποία είναι η περιοχή συχνοτήτων λειτουργίας της λυχνίας. Μέσω της (3.3.7), η περιοχή αυτή προσδιορίζει, για δεδομένο N , μια περιοχή τιμών της V_R για τις οποίες η λυχνία παράγει ταλαντώσεις (ενώ αν η τάση ανακλαστήρα V_R τεθεί σε τιμή εκτός της περιοχής αυτής, η λυχνία δεν λειτουργεί). Κάθε τέτοια περιοχή τιμών αντιστοιχεί σε μία τιμή του ακεραίου N και ορίζει, όπως λέγεται, έναν **ρυθμό ταλάντωσης** της λυχνίας. Γενικά οι χαμηλότεροι ρυθμοί επιτυγχάνουν υψηλότερη ισχύ εξόδου διότι τα ηλεκτρόνια διανύουν μικρότερη απόσταση στο χώρο ομαδοποίησης και κατά συνέπεια πυκνώνουν περισσότερο, απαιτούν όμως μεγαλύτερη (αρνητική) τάση ανακλαστήρα όπως δείχνει η (3.3.7). Στην πράξη οι

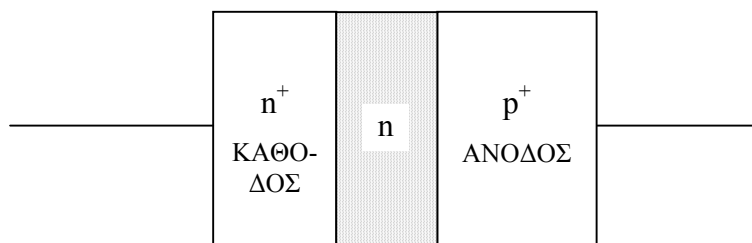
* Παρατηρούμε βέβαια ότι, εφόσον ισχύει αυτό, τα αραιώματα θα επιστρέψουν σε στιγμές κατά τις οποίες επιταχύνονται από το εσωτερικό πεδίο της κοιλότητας και αφαιρούν ενέργεια, προφανώς όμως η ενέργεια αυτή είναι μικρότερη από αυτή που προσφέρουν τα πυκνώματα (επειδή ακριβώς τα πυκνώματα περιέχουν περισσότερα ηλεκτρόνια) και επομένως αυτή είναι η προτιμητέα κατάσταση.

** Για την ακρίβεια, η συνθήκη δίνει μια σειρά συνδυασμών τάσης ανόδου V_1 και τάσης ανακλαστήρα V_R , αλλά στην πράξη συνήθως η τάση ανόδου διατηρείται σταθερή και η τάση ανακλαστήρα μεταβάλλεται.

τυπικές τιμές των τάσεων ανόδου και ανακλαστήρα είναι αρκετά μεγάλες, της τάξης των εκατοντάδων Volts, π.χ. για σχετικά μικρή λυχνία μπορεί να κυμαίνονται στην περιοχή των 200 ... 300 V για την τάση ανόδου και (-100) ... (-200) V για την τάση ανακλαστήρα.

3.3.2. Δίοδος Gunn

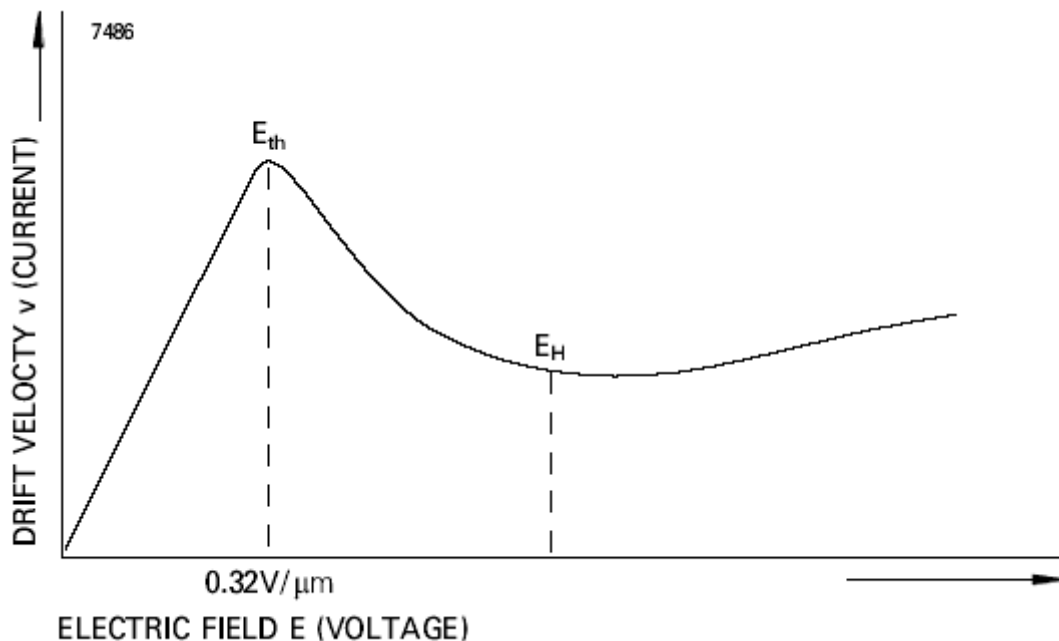
Η δίοδος Gunn είναι μια δίοδος που κατασκευάζεται από αρσενικούχο γάλλιο (GaAs) και αποτελείται από ένα υπόστρωμα τύπου p^+ με ισχυρή νόθευση (μεγάλη περιεκτικότητα σε προσμίξεις τρισθενούς στοιχείου) και άρα μεγάλη αγωγιμότητα, ένα ενδιάμεσο λεπτό στρώμα τύπου n (τυπικό πάχος περίπου 3 ως 15 μm) με μικρή αγωγιμότητα και ένα στρώμα τύπου n^+ με ισχυρή νόθευση (μεγάλη περιεκτικότητα σε προσμίξεις πενταθενούς στοιχείου) και επίσης μεγάλη αγωγιμότητα. Προφανώς το στρώμα p^+ αποτελεί την άνοδο και το στρώμα n^+ την κάθοδο της διόδου. Τα φαινόμενα που θα περιγράψουμε λαμβάνουν χώρα στο λεπτό ενδιάμεσο στρώμα n το οποίο αποτελεί την «ενεργό περιοχή» της διόδου.



Σχ. 3.13: Δομή διόδου Gunn

Η λειτουργία της διόδου Gunn βασίζεται στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του αρσενικούχου γαλλίου. Λόγω της κρυσταλλικής δομής του, το υλικό αυτό παρουσιάζει την ιδιότητα, όταν τεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια στην αρχή να αυξάνουν ταχύτητα περίπου γραμμικά δηλ. αναλογικά προς το πεδίο (ουσιαστικά δημιουργείται ρεύμα ωμικού χαρακτήρα το οποίο είναι ανάλογο προς το ηλεκτρικό πεδίο που το δημιουργεί σύμφωνα με τον μικροσκοπικό νόμο του Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$). Αυξάνοντας περαιτέρω το ηλεκτρικό πεδίο παρατηρούμε ότι από μια ορισμένη τιμή κατωφλίου και μετά η ταχύτητα των ηλεκτρονίων μειώνεται αντί να αυξάνεται (λέμε ότι τα ηλεκτρόνια εμφανίζουν αρνητική διαφορική κινητικότητα). Συνεχίζοντας την αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου, από ένα σημείο και μετά η διαφορική κινητικότητα αυτών γίνεται και πάλι θετική, δηλ. η ταχύτητα των ηλεκτρονίων αρχίζει να αυξάνεται και πάλι αλλά με ρυθμό μικρότερο από ό,τι στην αρχή. Στο επόμενο διάγραμμα απεικονίζεται η καμπύλη που περιγράφει την συμπεριφορά αυτή (ταχύτητα ηλεκτρονίων συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου που υφίστανται), όπου φαίνονται οι τρεις περιοχές θετικής – αρνητικής – θετικής διαφορικής κινητικότητας των ηλεκτρονίων. Η ίδια ακριβώς καμπύλη αντιπροσωπεύει (σε μακροσκοπικό επίπεδο) την χαρακτηριστική τάσεως – ρεύματος της διόδου, όπου οι περιοχές θετικής διαφορικής

κινητικότητας των ηλεκτρονίων αντιστοιχούν σε θετική διαφορική αγωγιμότητα του υλικού, δηλ. αύξηση του ρεύματος αναλογικά προς την τάση της διόδου, ενώ η περιοχή αρνητικής διαφορικής κινητικότητας αντιστοιχεί σε αρνητική διαφορική αγωγιμότητα, δηλ. στην περιοχή αυτή το ρεύμα μειώνεται καθώς αυξάνεται η τάση.

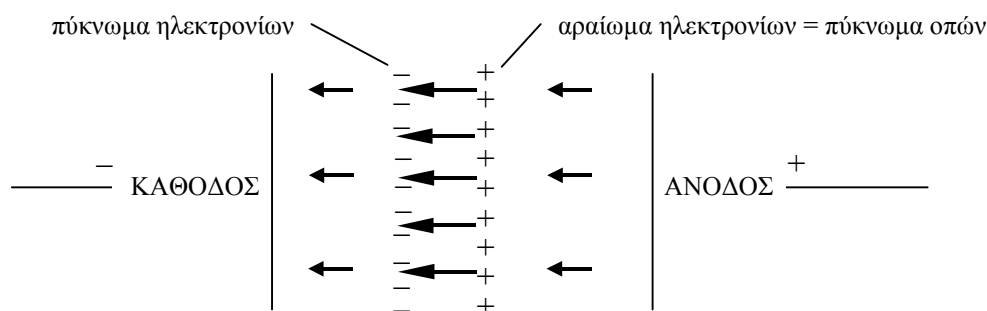


Σχ. 3.14: Τυπική χαρακτηριστική διόδου Gunn

Σημειώνουμε συνοπτικά ότι η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στις κβαντικές ιδιότητες του GaAs, το οποίο έχει ζώνες αγωγιμότητας που αλληλοεπικαλύπτονται, ενώ η υψηλότερη από αυτές χαρακτηρίζεται από πολύ μικρότερη κινητικότητα των ηλεκτρονίων της σε σύγκριση με αυτά της χαμηλής ζώνης (περίπου 60 φορές μικρότερη). Στην πρώτη περιοχή, δηλ. για χαμηλές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου, το ρεύμα που δημιουργείται οφείλεται στα ηλεκτρόνια της χαμηλής ζώνης, ενώ καθώς το πεδίο αυξάνει ορισμένα από αυτά τα ηλεκτρόνια αποκτούν ενέργεια που τους επιτρέπει να μεταβούν στην υψηλότερη ζώνη. Τότε όμως η κινητικότητά τους, και άρα η ταχύτητά τους, μειώνεται αισθητά, με αποτέλεσμα η συνολική μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων να είναι μικρότερη από ό,τι πριν, ενώ αυξάνοντας το πεδίο όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια μεταβαίνουν στην υψηλότερη ζώνη και μειώνεται περαιτέρω η μέση ταχύτητα όλων των ηλεκτρονίων. Αυτό εξηγεί την περιοχή αρνητικής διαφορικής κινητικότητας. Από ένα σημείο και πέρα όλα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουν μεταφερθεί στην υψηλότερη ζώνη και έτσι το συνολικό ρεύμα οφείλεται σε αυτά και είναι πάλι ωμικού τύπου, δηλ. βρισκόμαστε στη δεύτερη περιοχή θετικής διαφορικής κινητικότητας, αλλά με μικρότερη αγωγιμότητα από ό,τι στην πρώτη.

Όταν η διάδος Gunn τεθεί υπό τάση, στην αρχή τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται από την κάθοδο προς την άνοδο. Όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου υπερβεί την τιμή

κατωφλίου, ορισμένα ηλεκτρόνια επιβραδύνονται και έτσι σχηματίζουν ένα πύκνωμα (μαζί με εκείνα που τα ακολουθούν), ενώ μπροστά από το πύκνωμα σχηματίζεται ένα «αραιώμα» ηλεκτρονίων, δηλ. ένα πύκνωμα των οπών που άφησαν πίσω τους τα ηλεκτρόνια που είχαν προπορευθεί (και δεν καλύφθηκαν από τα «βραδυπορούντα» ηλεκτρόνια του πυκνώματος). Το πύκνωμα των ηλεκτρονίων και το πύκνωμα των οπών αποτελούν ένα διπολικό στρώμα, το οποίο αφενός τείνει να αυξήσει την τιμή του πεδίου μέσα σε αυτό (διατηρώντας την καθυστέρηση των ηλεκτρονίων, δηλ. συντηρώντας τον εαυτό του) και αφετέρου τείνει να μειώσει την τιμή του πεδίου έξω από αυτό (μη επιτρέποντας την εμφάνιση και δεύτερου διπολικού στρώματος). Το διπολικό αυτό στρώμα απεικονίζεται σχηματικά στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 3.15: Διπολικό στρώμα ηλεκτρονίων και οπών στη δίοδο Gunn

Όπως προαναφέρθηκε, για όσο χρόνο το διπολικό στρώμα κινείται στην περιοχή τύπου n της διόδου δεν σχηματίζεται και δεύτερο στρώμα. Όταν αυτό φτάσει στην άνοδο (για την ακρίβεια στο υπόστρωμα τύπου p^+), απορροφάται από αυτή και δημιουργεί έναν παλμό στο κύκλωμα της διόδου, ενώ συγχρόνως δημιουργείται το επόμενο διπολικό στρώμα και αρχίζει τη διαδρομή του μέσα στην περιοχή τύπου n και έτσι το φαινόμενο επαναλαμβάνεται, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται μια περιοδική σειρά παλμών στα ηλεκτρόδια της διόδου (οι οποίοι οφείλονται στα διαδοχικά διπολικά στρώματα), δηλ. να συμβαίνει ταλάντωση. Όπως είναι εμφανές από την περιγραφή που προηγήθηκε, η περίοδος της ταλάντωσης είναι ο χρόνος που χρειάζεται το διπολικό στρώμα για τη διαδρομή του μέσα στην περιοχή τύπου n, και κατά συνέπεια κατασκευάζοντας το στρώμα τύπου n με αρκετά μικρό πάχος επιτυγχάνεται ταλάντωση σε μικροκυματική συχνότητα. Οι παλμοί που παράγονται από τα διπολικά στρώματα περιέχουν (με βάση την ανάλυση Fourier) κάποιο φάσμα συχνοτήτων γύρω από την κεντρική συχνότητα που ορίζει ο εν λόγω χρόνος διαδρομής, ενώ τοποθετώντας την δίοδο Gunn σε κάποια διάταξη συντονισμού (π.χ. μια μικροκυματική κοιλότητα) μπορούμε να επιλέξουμε ειδικότερα κάποιο μέρος από αυτή την περιοχή συχνοτήτων, δηλ. να ρυθμίσουμε (εντός των ορίων που θέτει το φασματικό περιεχόμενο των παλμών) τη συχνότητα εξόδου του ταλαντωτή.

3.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 3.1. Να προσδιορισθεί ο πίνακας σκέδασης για το απλούστερο δίθυρο που αποτελείται από ένα τμήμα γραμμής μεταφοράς ή κυματοδηγού χωρίς απώλειες και να δειχθεί ότι το δίθυρο αυτό είναι αμφίδρομο και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες.

Απάντηση

Έστω ένα τμήμα γραμμής μεταφοράς με μήκος π.χ. ℓ (για κυματοδηγό ισχύει ακριβώς η ίδια συλλογιστική). Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνουμε το αριστερό άκρο του ως θύρα #1 και το δεξί άκρο του ως θύρα #2. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον ορισμό (3.1.6) για $k = 1$, ώστε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους S_{11} και S_{21} , σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που ακολουθούν τον ορισμό, υποθέτουμε ότι στη θύρα #2 έχει συνδεθεί προσαρμοσμένο φορτίο. Τότε το κύμα στη γραμμή είναι μόνο το προσπίπτον από την θύρα #1 προς την #2. Από τη θύρα #1 δεν εξέρχεται ανακλώμενο κύμα, άρα $b_1 = 0$ και ο ορισμός δίνει $S_{11} = 0$. Η ισχύς που εξέρχεται από τη θύρα #2 είναι προφανώς ίση με αυτή που εισέρχεται από τη θύρα #1 (αφού η γραμμή δεν έχει απώλειες), και κατά συνέπεια τα μέτρα των a_1 και b_2 είναι ίσα. Η διαφορά φάσης μεταξύ αυτών οφείλεται στην όδευση του κύματος στη γραμμή για μήκος ℓ , δηλ. είναι ίση με $-\beta\ell$. Αν λοιπόν ορίσουμε το επίπεδο αναφοράς $z = 0$ για τη θύρα #1 ακριβώς στο αριστερό άκρο της γραμμής, θα έχουμε

$$a_1 = |a_1|, \quad b_2 = |a_1| e^{-j\beta\ell}$$

και κατά συνέπεια

$$S_{21} = e^{-j\beta\ell}$$

Με την ίδια επιχειρηματολογία, ορίζοντας το επίπεδο αναφοράς $z = 0$ για τη θύρα #2 ακριβώς στο δεξί άκρο της γραμμής, συμπεραίνουμε ότι $S_{22} = 0$ και ότι

$$S_{12} = e^{-j\beta\ell}$$

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω, έχουμε τον πίνακα σκέδασης του δίθυρου

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{bmatrix} = e^{-j\beta\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

από τον οποίο είναι προφανές ότι το εν λόγω δίθυρο είναι αμφίδρομο και με τις δύο θύρες του προσαρμοσμένες (και βέβαια χωρίς απώλειες, όπως ήταν αυτονόητο από την αρχή).

Παράδειγμα 3.2. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τρίθυρο αμφίδρομο, χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες.

Απάντηση

Εάν υπήρχε τέτοιο τρίθυρο, για τις παραμέτρους σκέδασης αυτού θα ίσχυαν οι σχέσεις

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$$

$$S_{12} = S_{21} \text{ , } S_{13} = S_{31} \text{ , } S_{23} = S_{32}$$

Λαμβάνοντας αυτές υπόψη, η συνθήκη μη ύπαρξης απωλειών (διατήρηση ενέργειας)

(3.1.14) γράφεται στη μορφή

$$\begin{bmatrix} S_{11}^* & S_{12}^* & S_{13}^* \\ S_{12}^* & S_{22}^* & S_{23}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & S_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^* & S_{13}^* \\ S_{12}^* & 0 & S_{23}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Με εκτέλεση των πράξεων, η συνθήκη αυτή αναλύεται στις ακόλουθες ισότητες

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (1)$$

$$S_{13}^* S_{23} = 0 \quad (2)$$

$$S_{12}^* S_{23} = 0 \quad (3)$$

$$S_{23}^* S_{13} = 0 \quad (4)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (5)$$

$$S_{12}^* S_{13} = 0 \quad (6)$$

$$S_{23}^* S_{12} = 0 \quad (7)$$

$$S_{13}^* S_{12} = 0 \quad (8)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (9)$$

από τις οποίες (παρεμπιπτόντως) αρκετές είναι μεταξύ τους ισοδύναμες [συγκεκριμένα: η (2) με την (4), η (3) με την (7) και η (6) με την (8)]. Αφαιρώντας κατά μέλη την (9) από την (5) και την (5) από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$|S_{12}| = |S_{13}| = |S_{23}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει αμέσως από οποιαδήποτε εκ των (1), (5), (9). Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με όλες τις υπόλοιπες, π.χ. με την (2) η οποία λέει ότι τουλάχιστον ένας από τους S_{12} και S_{23} ισούται με 0. Πράγμα άτοπο.

Παράδειγμα 3.3. Να αποδειχθεί, με βάση τον ορισμό του κατευθυντικού ζεύκτη [δηλ. χωρίς να χρησιμοποιηθεί η (3.2.7) ή η (3.2.8)], ότι σε οποιοδήποτε κατευθυντικό ζεύκτη (αριθμώντας τις θύρες όπως στο Σχ. 3.4) ισχύει πάντοτε $|S_{13}| = |S_{24}|$.

Απάντηση

Ο ορισμός είναι: «Κατευθυντικός ζεύκτης είναι ένα τετράθυρο αμφίδρομο, χωρίς απώλειες και με όλες τις θύρες του προσαρμοσμένες». Λαμβάνοντας υπόψη την αμφιδρομικότητα και το ότι όλες οι θύρες είναι προσαρμοσμένες, η συνθήκη μη ύπαρξης απωλειών (3.1.14) γράφεται συνοπτικά στη μορφή

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}^* & S_{13}^* & S_{14}^* \\ S_{12}^* & 0 & S_{23}^* & S_{24}^* \\ S_{13}^* & S_{23}^* & 0 & S_{34}^* \\ S_{14}^* & S_{24}^* & S_{34}^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και αναλύεται σε 16 συνολικά σχέσεις, καθεμία από τις οποίες προκύπτει από τον συνδυασμό μίας γραμμής (m) του πρώτου πίνακα με μία στήλη (n) του δεύτερου (κατά τον γνωστό ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων), εξισώνοντας με το στοιχείο (m,n) του μοναδιαίου πίνακα του δεύτερου μέλους. Έτσι, από τα στοιχεία (1,1) και (2,2) προκύπτουν

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (1)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (2)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (3)$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (4)$$

Από τις δύο πρώτες με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 \quad (5)$$

Επίσης από τα στοιχεία (1,2), (1,3), (1,4) και (2,3) προκύπτουν

$$S_{13}^* S_{23} + S_{14}^* S_{24} = 0 \Rightarrow S_{13}^* S_{23} = -S_{14}^* S_{24} \Rightarrow |S_{13}| |S_{23}| = |S_{14}| |S_{24}| \quad (6)$$

$$S_{12}^* S_{23} + S_{14}^* S_{34} = 0 \Rightarrow S_{12}^* S_{23} = -S_{14}^* S_{34} \Rightarrow |S_{12}| |S_{23}| = |S_{14}| |S_{34}| \quad (7)$$

$$S_{12}^* S_{24} + S_{13}^* S_{34} = 0 \Rightarrow S_{12}^* S_{24} = -S_{13}^* S_{34} \Rightarrow |S_{12}| |S_{24}| = |S_{13}| |S_{34}| \quad (8)$$

$$S_{12}^* S_{13} + S_{24}^* S_{34} = 0 \Rightarrow S_{12}^* S_{13} = -S_{24}^* S_{34} \Rightarrow |S_{12}| |S_{13}| = |S_{24}| |S_{34}| \quad (9)$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (9) με $|S_{14}|$ και παίρνουμε

$$|S_{12}| |S_{13}| |S_{14}| = |S_{24}| |S_{34}| |S_{14}|$$

και στη συνέχεια αντικαθιστούμε το γινόμενο $|S_{34}| |S_{14}|$ του δεξιού μέλους από την (7):

$$|S_{12}| |S_{13}| |S_{14}| = |S_{12}| |S_{23}| |S_{24}| \quad (10)$$

Εφόσον ισχύει $|S_{12}| \neq 0$, από την (10) προκύπτει

$$|S_{13}||S_{14}| = |S_{23}||S_{24}| \Rightarrow |S_{14}| = \frac{|S_{23}||S_{24}|}{|S_{13}|}$$

Αντικαθιστώντας το $|S_{14}|$ από την παραπάνω στην (5) έχουμε

$$|S_{13}|^2 + \frac{|S_{23}|^2 |S_{24}|^2}{|S_{13}|^2} = |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 \Rightarrow |S_{13}|^4 + |S_{23}|^2 |S_{24}|^2 - |S_{23}|^2 |S_{13}|^2 - |S_{24}|^2 |S_{13}|^2 = 0$$

η οποία μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής

$$|S_{13}|^2 (|S_{13}|^2 - |S_{23}|^2) - |S_{24}|^2 (|S_{13}|^2 - |S_{23}|^2) = 0 \Leftrightarrow (|S_{13}|^2 - |S_{24}|^2)(|S_{13}|^2 - |S_{23}|^2) = 0$$

Από την παραγοντοποιημένη αυτή μορφή προκύπτει είτε $|S_{13}| = |S_{24}|$ είτε $|S_{13}| = |S_{23}|$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε την αποδεικτέα. Στην άλλη περίπτωση $|S_{13}| = |S_{23}|$, η (5) δίνει ότι $|S_{14}| = |S_{24}|$. Αφαιρώντας όμως τις (3) και (4) κατά μέλη παίρνουμε

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = |S_{14}|^2 + |S_{24}|^2$$

η οποία αντικαθιστώντας τις $|S_{13}| = |S_{23}|$ και $|S_{14}| = |S_{24}|$ γίνεται

$$2|S_{13}|^2 = 2|S_{24}|^2 \Rightarrow |S_{13}| = |S_{24}|$$

δηλ. καταλήγουμε και πάλι στην αποδεικτέα.

Τέλος στην περίπτωση $|S_{12}| = 0$, παρατηρούμε ότι οι (7) και (8) δίνουν

$$|S_{14}||S_{34}| = |S_{13}||S_{34}| = 0$$

Επειδή δεν μπορεί να ισχύει συγχρόνως $|S_{13}| = 0$ και $|S_{14}| = 0$, διότι θα παραβιαζόταν η (1), συμπεραίνουμε ότι είναι $|S_{34}| = 0$. Τότε η (1) δίνει

$$|S_{13}|^2 = 1 - |S_{14}|^2$$

και η (4) δίνει

$$|S_{24}|^2 = 1 - |S_{14}|^2$$

από τις οποίες προκύπτει και πάλι η αποδεικτέα σχέση $|S_{13}| = |S_{24}|$.

ΜΕΡΟΣ Β: ΚΕΡΑΙΕΣ

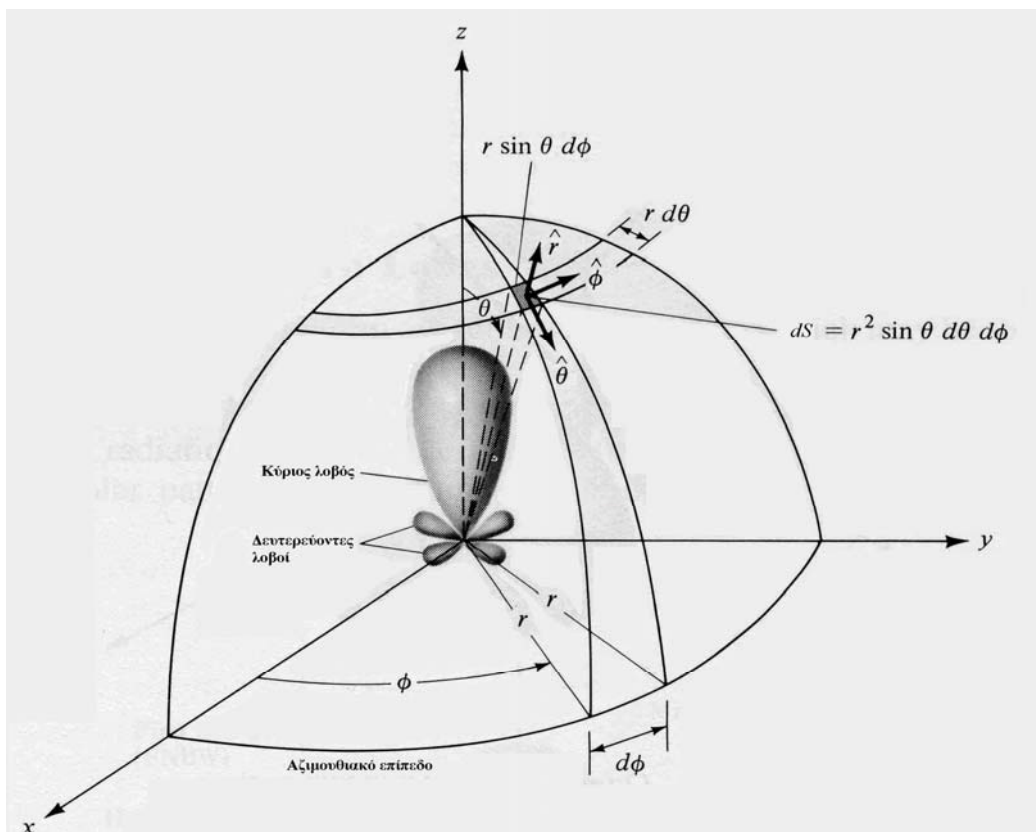
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΟΙ ΚΕΡΑΙΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΚΠΟΜΠΗ

4.1. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΚΕΡΑΙΩΝ

4.1.1. Γενικά

Κεραία, ως γνωστόν, είναι διάταξη από αγωγίμα ή και διηλεκτρικά υλικά η οποία εκπέμπει ή λαμβάνει ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Προφανώς η ίδια κεραία μπορεί είτε να εκπέμπει είτε να λαμβάνει (ανάλογα με το κύκλωμα με το οποίο συνδέεται): στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι βρίσκεται σε κατάσταση εκπομπής (transmitting mode) και στην δεύτερη σε κατάσταση λήψης (receiving mode).

Οι τύποι κεραιών που χρησιμοποιούνται είναι πολλοί, με διαφορετικά κατασκευαστικά γνωρίσματα, και όπως είναι ευνόητο έχουν αναπτυχθεί ανάλογα με τα χαρακτηριστικά που είναι εκάστοτε επιθυμητά για την εφαρμογή για την οποία προορίζονται. Υπάρχουν όμως κάποιες βασικές έννοιες και ιδιότητες που είναι κοινές για όλες τις κεραιές.



Σχ. 4.1: Γεωμετρία σφαιρικών συντεταγμένων για τη μελέτη κεραιάς

Για τη μελέτη των ιδιοτήτων κεραιών θα χρησιμοποιήσουμε το (γνωστό από τη γεωμετρία) σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, ϕ) , όπου r η γνωστή ακτινική συντεταγμένη, ενώ οι γωνιακές συντεταγμένες θ και ϕ αποκαλούνται, αντίστοιχα, **γωνία**

ανύψωσης και **αζιμουθιακή γωνία**. Στο Σχ. 4.1 απεικονίζεται ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Στο σχήμα παρουσιάζονται οι συντεταγμένες r , θ , φ και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ τα οποία είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους (το σύστημα είναι τρισορθογώνιο), καθώς και τα στοιχειώδη μήκη κατά τις διευθύνσεις μεταβολής των τριών συντεταγμένων, τα οποία (όπως είναι γνωστό από τη γεωμετρία) είναι:

dr κατά τη διεύθυνση μεταβολής του r (και σταθερών θ , φ)

$r d\theta$ κατά τη διεύθυνση μεταβολής του θ (και σταθερών r , φ)

$r \sin\theta d\varphi$ κατά τη διεύθυνση μεταβολής του φ (και σταθερών r , θ)

Είναι εμφανές ότι η διεύθυνση μεταβολής του r είναι ακτινική, ενώ οι διευθύνσεις μεταβολής των θ και φ προσομοιάζουν με γεωγραφικούς «μεσημβρινούς» και «παραλλήλους πλάτους» πάνω σε μια σφαίρα με δεδομένο r . Με βάση τα παραπάνω στοιχειώδη μήκη προκύπτει (όπως φαίνεται και στο σχήμα) το στοιχειώδες εμβαδό $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ πάνω σε επιφάνεια σφαίρας, το οποίο χρησιμεύει στην εκτέλεση επιφανειακών ολοκληρώσεων. Είναι επίσης προφανές ότι ο στοιχειώδης όγκος (εφόσον χρειασθεί για χωρική ολοκλήρωση) δίνεται από τη σχέση $dV = dr dS = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$.

Στο παραπάνω σχήμα έχει γίνει η συνήθης παραδοχή ότι η υπό εξέταση κεραία βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Για την ακρίβεια, συχνά θεωρούμε ότι το γεωμετρικό κέντρο συμμετρίας της κεραίας (αν υπάρχει) βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Εντούτοις μπορεί εξίσου καλά να ληφθεί στην αρχή των συντεταγμένων οποιοδήποτε σημείο της κεραίας αν αυτό για κάποιο λόγο διευκολύνει τη μελέτη ή αν δεν υπάρχει κέντρο συμμετρίας. Ας σημειωθεί εξάλλου ότι από φυσικής απόψεως, με δεδομένο ότι στα επόμενα θα ασχοληθούμε με περιοχές του χώρου αρκετά μακριά από την κεραία, δηλ. σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη από τη μέγιστη διάσταση της κεραίας (αυτό άλλωστε υποδηλώνει ο όρος «ακτινοβολία»!), η μετατόπιση της αρχής των συντεταγμένων πάνω στην κεραία είναι μικρή σε σχετικά μεγέθη και δεν μεταβάλλει τη γενική εικόνα του προβλήματος.

Σημειώνεται επίσης ότι στο σχήμα φαίνεται (με κατάλληλη σκίαση) και ένα ενδεικτικό διάγραμμα ακτινοβολίας της υποθετικής κεραίας που βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Η έννοια του διαγράμματος ακτινοβολίας θα εξηγηθεί στα επόμενα.

4.1.2. Περιοχές ακτινοβολίας – Το μακρινό πεδίο

Το κύμα που δημιουργεί μια κεραία (για την ακρίβεια *οποιαδήποτε κεραία*) διαπιστώνεται και αποδεικνύεται ότι μεταβάλλεται ποιοτικά, δηλ. παρουσιάζει διαφορετικά γενικά χαρακτηριστικά και μορφή, ανάλογα με την απόσταση από την κεραία εκπομπής. Με

βάση τα γενικά αυτά χαρακτηριστικά του κύματος ο χώρος γύρω από την κεραία μπορεί να υποδιαιρεθεί σε δύο περιοχές:

- την κοντινή περιοχή (ή **περιοχή Fresnel**), όπου το πεδίο της κεραίας αποκαλείται **εγγύς πεδίο**
- την μακρινή περιοχή (ή **περιοχή Fraunhofer**), όπου το πεδίο της κεραίας ονομάζεται **πεδίο ακτινοβολίας** ή **μακράν πεδίο**

Τονίζεται ότι η μετάβαση από τη μία περιοχή στην άλλη γίνεται βαθμιαία και όχι απότομα, επειδή η διαφοροποίηση μεταξύ των δύο αυτών περιοχών είναι μάλλον ποιοτική παρά ποσοτική. Ως βασικό κριτήριο διαφοροποίησης μπορεί να θεωρηθεί ότι στην κοντινή περιοχή η γωνιακή κατανομή του κύματος που εκπέμπει η κεραία εξαρτάται από την απόσταση, ενώ στη μακρινή παύει να εξαρτάται από αυτή. Δεδομένου ότι το πεδίο της κεραίας μεταβάλλεται στο χώρο κατά συνεχή τρόπο, είναι φανερό ότι η εκπλήρωση του κριτηρίου αυτού καθώς απομακρυνόμαστε από την κεραία γίνεται βαθμιαία και κατά προσέγγιση (με «ασυμπτωτικό» τρόπο θα έλεγε κανείς). Κατά συνέπεια δεν μπορεί να προσδιορισθεί μονοσήμαντα κάποια «διαχωριστική γραμμή» μεταξύ των δύο περιοχών. Ανάλογα με τον τρόπο που διατυπώνεται αριθμητικά το βασικό κριτήριο και τις τυχόν λοιπές παραδοχές που υιοθετούνται, μπορούν να διατυπωθούν διάφορες συνθήκες (προσεγγιστικές πάντοτε) για την τυπική θέση του ορίου μεταξύ των δύο περιοχών. Η πιο συνηθισμένη είναι η

$$R_F = 2 \frac{D^2}{\lambda}$$

όπου R_F η απόσταση από την οποία και μετά αρχίζει η περιοχή του μακράν πεδίου, λ το μήκος κύματος λειτουργίας της κεραίας (δηλ. το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας) και D η μέγιστη γεωμετρική διάσταση της κεραίας, η οποία για να ισχύει η συνθήκη πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το μήκος κύματος (δηλ. $D > \lambda$). Τονίζεται και πάλι ότι αυτή είναι μια προσεγγιστική / ενδεικτική τιμή, ενώ στην πράξη ανάλογα με το είδος της κεραίας και τυχόν άλλες κεραίες που βρίσκονται κοντά σε αυτή ενδέχεται να απαιτείται μεγαλύτερη απόσταση για να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στο μακρινό πεδίο.

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά της κεραίας στο μακρινό πεδίο είναι αυτή που κυρίως ενδιαφέρει για τις εφαρμογές ασύρματης τηλεπικοινωνίας, επειδή ακριβώς το αντικείμενο των ασύρματων επικοινωνιών είναι η μετάδοση σημάτων μεταξύ κεραιών σε μεγάλη απόσταση. Το εγγύς πεδίο είναι σημαντικό για τη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών παρεμβολών (EMI – ElectroMagnetic Interference) και της ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας (EMC – ElectroMagnetic Compatibility). Κατά συνέπεια η ακτινοβολία της

κεραίας στο μακρινό πεδίο είναι αυτή που κατεξοχήν θα μας απασχολήσει στα επόμενα. Το βασικότερο ίσως μέγεθος που την χαρακτηρίζει είναι η εκπεμπόμενη (ακτινοβολούμενη) ισχύς.

Το μακρινό πεδίο (πεδίο ακτινοβολίας) μιας κεραίας χαρακτηρίζεται από ορισμένα βασικά γνωρίσματα, τα οποία είναι κοινά για όλα τα είδη κεραιών. Οι βασικές αυτές ιδιότητες του πεδίου ακτινοβολίας είναι οι ακόλουθες:

1. Το κύμα διαδίδεται ακτινικά με φορά προς τα έξω (απομακρυνόμενο από την κεραία), δηλ. η διάδοση γίνεται προς την κατεύθυνση r .

2. Το κύμα είναι εγκάρσιο, δηλ. το πεδίο είναι κάθετο προς την διεύθυνση διάδοσης και κατά συνέπεια διαθέτει μόνο τις συνιστώσες $E_\theta, E_\phi, H_\theta, H_\phi$. Οι ακτινικές συνιστώσες είναι μηδενικές (δηλ. σε μεγάλη απόσταση από την κεραία έχουν πρακτικά μηδενισθεί):

$$E_r \cong 0, H_r \cong 0 \quad (4.1.1)$$

3. Οι προαναφερόμενες εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου συνδέονται μεταξύ τους με μια απλή σχέση αναλογίας:

$$E_\theta \cong \zeta H_\phi \quad (4.1.2\alpha)$$

$$E_\phi \cong -\zeta H_\theta \quad (4.1.2\beta)$$

όπου $\zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ η κυματική αντίσταση του χώρου όπου βρίσκεται η κεραία, όπως ορίστηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο του παρόντος.

Από τις παραπάνω ιδιότητες μπορούν να προκύψουν ορισμένα βασικά συμπεράσματα για την σχέση που συνδέει την ακτινοβολούμενη (εκπεμπόμενη) ισχύ στο μακρινό πεδίο με τις τιμές των πεδίων και με την απόσταση από την κεραία. Πιο συγκεκριμένα, η πυκνότητα της ακτινοβολούμενης ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας δίνεται ως γνωστόν από το διάνυσμα Poynting. Εφαρμόζοντας την εξίσωση του διανύσματος αυτού, όπως έχει δοθεί στην Εισαγωγή

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

εκτελώντας την πράξη του εξωτερικού γινομένου και λαμβάνοντας υπόψη την παραπάνω (4.1.1) και το γεγονός ότι $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = -\hat{\phi} \times \hat{\theta} = \hat{r}$, προκύπτει

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] = \frac{1}{2} \text{Re}[E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*](\hat{\theta} \times \hat{\phi}) = P_r(r, \theta, \phi)\hat{r}$$

από όπου φαίνεται και αλγεβρικά ότι το διάνυσμα Poynting στο μακρινό πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα (η οποία φυσικά εξαρτάται από τη θέση r, θ, ϕ), σε συμφωνία με την παραπάνω ιδιότητα (1). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις (4.1.2α-β) παίρνουμε

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*] \cong \frac{1}{2\zeta} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) = \frac{1}{2} \zeta (|H_\theta|^2 + |H_\phi|^2) \quad (4.1.3)$$

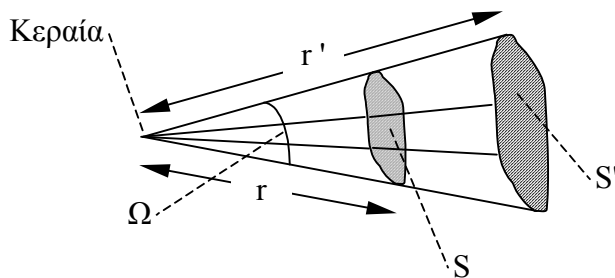
Η (4.1.3) δείχνει ότι η πυκνότητα της ακτινοβολούμενης ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας είναι ανάλογη προς το τετράγωνο των τιμών του πεδίου.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία αλλά με το φανταστικό μέρος αντί για το πραγματικό καταλήγουμε στο ακόλουθο αξιοσημείωτο συμπέρασμα:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*] \cong \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\zeta} (|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2) \right] = 0$$

Δηλαδή η ποσότητα $\frac{1}{2} \operatorname{Im} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$ στο μακρινό πεδίο μηδενίζεται (ενώ στο κοντινό όχι). Η ποσότητα αυτή εκφράζει την ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που παραμένει αποθηκευμένη στο χώρο όπου υπάρχει το πεδίο και δεν μεταδίδεται προς κάποια κατεύθυνση με το κύμα, δηλ. δεν ακτινοβολείται (απλώς μεταβάλλεται ημιτονοειδώς στο χρόνο). Με άλλα λόγια σχετίζεται με την «άερη ισχύ» της κεραίας. Κατά συνέπεια, ο μηδενισμός της ποσότητας αυτής σημαίνει ότι στο μακρινό πεδίο της κεραίας έχουμε μόνο μετάδοση ισχύος προς τα έξω, ενώ στο εγγύς πεδίο υπάρχει και κάποια άερη ισχύς, δηλ. κάποια ενέργεια αποθηκευμένη τοπικά στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο της κεραίας.

Όσον αφορά την εξάρτηση της πυκνότητας ισχύος από την απόσταση, αυτή απορρέει από την παραπάνω ιδιότητα (1) του πεδίου ακτινοβολίας, δηλ. το γεγονός ότι το κύμα διαδίδεται ακτινικά. Ας θεωρήσουμε μια στερεά γωνία με κορυφή την κεραία, δηλ. μια κωνική επιφάνεια με οποιαδήποτε διατομή (δεν είναι ανάγκη να είναι κυκλική) στην κορυφή της οποίας βρίσκεται η κεραία που εκπέμπει, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.2.



Σχ. 4.2: Στερεά γωνία

Το γεωμετρικό μέγεθος της στερεάς γωνίας εκφράζει το άνοιγμα του κώνου και ορίζεται κατά τρόπο ανάλογο προς το μέγεθος της επίπεδης γωνίας. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας οποιεσδήποτε σφαιρικές επιφάνειες (π.χ. με ακτίνες r και r' όπως στο σχήμα) με κέντρο την κορυφή του κώνου, οι επιφάνειες τομής των σφαιρών αυτών με τον κώνο (S και S' στο σχήμα) θα έχουν, όπως είναι γνωστό από τη γεωμετρία (λόγος ομοιότητας), εμβαδά ανάλογα προς το τετράγωνο της εκάστοτε ακτίνας σφαίρας

$$\frac{S}{r^2} = \frac{S'}{r'^2} = \dots \text{ (για οποιαδήποτε ομόκεντρη σφαίρα)}$$

Κατά συνέπεια ο λόγος της επιφάνειας του σφαιρικού τμήματος επί του οποίου βαίνει ο κώνος προς το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας είναι σταθερός (για οποιαδήποτε ακτίνα σφαίρας) και ορίζει την **στερεά γωνία** Ω που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο κώνο:

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (4.1.4)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από την σφαίρα που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό της.

Είναι εμφανής η αναλογία προς την επίπεδη γωνία, η οποία ορίζεται ως ο λόγος του κυκλικού τμήματος επί του οποίου βαίνει η (επίκεντρη) γωνία προς την ακτίνα του κύκλου ($\theta = \ell/r$). Ως γνωστόν, με βάση τον ορισμό αυτό προκύπτει η μονάδα επίπεδης γωνίας που ονομάζεται ακτίνιο (rad). Κατά αντίστοιχο τρόπο η μονάδα της στερεάς γωνίας ονομάζεται **στερεακτίνιο** (sterad). Σημειώνουμε ότι κατά αναλογία προς την (επίπεδη) πλήρη γωνία, η οποία αντιστοιχεί σε έναν πλήρη κύκλο και έχει τιμή 2π rad, ορίζεται η **πλήρης** στερεά γωνία η οποία αντιστοιχεί σε μια πλήρη σφαίρα, δηλ. καλύπτει όλο τον χώρο (το άνοιγμα του «κώνου» είναι όλος ο χώρος) και προφανώς είναι η μέγιστη δυνατή τιμή στερεάς γωνίας. Δεδομένου ότι το εμβαδό σφαίρας είναι $S = 4\pi r^2$, η τιμή της πλήρους στερεάς γωνίας είναι 4π sterad. Σημειώνουμε επίσης ότι από το στοιχειώδες εμβαδό πάνω στην επιφάνεια σφαίρας $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ προκύπτει και η έκφραση για την στοιχειώδη στερεά γωνία που είναι

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.1.5)$$

Με βάση το γεγονός ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς στο μακρινό πεδίο διαδίδεται *ακτινικά* (βλ. την παραπάνω ιδιότητα 1 του πεδίου ακτινοβολίας), προκύπτει το συμπέρασμα ότι η ισχύς που εκπέμπει η κεραία εντός της παραπάνω στερεάς γωνίας *παραμένει μέσα σε αυτή τη στερεά γωνία* χωρίς να διασχίζει τα τοιχώματα του κώνου. Δηλ. η ακτινοβολούμενη ισχύς μέσα στη στερεά γωνία παραμένει σταθερή σε οποιαδήποτε απόσταση, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι ο χώρος όπου βρίσκεται η κεραία δεν έχει απώλειες ισχύος. Αυτό

είναι αληθινό για το κενό καθώς και, κατά προσέγγιση, για τον αέρα (αν αγνοήσουμε την επίδραση των καιρικών φαινομένων) και στο εξής θα υιοθετούμε την παραδοχή αυτή.

Αν θεωρήσουμε στοιχειώδη (απειροστή) στερεά γωνία ($d\Omega \rightarrow 0$), δηλ. ότι το άνοιγμα του κώνου και η αντίστοιχη σφαιρική επιφάνεια $dS = r^2 d\Omega$ τείνει να μηδενισθεί, οπότε οι μεταβολές της πυκνότητας ισχύος πάνω στην στοιχειώδη σφαιρική επιφάνεια dS είναι αμελητέες και η P_r μπορεί να θεωρηθεί σταθερή πάνω σε όλα τα σημεία της επιφάνειας, τότε η αντίστοιχη (στοιχειώδης) ισχύς διαμέσου της στερεάς γωνίας, πάνω σε οποιαδήποτε από τις ομόκεντρες σφαίρες, θα είναι σταθερή και ανεξάρτητη της ακτίνας της σφαίρας. Έτσι, σε τυχούσα απόσταση r (αρκεί να βρισκόμαστε στο μακρινό πεδίο) η στοιχειώδης ισχύς θα είναι

$$dW = P_r(r, \theta, \varphi) dS = P_r(r, \theta, \varphi) r^2 d\Omega$$

ενώ σε κάποια άλλη απόσταση r' η στοιχειώδης ισχύς παραμένει η ίδια

$$dW = P_r(r', \theta, \varphi) dS' = P_r(r', \theta, \varphi) r'^2 d\Omega$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη παίρνουμε

$$r^2 P_r(r, \theta, \varphi) = r'^2 P_r(r', \theta, \varphi) \Leftrightarrow \frac{P_r(r, \theta, \varphi)}{P_r(r', \theta, \varphi)} = \frac{r'^2}{r^2}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακτινοβολούμενη πυκνότητα ισχύος είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την κεραία, ή αλγεβρικά

$$P_r(r, \theta, \varphi) \sim \frac{1}{r^2} \quad (4.1.6)$$

4.2. ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΜΕΓΕΘΗ

4.2.1. Ένταση ακτινοβολίας

Οι βασικές ιδιότητες του μακρινού πεδίου οποιασδήποτε κεραίας, όπως εκτέθηκαν στα προηγούμενα, μας επιτρέπουν να ορίσουμε τα θεμελιώδη μεγέθη και παραμέτρους που χαρακτηρίζουν την ακτινοβολία μιας κεραίας, δηλ. την εκπομπή κυμάτων στο μακρινό πεδίο. Οι ίδιες παράμετροι, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο του παρόντος, χρησιμεύουν και για να περιγράψουν τις ιδιότητες μιας κεραίας και ως προς την λήψη.

Όπως είδαμε στην (4.1.6) παραπάνω, η πυκνότητα ισχύος P_r που εκπέμπει η κεραία στο μακρινό πεδίο είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης από την κεραία, δηλ. της ακτινικής συντεταγμένης r . Βέβαια η P_r παρουσιάζει και γωνιακή μεταβολή εκτός από την ακτινική, δηλ. εξαρτάται και από τις άλλες δύο σφαιρικές συντεταγμένες θ, φ . Επειδή η εξάρτηση από την ακτινική συντεταγμένη r είναι γνωστή και δεδομένη για όλες τις κεραίες, η (4.1.6) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$P_r(r, \theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{r^2} \Leftrightarrow U(\theta, \varphi) = r^2 P_r(r, \theta, \varphi) \quad (4.2.1)$$

Με άλλα λόγια, πολλαπλασιάζοντας την P_r με το τετράγωνο της απόστασης r εξαλείφεται η εξάρτηση από το r και απομένει μια ποσότητα που εξαρτάται μόνο από τις γωνίες θ, φ . Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ένταση ακτινοβολίας (radiation intensity) της κεραίας και η (4.2.1) είναι η εξίσωση ορισμού της.

Η συνολική ισχύς W_{rad} που εκπέμπει η κεραία (συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς) μπορεί, ως γνωστόν, να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διανύσματος Poynting ολοκληρώνοντας αυτό πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια, όπως έχει περιγραφεί στο εισαγωγικό κεφάλαιο του παρόντος. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να εφαρμοσθεί η (E.11) της Εισαγωγής για μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει την κεραία. Θεωρώντας (όπως προαναφέρθηκε) ότι ο χώρος δεν έχει απώλειες ισχύος, συμπεραίνουμε ότι η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς της κεραίας είναι η ίδια για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια περιβάλλει την κεραία, και κατά συνέπεια είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε την απλούστερη δυνατή επιφάνεια για την διευκόλυνση των υπολογισμών. Είναι προφανές ότι η προτιμότερη επιλογή επιφάνειας είναι μια σφαίρα (οποιασδήποτε ακτίνας αρκετά μεγάλης ώστε να βρίσκεται στο μακρινό πεδίο) με κέντρο την κεραία. Για την ολοκλήρωση πάνω στην σφαίρα αυτή απαιτείται η ακτινική συνιστώσα P_r του διανύσματος Poynting (η οποία άλλωστε στο μακρινό πεδίο είναι η μοναδική συνιστώσα του). Εφαρμόζοντας την (E.11) πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας παίρνουμε

$$W_{\text{rad}} = \oiint_S P_r(r, \theta, \varphi) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_r(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.2.2)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.1.5) που δίνει την στοιχειώδη στερεά γωνία, η (4.2.2) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$W_{\text{rad}} = \iint_{\Omega} U(\theta, \varphi) d\Omega \quad (4.2.3)$$

όπου η ολοκλήρωση νοείται πάνω σε μια πλήρη στερεά γωνία (4π sterad).

Η (4.2.3) δεν είναι στην πράξη τόσο χρήσιμη όσο η (4.2.2), αλλά δείχνει με σαφή τρόπο την φυσική σημασία της έντασης ακτινοβολίας. Από αυτή φαίνεται ότι η ένταση ακτινοβολίας εκφράζει την πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα στερεάς γωνίας, η οποία (εφόσον ο χώρος δεν έχει απώλειες) παρουσιάζει μόνο γωνιακή εξάρτηση και είναι ανεξάρτητη από την απόσταση. Εκ των υστέρων βέβαια παρατηρούμε ότι στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί και η προηγούμενη (4.1.6). Κατά συνέπεια, η μονάδα μέτρησης της έντασης ακτινοβολίας θα είναι το W/sterad .

Ισοτροπική, κατευθυντική και ομοιοκατευθυντική κεραία

Ισοτροπική κεραία (isotropic antenna) ή **ισοτροπικός ακτινοβολητής** (isotropic radiator) ονομάζεται μια υποθετική κεραία η οποία ακτινοβολεί με την ίδια πυκνότητα ισχύος προς όλες τις κατευθύνσεις. Η ισοτροπική κεραία δεν είναι δυνατό να κατασκευασθεί ακριβώς και στην πράξη δεν χρησιμεύει* διότι στις εφαρμογές επιθυμητή είναι η συγκέντρωση της εκπεμπόμενης ισχύος προς κάποια ή κάποιες διευθύνσεις. Όμως η ισοτροπική κεραία είναι χρήσιμη στη θεωρία ως κεραία αναφοράς με την οποία συγκρίνονται οι άλλες κεραίες.

Όπως προαναφέρθηκε, η ισοτροπική κεραία ισοκατανέμει την ισχύ προς όλες τις κατευθύνσεις. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση ακτινοβολίας (δηλ. η πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα στερεάς γωνίας) είναι σταθερή. Κατά συνέπεια η τιμή της προκύπτει με απλή διαίρεση της συνολικής εκπεμπόμενης ισχύος W_{rad} προς την πλήρη στερεά γωνία η οποία, όπως προαναφέραμε, είναι ίση με 4π sterad:

$$U_0(\theta, \varphi) = U_0 = \frac{W_{\text{rad}}}{4\pi} \quad (4.2.4)$$

Επομένως, με βάση τη σχέση ορισμού της έντασης ακτινοβολίας (4.2.1), προκύπτει αμέσως η ακτινική συνιστώσα P_r του διανύσματος Poynting της ισοτροπικής κεραίας στο μακρινό πεδίο

$$P_{r0}(r) = \frac{U_0}{r^2} = \frac{W_{\text{rad}}}{4\pi r^2} \quad (4.2.5)$$

Η (4.2.5) δείχνει ότι το διάνυσμα Poynting της ισοτροπικής κεραίας είναι ανεξάρτητο από την κατεύθυνση (θ, φ) όπως άλλωστε είναι προφανές από τον ορισμό της ισοτροπικής κεραίας.

Από την άλλη πλευρά, **κατευθυντική** ονομάζεται μια κεραία η οποία εκπέμπει ή λαμβάνει ισχύ (θα δούμε αργότερα ότι γενικά τα χαρακτηριστικά εκπομπής και λήψης ταυτίζονται) σε ορισμένες κατευθύνσεις πιο αποδοτικά από ό,τι σε άλλες. Προφανώς αν αυτό ερμηνευθεί κατά γράμμα σημαίνει ότι οποιαδήποτε κεραία πλην της ισοτροπικής (δηλαδή ουσιαστικά κάθε κεραία που υπάρχει) είναι κατευθυντική. Στην πράξη όμως κατευθυντική ονομάζεται μια κεραία η οποία παρουσιάζει *σημαντική* διαφοροποίηση της αποδοτικότητας εκπομπής ή λήψης μεταξύ διαφόρων κατευθύνσεων, δηλ. η οποία εκπέμπει ή λαμβάνει *σημαντικά καλύτερα* σε κάποιες κατευθύνσεις από ό,τι στις υπόλοιπες. Η παράμετρος της κεραίας που δείχνει πόσο κατευθυντική είναι ονομάζεται **κατευθυντικότητα** και θα ορισθεί αυστηρά σε επόμενη ενότητα.

* Κεραίες με «ισοτροπική» συμπεριφορά ως προς την πόλωση χρησιμοποιούνται ως αισθητήρες (probes) μετρητών H/M πεδίων για να ανιχνεύουν «ισότιμα» το διάνυσμα του πεδίου κάθε διεύθυνσης και φοράς.

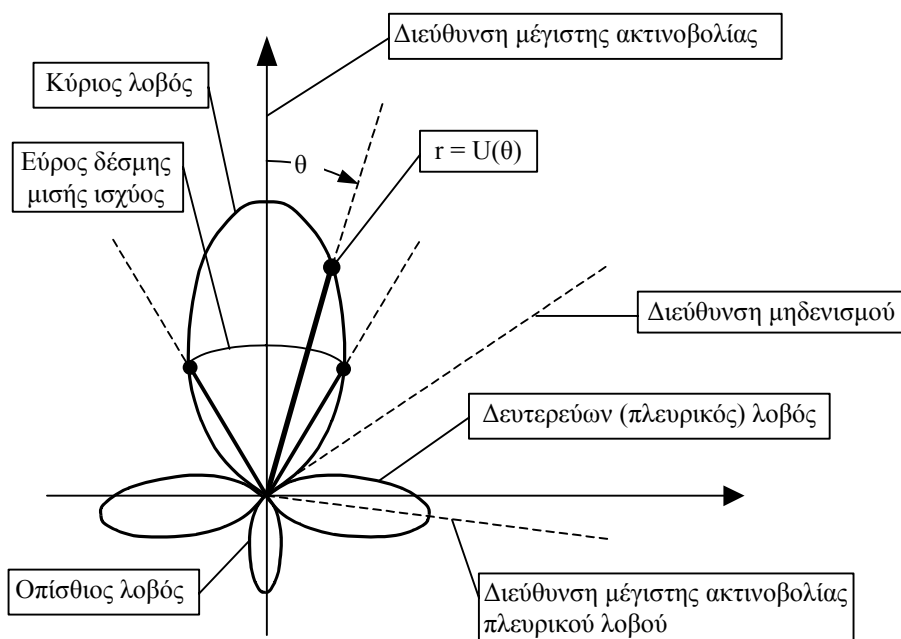
Ειδική περίπτωση κατευθυντικής κεραίας είναι η **ομοιοκατευθυντική** (omnidirectional), η οποία ορίζεται ως κεραία η οποία εκπέμπει (ή λαμβάνει) με κυλινδρική συμμετρία ως προς κάποιον άξονα (που κατά κανόνα θα είναι και άξονας γεωμετρικής συμμετρίας της κεραίας). Ο άξονας αυτός συνήθως λαμβάνεται ως άξονας z στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Με άλλα λόγια, η ακτινοβολία ομοιοκατευθυντικής κεραίας είναι ομοιόμορφη (προσομοιάζει προς την ισοτροπική) ως προς την αζιμουθιακή γωνία ϕ , αλλά κατευθυντική ως προς τη γωνία ανύψωσης θ , και κατά συνέπεια η ένταση ακτινοβολίας της θα είναι της μορφής $U(\theta)$, δηλ. εξαρτάται μόνο από το θ .

4.2.2. Το διάγραμμα ακτινοβολίας

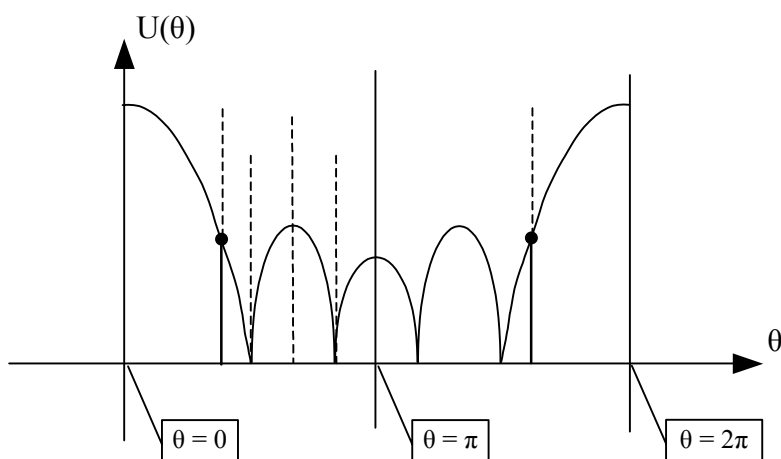
Διάγραμμα ακτινοβολίας κεραίας ονομάζεται η γραφική παράσταση που απεικονίζει την ένταση ακτινοβολίας $U(\theta, \phi)$. Είναι δυνατόν να ορισθεί διάγραμμα ακτινοβολίας και σε άλλες παραλλαγές (π.χ. ως προς άλλα μεγέθη όπως η κατευθυντικότητα που θα ορίσουμε στην επόμενη ενότητα) αλλά αυτή είναι η βασική του μορφή, από την οποία προκύπτουν όλα τα απαραίτητα φυσικά συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά εκπομπής (αλλά και λήψης, όπως θα δούμε) της κεραίας.

Δεδομένου ότι οι μεταβλητές θ, ϕ αναφέρονται στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, συνηθίζεται το διάγραμμα ακτινοβολίας να σχεδιάζεται σε πολική μορφή, δηλ. σε σφαιρικές συντεταγμένες (σε τρεις διαστάσεις) ή πολικές συντεταγμένες (σε δύο διαστάσεις). Δεν είναι απαγορευμένη και η καρτεσιανή μορφή, αλλά το πολικό διάγραμμα είναι πολύ συνηθέστερο στην πράξη. Για τη σχεδίαση του διαγράμματος σε πολική μορφή λαμβάνουμε πάνω σε κάθε ημιευθεία με αρχή την αρχή των συντεταγμένων και κατεύθυνση (θ, ϕ) το σημείο με ακτινική συντεταγμένη $r = U(\theta, \phi)$, δηλ. το σημείο που απέχει από την αρχή απόσταση ίση με την τιμή της έντασης ακτινοβολίας $U(\theta, \phi)$. Η διαδικασία αυτή σε δύο διαστάσεις (δηλ. μόνο σε σχέση με τη γωνία θ) φαίνεται στο ακόλουθο Σχ. 4.3α σε πολική μορφή.

Η αντίστοιχη καρτεσιανή μορφή φαίνεται στο Σχ. 4.3β, όπου είναι προφανές ότι θα έπρεπε να σχεδιασθεί μόνο η περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$ (η επόμενη «περιοχή» $\pi < \theta \leq 2\pi$ δεν ορίζεται καν στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και εμφανίζεται εδώ καταχρηστικά και μόνο για εποπτικούς λόγους).



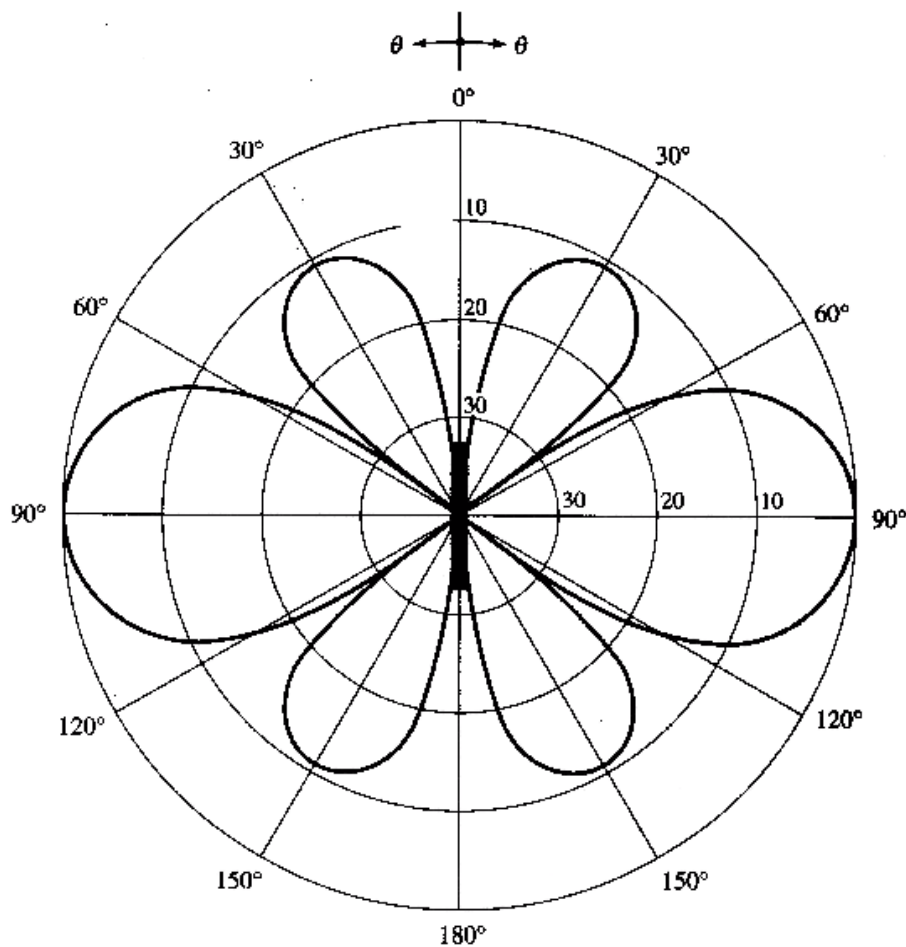
Σχ. 4.3α: Βασικά στοιχεία διαγράμματος ακτινοβολίας (πολική μορφή)



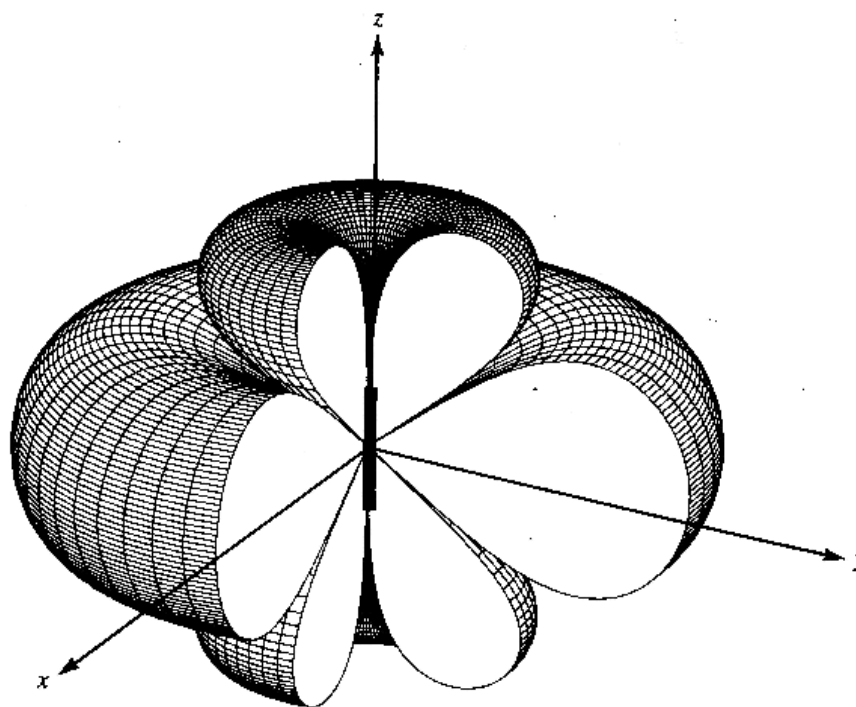
Σχ. 4.3β: Αντίστοιχο διάγραμμα ακτινοβολίας σε καρτεσιανή μορφή

Όπως είναι ευνόητο, για πλήρη απεικόνιση της συμπεριφοράς της κεραίας στο χώρο θα έπρεπε να σχεδιάζεται διάγραμμα ακτινοβολίας σε τρεις διαστάσεις. Εξάιρεση βέβαια αποτελεί η περίπτωση ομοιοκατευθυντικής κεραίας, στην οποία το διάγραμμα ακτινοβολίας παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, δηλ. είναι ένα στερεό εκ περιστροφής, και κατά συνέπεια όλη ουσιαστικά η χρήσιμη πληροφορία περιέχεται σε ένα δισδιάστατο διάγραμμα (μια κατάλληλη τομή του τρισδιάστατου). Εντούτοις και στη γενική περίπτωση για πρακτικούς λόγους (δυσκολία σχεδίασης και απεικόνισης, πλήθος λεπτομερειών που ίσως συσκοτίζουν τα βασικά χαρακτηριστικά) κατά κανόνα σχεδιάζεται ένα ή περισσότερα διαγράμματα σε δύο διαστάσεις, πάνω σε ένα ή περισσότερα επίπεδα που αναδεικνύουν τα κυριότερα χαρακτηριστικά ακτινοβολίας της κεραίας. Συχνά τα δισδιάστατα αυτά διαγράμματα σχεδιάζονται συναρτήσει της γωνίας θ για μια ορισμένη

τιμή της φ , ή συναρτήσει της φ για μια ορισμένη τιμή της θ (κατά κανόνα την $\theta = 0$, δηλ. στο οριζόντιο επίπεδο). Επίσης μια πολύ συνηθισμένη επιλογή είναι το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα συμμετρίας της κεραίας και τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου που εκπέμπει, επονομαζόμενο E-επίπεδο (E-plane), καθώς και, εφόσον απαιτείται, το αντίστοιχο επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα συμμετρίας της κεραίας και τη διεύθυνση του διανύσματος \vec{H} του μαγνητικού πεδίου που εκπέμπει, λεγόμενο H-επίπεδο (H-plane). Για παράδειγμα, σε ένα δίπολο το ηλεκτρικό πεδίο που εκπέμπει, όπως θα δούμε, έχει μόνο θ συνιστώσα (E_θ) και κατά συνέπεια το E-επίπεδο ορίζεται από τον άξονα z (τον άξονα του διπόλου) και τη διεύθυνση $\hat{\theta}$, δηλ. είναι ένα (οποιοδήποτε) μεσημβρινό επίπεδο του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας του διαγράμματος ακτινοβολίας περί τον άξονα z (το δίπολο είναι ομοιοκατευθυντική κεραία), δεν χρειάζεται άλλο διάγραμμα ακτινοβολίας εκτός από το δισδιάστατο διάγραμμα στο E-επίπεδο. Στο Σχ. 4.4 που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα διάγραμμα ακτινοβολίας κάποιου διπόλου στις δύο και στις τρεις διαστάσεις. Όπως είναι προφανές, το τρισδιάστατο διάγραμμα προκύπτει με περιστροφή του δισδιάστατου περί τον άξονα z .



Σχ. 4.4α: Ένα διάγραμμα ακτινοβολίας διπόλου σε δύο διαστάσεις



Σχ. 4.4β: Το διάγραμμα ακτινοβολίας του ίδιου διπόλου σε τρεις διαστάσεις

Όπως παρατηρούμε και από τα προηγούμενα ενδεικτικά διαγράμματα, στο διάγραμμα ακτινοβολίας μιας οποιασδήποτε κεραίας εμφανίζονται κατά κανόνα συγκεκριμένες διευθύνσεις (δηλ. συγκεκριμένες γωνίες θ , φ) κατά τις οποίες η ένταση ακτινοβολίας της κεραίας μηδενίζεται. Οι διευθύνσεις αυτές ονομάζονται **γωνίες μηδενισμού** (ή **σημεία μηδενισμού** ή απλώς **μηδενισμοί**) του διαγράμματος ακτινοβολίας. Το τμήμα του διαγράμματος που βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών ονομάζεται (λόγω του σχήματός του) **λοβός ακτινοβολίας**. Ο ίδιος όρος χρησιμοποιείται και όταν οι διευθύνσεις που περικλείουν τον λοβό δεν είναι ακριβώς διευθύνσεις μηδενισμού αλλά πολύ μικρής έντασης ακτινοβολίας, δηλ. κατάλληλα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης $U(\theta, \varphi)$. Ανάλογα με το είδος της κεραίας, το διάγραμμα ακτινοβολίας της μπορεί να περιέχει έναν ή περισσότερους λοβούς.

Σε κάθε λοβό ακτινοβολίας παρουσιάζεται ένα κατά κανόνα (και μερικές φορές περισσότερα) **σημείο μεγίστου**, δηλ. σημείο (ή σημεία) μεγιστοποίησης της έντασης ακτινοβολίας, ή με άλλα λόγια τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $U(\theta, \varphi)$, σε ορισμένη διεύθυνση (δηλ. γωνία θ, φ) που είναι η διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας του συγκεκριμένου λοβού. Ο μεγαλύτερος λοβός ακτινοβολίας της κεραίας, δηλ. ο λοβός με την μεγαλύτερη τιμή έντασης ακτινοβολίας στο σημείο μεγίστου ονομάζεται **κύριος λοβός** και οι υπόλοιποι λέγονται **δευτερεύοντες** λοβοί. Όπως είναι προφανές, το σημείο μεγίστου του κύριου λοβού αντιστοιχεί στη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας της κεραίας (απόλυτο μέγιστο), η οποία είναι και η βέλτιστη (αποδοτικότερη) διεύθυνση για εκπομπή ή λήψη

από την κεραία αυτή, δηλ. είναι η προτιμητέα διεύθυνση υπό την οποία θα έπρεπε να «βλέπει» την συγκεκριμένη κεραία μια άλλη κεραία δέκτη (κατά την εκπομπή) ή υπό την οποία η συγκεκριμένη κεραία θα έπρεπε να βλέπει την κεραία του πομπού (κατά τη λήψη). Ειδικότερα ο δευτερεύων λοβός ακτινοβολίας που βρίσκεται στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή (δηλ. που περιέχει την αντίθετη από τη μέγιστη διεύθυνση) λέγεται **οπίσθιος** λοβός, ενώ οι υπόλοιποι δευτερεύοντες λοβοί λέγονται **πλευρικοί** (συχνά όμως ο όρος «πλευρικοί» χρησιμοποιείται για όλους τους δευτερεύοντες λοβούς, περιλαμβάνοντας και τον οπίσθιο). Ενδεικτικά παραδείγματα των εννοιών αυτών φαίνονται στο προηγούμενο Σχ. 4.3α (ενώ οι λοβοί ακτινοβολίας δείχνονται και στο Σχ. 4.1).

Είναι φανερό ότι η μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας παρέχει μια πολύ σαφή εικόνα των ποιοτικών χαρακτηριστικών της κεραίας. Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό (και ήδη προαναφέρθηκε), το κυριότερο προτιμητέο γνώρισμα μιας κεραίας είναι το να είναι κατευθυντική, δηλ. να συγκεντρώνει την ακτινοβολούμενη ισχύ προς κάποιες διευθύνσεις όπου θα είναι χρήσιμη και όχι να την διασπείρει. Ποιοτικά η ιδιότητα αυτή φαίνεται στο διάγραμμα ακτινοβολίας από το μέγεθος του κύριου λοβού (όσο μεγαλύτερος ο κύριος λοβός τόσο πιο κατευθυντική η κεραία), καθώς επίσης και από το άνοιγμα του κύριου λοβού (όσο πιο στενός ο κύριος λοβός τόσο πιο κατευθυντική η κεραία). Συναφής προς αυτή είναι και η ιδιότητα της συμπίεσης των πλευρικών λοβών, η οποία αναφέρεται στο σχετικό μέγεθος των δευτερευόντων λοβών σε σύγκριση με τον κύριο λοβό (προτιμητέο είναι μικρότερο μέγεθος των δευτερευόντων λοβών).

Το (απόλυτο) μέγεθος του κύριου λοβού περιγράφεται ποσοτικά από την παράμετρο της κατευθυντικότητας της κεραίας η οποία θα ορισθεί αμέσως μετά. Το σχετικό μέγεθος των δευτερευόντων (πλευρικών) λοβών δίνεται από τον λόγο της ισχύος ενός δευτερευόντος λοβού προς αυτή του κεντρικού, ο οποίος λέγεται **στάθμη** του δευτερευόντος λοβού και εκφράζεται κατά κανόνα σε dB (λογαριθμικά). Τυπικά, πλευρικοί λοβοί με στάθμη χαμηλότερη από -20 dB θεωρούνται ανεκτοί στην πράξη.

Το άνοιγμα (εύρος) του κύριου λοβού εκφράζεται από το λεγόμενο (γωνιακό) **εύρος δέσμης** (beamwidth) ή **άνοιγμα** του λοβού, το οποίο μπορεί να ορισθεί με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι να ορισθεί ως η γωνία που σχηματίζουν οι δύο διευθύνσεις μηδενισμών που περικλείουν τον λοβό, οπότε λέγεται εύρος δέσμης πρώτου μηδενισμού (first null beamwidth – FNBW). Πολύ συχνά χρησιμοποιείται επίσης το λεγόμενο **εύρος δέσμης μισής ισχύος** (half power beamwidth – HPBW) που είναι η γωνία μεταξύ των διευθύνσεων στις οποίες η ένταση ακτινοβολίας είναι η μισή από τη μέγιστη τιμή της. Επειδή η μισή τιμή σε λογαριθμική κλίμακα αντιστοιχεί (ως γνωστόν) σε στάθμη -3 dB, το άνοιγμα αυτό λέγεται και **εύρος δέσμης -3 dB** (ή άνοιγμα -3 dB). Μπορεί επίσης να

ορισθεί το εύρος δέσμης ως προς μία άλλη δεδομένη τιμή στάθμης (π.χ. εύρος δέσμης – 10 dB θα ήταν η γωνία μεταξύ των διευθύνσεων με ένταση ακτινοβολίας 10 dB μικρότερη από τη μέγιστη). Συνήθως χρησιμοποιείται το εύρος δέσμης – 3 dB, και γιαυτό ο όρος «εύρος δέσμης» χωρίς άλλο προσδιορισμό σημαίνει το εύρος δέσμης – 3 dB.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι στην πράξη, όταν σχεδιάζεται μια κεραία, η επιδίωξη να μειωθεί η στάθμη των πλευρικών λοβών και η επιδίωξη να μειωθεί το άνοιγμα του κύριου λοβού είναι «ανταγωνιστικές» μεταξύ τους. Κατά κανόνα η μείωση του ανοίγματος του κύριου λοβού μιας κεραίας προκαλεί αύξηση της στάθμης των πλευρικών λοβών και αντίστροφα. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η ελαχιστοποίηση των πλευρικών λοβών έχει ιδιαίτερη σημασία σε εφαρμογές ραντάρ, διότι σε αυτές το κύμα «φωτίζει» τον στόχο κατά τη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας και το σκεδαζόμενο κύμα από τον στόχο επιστρέφει από την ίδια διεύθυνση, δηλ. μέσω του κύριου λοβού της κεραίας. Κατά συνέπεια αν υπάρξει λήψη από τους πλευρικούς λοβούς της κεραίας θα προέρχεται από άλλα κύματα και όχι από αυτό που ενδιαφέρει, και επομένως θα δημιουργεί ψευδείς ενδείξεις οι οποίες πρέπει να απορρίπτονται.

4.2.3. Κατευθυντικότητα – Κέρδος

Κατευθυντικότητα (directivity) D μιας κεραίας σε κάποια διεύθυνση (θ, φ) ονομάζεται ο λόγος της έντασης ακτινοβολίας της κεραίας προς την ένταση ακτινοβολίας μιας ισοδύναμης ισοτροπικής κεραίας (δηλ. μιας ισοτροπικής κεραίας με την ίδια συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ W_{rad}):

$$D(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_0} = \frac{U(\theta, \varphi)}{\frac{W_{\text{rad}}}{4\pi}} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{W_{\text{rad}}} \quad (4.2.6)$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η κατευθυντικότητα είναι συνάρτηση της διεύθυνσης (θ, φ) . Όταν όμως δεν προσδιορίζεται κάποια διεύθυνση, με τον όρο απλώς «κατευθυντικότητα» εννοείται η μέγιστη τιμή της κατευθυντικότητας D_m , δηλ. η τιμή της στη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας. Αυτή είναι και η συνηθέστερη χρήση του όρου* στην πράξη:

* Παλιότερα ήταν σε χρήση ο όρος «κατευθυντικό κέρδος» (directional gain) για να δηλώσει την τιμή $D(\theta, \varphi)$ του μεγέθους σε μια οποιαδήποτε κατεύθυνση, ενώ ο όρος «κατευθυντικότητα» χρησιμοποιούνταν ειδικά για τη μέγιστη τιμή D_m . Σήμερα, όπως έχει επικρατήσει στην πράξη και περιλαμβάνεται πλέον στα τωρινά διεθνή πρότυπα όπως του IEC (International Electrotechnical Commission) και του IEEE (Institute of Electrical & Electronic Engineers), χρησιμοποιείται και στις δύο περιπτώσεις ο όρος «κατευθυντικότητα», με προσοχή στα συμφραζόμενα ώστε να μην υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

$$D_m = \frac{U_{\max}}{U_0} = 4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}} \quad (4.2.7)$$

όπου U_{\max} είναι η μέγιστη ένταση ακτινοβολίας της κεραίας και W_{rad} η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς αυτής. Για τις υπόλοιπες τιμές κατευθυντικότητας (δηλ. τις τιμές κατευθυντικότητας σε διάφορες διευθύνσεις) προφανώς ισχύει

$$0 \leq D(\theta, \varphi) \leq D_m$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι η κατευθυντικότητα μιας ισοτροπικής κεραίας είναι ίση με τη μονάδα (και σταθερή προς όλες τις διευθύνσεις). Σε οποιαδήποτε άλλη κεραία η (μέγιστη) κατευθυντικότητα είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα και η τιμή της, όπως προαναφέρθηκε, αποτελεί ένα μέτρο του πόσο κατευθυντική είναι η κεραία. Όπως φαίνεται από τις (4.2.6) και (4.2.7), η κατευθυντικότητα είναι αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός). Στην πράξη συνηθίζεται περισσότερο να εκφράζεται αυτή σε λογαριθμική κλίμακα, σε μονάδες dB, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση μετατροπής

$$D_{\text{dB}}(\theta, \varphi) = 10 \log[D(\theta, \varphi)] \quad \text{ή} \quad D_{m, \text{dB}} = 10 \log[D_m]$$

Εισάγοντας στον ορισμό (4.2.7) την εξ. (4.2.2) που δίνει την ακτινοβολούμενη ισχύ κεραίας παίρνουμε:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\max}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (4.2.8)$$

όπου

$$\Omega_A = \frac{W_{\text{rad}}}{U_{\max}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{U(\theta, \varphi)}{U_{\max}} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U_n(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (4.2.9)$$

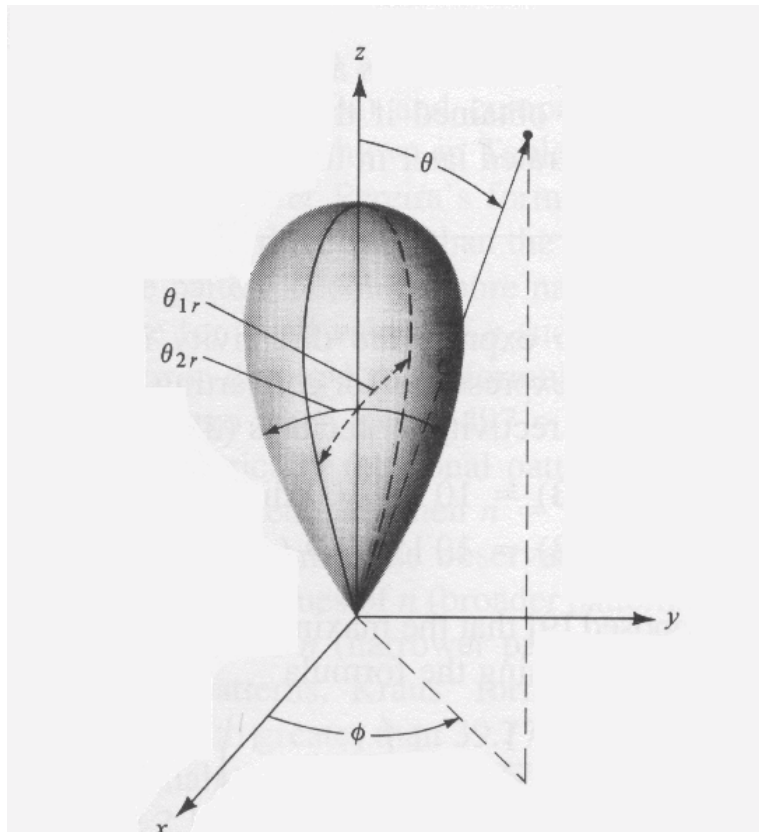
Η ποσότητα Ω_A αποκαλείται **στερεός λοβός ακτινοβολίας** (beam solid angle) και, όπως φαίνεται από την (4.2.9), έχει διαστάσεις στερεάς γωνίας (θυμόμαστε ότι η ένταση ακτινοβολίας εκφράζεται ως ισχύς ανά μονάδα στερεάς γωνίας, δηλ. σε W/sterad), ενώ η συνάρτηση $U_n(\theta, \varphi)$ που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της είναι η κανονικοποιημένη ένταση ακτινοβολίας της κεραίας (δηλ. ανηγμένη στην μέγιστη τιμή της). Η φυσική έννοια του στερεού λοβού ακτινοβολίας είναι η *στερεά γωνία που θα χρειαζόταν για να διέλθει διαμέσου αυτής όλη η ακτινοβολούμενη ισχύς W_{rad} , εάν η κεραία εξέπεμπε ένταση ακτινοβολίας σταθερή και ίση με U_{\max} σε όλες τις κατευθύνσεις εντός αυτής της γωνίας*. Δηλαδή αν μπορούσαμε να κάνουμε την κεραία να εκπέμπει με σταθερή ένταση ακτινοβολίας U_{\max} , τότε η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς της θα περνούσε μέσα από στερεά γωνία ίση με Ω_A . Αυτό γίνεται φανερό αν ξαναγράψουμε την (4.2.9) στη μορφή

$$U_{\max} \Omega_A = W_{\text{rad}}$$

Η παράμετρος Ω_A μπορεί να χρησιμεύσει για να βρεθούν προσεγγιστικοί τύποι για την κατευθυντικότητα σε διάφορες περιπτώσεις κεραιών. Έτσι, για κεραιές που το διάγραμμα ακτινοβολίας τους έχει μόνο έναν και σχετικά στενό κύριο λοβό και πολύ μικρούς (αμελητέους) δευτερεύοντες λοβούς, ισχύει με καλή προσέγγιση

$$\Omega_A \cong \theta_{1r} \theta_{2r} \quad (4.2.10)$$

όπου θ_{1r} και θ_{2r} είναι οι γωνίες ανοίγματος μισής ισχύος (δηλ. το εύρος δέσμης μισής ισχύος που έχει ορισθεί στα προηγούμενα) σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα τα οποία περιέχουν τη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.5 παρακάτω. Είναι προφανές ότι αν ο κύριος λοβός παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία περί τη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας, οι δύο γωνίες ανοίγματος είναι ίσες. Η (4.2.10) ισχύει για τις τιμές των θ_{1r} και θ_{2r} σε rad, ενώ αν αυτές δίνονται σε μοίρες πρέπει πρώτα να γίνει η μετατροπή σε rad με τον γνωστό τρόπο.



Σχ. 4.5: Προσεγγιστικός προσδιορισμός στερεού λοβού ακτινοβολίας

Από την (4.2.10) προκύπτει ο ακόλουθος προσεγγιστικός τύπος για την κατευθυντικότητα:

$$D_m \cong \frac{4\pi}{\theta_{1r} \theta_{2r}} \quad (\text{σε rad}) \quad \text{ή} \quad D_m \cong \frac{41.253}{\theta_{1r} \theta_{2r}} \quad (\text{σε } ^\circ) \quad (4.2.11)$$

όπου η πρώτη μορφή εφαρμόζεται με τιμές σε rad ενώ η δεύτερη σε μοίρες.

Η προσέγγιση αυτή ισχύει υπό τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω (ένας στενός κύριος λοβός, αμελητέοι δευτερεύοντες). Για άλλες περιπτώσεις κεραιών έχουν βρεθεί διαφορετικές προσεγγίσεις, οι οποίες συχνά έχουν παραπλήσια μορφή.

Αντίστοιχη με την κατευθυντικότητα παράμετρος είναι το **κέρδος** (gain) G της κεραίας, το οποίο ορίζεται κατά τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο εμπεριέχοντας όμως και τις τυχόν απώλειες της κεραίας. Συγκεκριμένα, κέρδος κεραίας λέγεται ο λόγος της έντασης ακτινοβολίας της κεραίας προς την ένταση ακτινοβολίας μιας ισοτροπικής κεραίας με ισχύ ίση με την ισχύ εισόδου (και όχι με την ακτινοβολούμενη ισχύ) της κεραίας που εξετάζουμε. Συνεπώς, η εξίσωση ορισμού του κέρδους είναι εντελώς αντίστοιχη με την (4.2.6) ως εξής:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{\frac{W_{in}}{4\pi}} = 4\pi \frac{U(\theta, \varphi)}{W_{in}} \quad (4.2.12)$$

όπου W_{in} είναι η ισχύς που τροφοδοτεί την κεραία στην είσοδό της. Τονίζουμε ότι εδώ εννοείται η ισχύς που πραγματικά παίρνει η κεραία από την γραμμή μεταφοράς (ή κυματοδηγό) που την τροφοδοτεί, δηλαδή είτε υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ανακλάσεις (η κεραία είναι προσαρμοσμένη) είτε, εφόσον υπάρχουν, έχοντας αφαιρέσει το ανακλώμενο κύμα που επιστρέφει προς την πηγή.

Όπως ακριβώς και για την κατευθυντικότητα, το κέρδος γενικά είναι συνάρτηση της διεύθυνσης (θ, φ) , κατά κανόνα όμως χρησιμοποιείται η μέγιστη τιμή του κέρδους η οποία και λέγεται απλώς «κέρδος» χωρίς να προσδιορίζεται κάποια διεύθυνση:

$$G_m = 4\pi \frac{U_{max}}{W_{in}} \quad (4.2.13)$$

Επίσης, όπως και με την κατευθυντικότητα, προτιμάται συνήθως το κέρδος να εκφράζεται σε dB:

$$G_{dB}(\theta, \varphi) = 10 \log[G(\theta, \varphi)] \quad \text{ή} \quad G_{m, dB} = 10 \log[G_m]$$

Τόσο για την κατευθυντικότητα όσο και για το κέρδος, ο δείκτης dB συνήθως παραλείπεται διότι από τη μορφή των χρησιμοποιούμενων τύπων είναι (ή πρέπει να είναι) απόλυτα προφανές σε ποια μονάδα εκφράζεται η συγκεκριμένη ποσότητα (αδιάστατο μέγεθος ή λογαριθμική μορφή σε dB).

Η σχέση που συνδέει την κατευθυντικότητα με το κέρδος κεραίας είναι πολύ απλή και προκύπτει κατευθείαν από τον ορισμό των δύο μεγεθών. Σημειώνουμε πρώτα ότι ο συντελεστής που συνδέει την ισχύ εισόδου (τροφοδοσίας) της κεραίας με την ακτινοβολούμενη ισχύ της λέγεται **συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας** (ή απλώς συντελεστής απόδοσης) της κεραίας και δίνεται από την

$$n_r = \frac{W_{\text{rad}}}{W_{\text{in}}} \Leftrightarrow W_{\text{rad}} = n_r W_{\text{in}} \quad (4.2.14)$$

Ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας εκφράζεται είτε ως κλάσμα είτε ως ποσοστό % και από την (4.2.10) είναι προφανές ότι η τιμή του κυμαίνεται γενικά μεταξύ 0 και 1 (ή μεταξύ 0 και 100%). Στην πράξη η τιμή αυτή είναι κατά κανόνα υψηλή, της τάξεως του 95% ή και καλύτερη, και ο λόγος είναι ότι οι κεραίες γενικά δεν έχουν πολλές απώλειες (π.χ. δεν έχουν κινούμενα μέρη) παρά μόνο τις μικρές θερμικές απώλειες που οφείλονται στα ρεύματα πάνω στην κεραία τα οποία είναι μέτριου μεγέθους ενώ συγχρόνως η αγωγιμότητα της κεραίας είναι πολύ μεγάλη (ή ενδεχομένως και σε ρεύματα αγωγιμότητας, πολύ μικρά όμως, στα διηλεκτρικά υλικά που περιέχουν ορισμένοι τύποι κεραίων).

Εντελώς αντίστοιχα μπορεί να ορισθεί και ο **συντελεστής απωλειών** της κεραίας

$$n_L = \frac{W_L}{W_{\text{in}}} \quad (4.2.15)$$

όπου W_L είναι η ισχύς απωλειών της κεραίας (δηλ. η ισχύς που καταναλώνεται σε θερμικές απώλειες στην κεραία αντί να εκπεμφθεί). Προφανώς ισχύει

$$W_{\text{in}} = W_{\text{rad}} + W_L \quad (4.2.16)$$

και άρα

$$n_r + n_L = 1 \quad (\text{ή } 100\%)$$

Συνδυάζοντας τους ανωτέρω ορισμούς (4.2.6) και (4.2.12) (ή τους (4.2.7) και (4.2.13) αντίστοιχα) και λαμβάνοντας υπόψη την (4.2.14) παίρνουμε

$$G(\theta, \varphi) = n_r D(\theta, \varphi) \quad \text{ή} \quad G_m = n_r D_m \quad (4.2.17)$$

η οποία είναι η σχέση μεταξύ κατευθυντικότητας και κέρδους κεραίας. Προφανώς αυτή πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα (με λογαρίθμηση) στην περίπτωση που η κατευθυντικότητα και το κέρδος εκφραστούν σε dB.

Επισημαίνουμε ότι το κέρδος είναι το προτιμητέο μέγεθος για πρακτική χρήση ενώ η σημασία της κατευθυντικότητας είναι μάλλον θεωρητική, επειδή το κέρδος λαμβάνει υπόψη και τις απώλειες και αναφέρεται στην ισχύ τροφοδοσίας που είναι (προφανώς) πολύ πιο εύκολο να μετρηθεί στην πράξη από ό,τι η ακτινοβολούμενη ισχύς της κεραίας. Στην πράξη π.χ. το κέρδος συχνότερα παρά η κατευθυντικότητα δίνεται από τον κατασκευαστή κάποιας κεραίας στα φύλλα δεδομένων που παρέχει, το κέρδος χρησιμοποιείται (όπως θα δούμε) σε υπολογισμούς ζεύξεων κτλ.

4.3. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΙΣΟΔΟΥ ΚΕΡΑΙΑΣ

4.3.1. Η αντίσταση εισόδου της κεραίας

Μια κεραία προκειμένου να εκπέμψει τροφοδοτείται (προφανώς) από κάποια πηγή η οποία της προσφέρει ισχύ. Αυτό σημαίνει ότι από την πηγή εφαρμόζεται (εναλλασσόμενη) τάση στους ακροδέκτες εισόδου της κεραίας η οποία δημιουργεί ρεύμα που διαρρέει την κεραία. Τα μεγέθη αυτά (τάση εισόδου και ρεύμα της κεραίας) μπορούν να συσχετισθούν μέσω μιας ισοδύναμης σύνθετης αντίστασης (impedance) η οποία ονομάζεται **σύνθετη αντίσταση εισόδου** (ή και απλώς αντίσταση εισόδου) της κεραίας και είναι ο λόγος της τάσης προς το ρεύμα στους ακροδέκτες εισόδου της, σύμφωνα και με τη γενική έννοια της ισοδύναμης σύνθετης αντίστασης που γνωρίζουμε από τη θεωρία κυκλωμάτων. Η σύνθετη αντίσταση εισόδου χαρακτηρίζει* την κεραία ως κυκλωματικό στοιχείο (όπως θα συνέβαινε και για οποιοδήποτε άλλο στοιχείο κυκλώματος). Σημειώνουμε ότι σε περιπτώσεις κεραιών που η είσοδός τους δεν είναι ζεύγος ακροδεκτών αλλά π.χ. άνοιγμα κυματοδηγού, πράγμα που συμβαίνει συνήθως σε κεραίες υψηλότερων συχνοτήτων όπως χοάνες, κάτοπτρα κτλ., η σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας μπορεί να ορισθεί με τη βοήθεια λόγου έντασης ηλεκτρικού πεδίου προς ένταση μαγνητικού πεδίου, κατά τρόπο ανάλογο προς την χαρακτηριστική αντίσταση κυματοδηγού (βλ. το κεφ. 2 του παρόντος). Η σύνθετη αντίσταση εισόδου κεραίας είναι στη γενική περίπτωση μιγαδική και αποτελείται από πραγματικό (ωμικό) και φανταστικό (άεργο) μέρος

$$Z_A = R_A + jX_A \quad (4.3.1)$$

όπου το ωμικό μέρος μπορεί γενικά να αναλυθεί σε δύο τμήματα:

$$R_A = R_r + R_L \quad (4.3.2)$$

Το πρώτο τμήμα R_r λέγεται **αντίσταση ακτινοβολίας** της κεραίας και αντιστοιχεί στην ισχύ που εκπέμπεται (ακτινοβολείται) από την κεραία προς τον χώρο. Το δεύτερο τμήμα R_L λέγεται **αντίσταση απωλειών** της κεραίας και αντιστοιχεί στην ισχύ απωλειών της, δηλ. στο μέρος εκείνο της ισχύος εισόδου που (όπως προαναφέρθηκε) χάνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών πάνω στην κεραία.

Πιο συγκεκριμένα, αν συμβολίσουμε με I το ρεύμα που διαρρέει την κεραία (υπό μορφή phasor, δηλ. μιγαδικού αριθμού), η αντίσταση ακτινοβολίας ορίζεται ως η *ωμική αντίσταση η οποία διαρρέομενη από το ρεύμα I της κεραίας θα απορροφούσε ισχύ ίση με την ισχύ που*

* Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν περιπτώσεις κεραιών για τις οποίες το μοντέλο της σύνθετης αντίστασης που περιγράφεται εδώ δεν ισχύει (όπως π.χ. κεραίες που περιέχουν διηλεκτρικά με απώλειες, ή κεραίες πάνω από έδαφος πεπερασμένης αγωγιμότητας). Ισχύει όμως πολύ καλά για τις «συνηθισμένες» σχετικά απλές κεραίες.

εκπέμπει (ακτινοβολεί) η κεραία, ενώ (κατά ανάλογο τρόπο) η αντίσταση απωλειών ορίζεται ως η ωμική αντίσταση η οποία διαρρέομενη από το ρεύμα I θα απορροφούσε ισχύ ίση με την ισχύ απωλειών της κεραίας. Επομένως εξ ορισμού για τις R_r και R_L ισχύει

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} R_r |I|^2 \quad (4.3.3)$$

$$W_L = \frac{1}{2} R_L |I|^2 \quad (4.3.4)$$

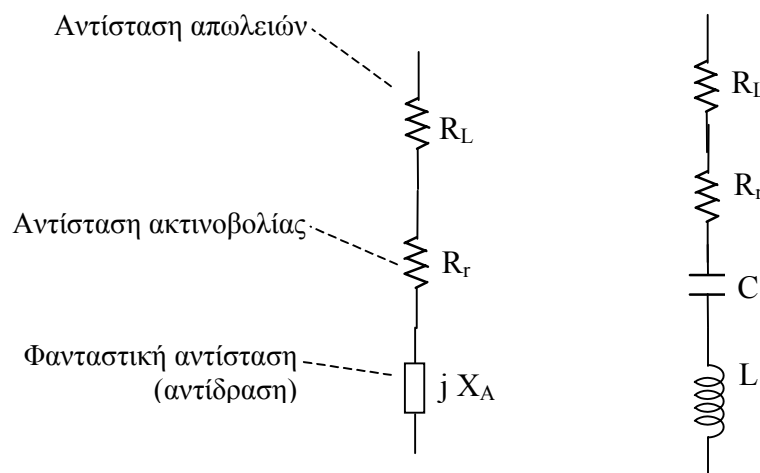
Από τις (4.3.3-4) και την (4.2.16) προκύπτει εύκολα ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας της κεραίας (βλ. τα προηγούμενα) συναρτήσει των δύο αντιστάσεων:

$$\eta_r = \frac{W_{\text{rad}}}{W_{\text{in}}} = \frac{W_{\text{rad}}}{W_{\text{rad}} + W_L} = \frac{R_r}{R_r + R_L} \quad (4.3.5)$$

ενώ εντελώς αντίστοιχα προκύπτει και ο συντελεστής απωλειών της κεραίας:

$$\eta_L = \frac{R_L}{R_r + R_L} \quad (4.3.6)$$

Το συνολικό ωμικό μέρος R_A της σύνθετης αντίστασης εισόδου της κεραίας αποτελείται από τις R_r και R_L , διότι δεν υπάρχει άλλη πραγματική ισχύς στην κεραία εκτός από τις δύο που προαναφέρθηκαν (αυτό λέει και η (4.2.16) ανωτέρω). Το φανταστικό μέρος X_A αντιπροσωπεύει την άεργη ισχύ της κεραίας. Οι τιμές των αντιστάσεων αυτών μπορούν να προσδιορισθούν πειραματικά, καθώς και να υπολογισθούν θεωρητικά με κατάλληλες μεθόδους (ανάλογα και με το είδος της κεραίας). Αξίζει εδώ να παρατηρηθεί ότι για τον υπολογισμό της αντίστασης ακτινοβολίας R_r αρκεί το μακρινό πεδίο της κεραίας, όπως άλλωστε φαίνεται και από την σχέση ορισμού της (4.3.3), ενώ για τον υπολογισμό της X_A θα πρέπει να γνωρίζουμε και το εγγύς πεδίο της κεραίας, όπως υποδεικνύει η γενικότερη παρατήρηση ότι η άεργη ισχύς μιας κεραίας περιέχεται στο εγγύς πεδίο και όχι στο μακρινό πεδίο της.



Σχ. 4.6: Παραλλαγές ισοδύναμης σύνθετης αντίστασης κεραίας

Πρέπει εδώ να επισημανθεί ότι τόσο η τιμή της R_A όσο και της X_A εξαρτώνται από την συχνότητα λειτουργίας, και άρα μια ορισμένη τιμή ισχύει για μια συγκεκριμένη συχνότητα ή, κατά προσέγγιση, για μια μικρή περιοχή (στενή ζώνη) συχνοτήτων γύρω από αυτή. Στην πράξη κατά κανόνα προτιμάται (στο μέτρο του εφικτού) η συχνότητα λειτουργίας της κεραίας να είναι εκείνη στην οποία η σύνθετη αντίσταση εισόδου της γίνεται καθαρά πραγματική, δηλ. το φανταστικό μέρος της $X_A = 0$. Για μια περιοχή γύρω από την συγκεκριμένη αυτή συχνότητα, μια κάπως καλύτερη προσέγγιση της συμπεριφοράς της κεραίας, όπως φαίνεται στο παραπάνω Σχ. 4.6, προκύπτει από ένα ισοδύναμο κύκλωμα RLC, δηλ. αντίστασης σε σειρά με πηνίο και πυκνωτή, το οποίο δίνει και μια εκτίμηση για τη μεταβολή της σύνθετης αντίστασης (δηλ. για την ακρίβεια τη μεταβολή της X_A) με τη συχνότητα. Με αναφορά στο παραπάνω ισοδύναμο κύκλωμα RLC η συχνότητα για την οποία $X_A = 0$ θα ήταν η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος, και για το λόγο αυτό ονομάζεται και συχνότητα συντονισμού (resonant frequency) της κεραίας, ή αντίστοιχα μια κεραία με καθαρά ωμική σύνθετη αντίσταση εισόδου σε ορισμένη συχνότητα αποκαλείται συντονισμένη (όπως θα δούμε και παρακάτω ειδικότερα στην περίπτωση διπόλου $\lambda/2$). Η εν λόγω προσέγγιση ισχύει και πάλι για σχετικά στενή ζώνη συχνοτήτων. Πέρα από αυτή το ισοδύναμο κύκλωμα μπορεί να βελτιωθεί κάπως με την υιοθέτηση κάποιου προσεγγιστικού τύπου για τη μεταβολή της αντίστασης με τη συχνότητα, καθώς και με προσθήκη και άλλων στοιχείων, αλλά από ένα σημείο και πέρα γίνεται υπερβολικά περίπλοκο και χωρίς πρακτική αξία.

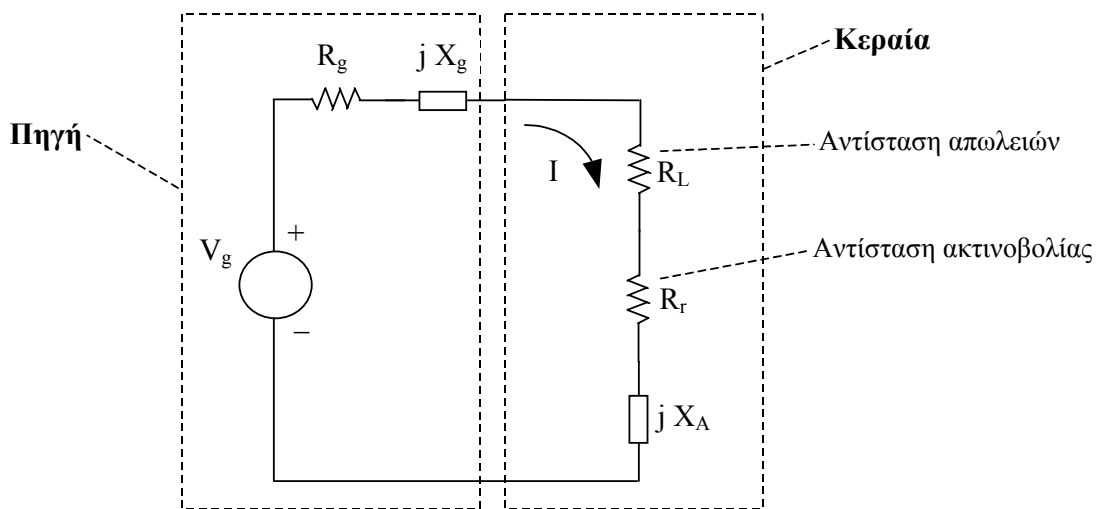
Σημειώνουμε, τέλος, ότι τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση μίας μεμονωμένης κεραίας η οποία εκπέμπει στο χώρο. Στην περίπτωση συνδυασμού περισσότερων κεραιών οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (π.χ. στην περίπτωση μιας στοιχειοκεραίας), το συνολικό ισοδύναμο κύκλωμα δεν είναι πλέον δυνατόν να αντιπροσωπευθεί από μία μόνο σύνθετη αντίσταση αλλά από ένα πολύθυρο (με θύρες όσες και οι κεραίες που αλληλεπιδρούν), και οι εξισώσεις που το διέπουν περιλαμβάνουν όχι μόνο την παραπάνω σύνθετη αντίσταση της κάθε κεραίας, η οποία πλέον ονομάζεται ιδία σύνθετη αντίσταση (self-impedance) της κεραίας, αλλά και τις λεγόμενες αμοιβαίες (mutual) σύνθετες αντιστάσεις οι οποίες εκφράζουν την αλληλεπίδραση (ανά ζεύγη) των εν λόγω κεραιών.

4.3.2. Το ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας εκπομπής

Η σύνθετη αντίσταση εισόδου κεραίας που ορίστηκε προηγουμένως χρησιμεύει για τη μελέτη της συμπεριφοράς της κεραίας όταν συνδεθεί σε κάποιο κύκλωμα. Το κύκλωμα του πομπού που τροφοδοτεί την κεραία μπορεί γενικά να αντιπροσωπευθεί, σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα Thevenin, από το ισοδύναμο αυτού που αποτελείται από μια πηγή

(εναλλασσόμενης) τάσης και την εσωτερική (μυγαδική) αντίσταση της πηγής, το οποίο συνδέεται με τη σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας. Είναι, βέβαια, ευνόητο με βάση τη θεωρία των κυκλωμάτων ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και αντίστοιχο ισοδύναμο κύκλωμα κατά Norton, τόσο για την πηγή όσο και για την κεραία. Επίσης σε περίπτωση που η κεραία τροφοδοτείται μέσω γραμμής μεταφοράς (όπως συνήθως συμβαίνει), θα πρέπει η σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας να θεωρηθεί ως τερματισμός (φορτίο) της γραμμής και η ισοδύναμη πηγή V_g , Z_g να προσδιορισθεί εμπεριέχοντας και τη γραμμή.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ισοδύναμο κύκλωμα κατά Thevenin μιας κεραίας εκπομπής και του πομπού (πηγής) που την τροφοδοτεί φαίνεται στο Σχ. 4.7.



Σχ. 4.7: Ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας εκπομπής

Για να εξετάσουμε τις ισχύεις τόσο στην πηγή όσο και στην κεραία παρατηρούμε ότι το ρεύμα I στο κύκλωμα (που είναι και το ρεύμα της κεραίας) υπολογίζεται εύκολα από την

$$I = \frac{V_g}{Z_g + Z_A} = \frac{V_g}{R_r + R_L + R_g + j(X_A + X_g)} \quad (4.3.7)$$

και το μέτρο του ρεύματος I είναι

$$|I| = \frac{|V_g|}{[(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2]^{1/2}} \quad (4.3.8)$$

Κατά συνέπεια η ισχύς που εκπέμπει η κεραία είναι (σύμφωνα με την (4.3.3) ανωτέρω)

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} R_r |I|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_r}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (4.3.9)$$

και η ισχύς απωλειών στην κεραία

$$W_L = \frac{1}{2} R_L |I|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_L}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (4.3.10)$$

ενώ επίσης η ισχύς που καταναλώνεται εσωτερικά στην πηγή (στην εσωτερική αντίσταση R_g) υπό μορφή θερμικών απωλειών είναι

$$W_g = \frac{1}{2} R_g |I|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_g}{(R_r + R_L + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2} \quad (4.3.11)$$

Είναι φανερό ότι το σύνολο των τριών παραπάνω τμημάτων αποτελεί την ολική ισχύ $W_{ολ}$ που προσφέρει η πηγή στο κύκλωμα. Από αυτή ένα μέρος εκπέμπεται από την κεραία, ένα (μικρό) μέρος χάνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών πάνω στην κεραία και ένα (σημαντικό) μέρος χάνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών στην πηγή, δηλ. στο κύκλωμα του πομπού:

$$W_{ολ} = W_g + W_{rad} + W_L \quad (4.3.12)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης μεταβίβασης ισχύος (ή θεώρημα συζυγούς προσαρμογής), γνωστό από τη θεωρία κυκλωμάτων, η πηγή παρέχει την μέγιστη δυνατή ισχύ στο φορτίο, δηλ. εδώ στην κεραία, όταν η σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας είναι συζυγής προς την εσωτερική αντίσταση της πηγής ($Z_g = Z_A^*$), δηλ.

$$\begin{aligned} R_r + R_L &= R_g \\ X_A &= -X_g \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Το θεώρημα λέει ουσιαστικά ότι αυτή είναι η καλύτερη δυνατή περίπτωση μεταφοράς ισχύος προς την κεραία από την πηγή. Στην περίπτωση αυτή οι τύποι για την ισχύ απλοποιούνται ως εξής:

$$W_{rad} = \frac{1}{2} R_r |I|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_r}{4(R_r + R_L)^2} = \frac{|V_g|^2}{8} \frac{R_r}{(R_r + R_L)^2} \quad (4.3.14)$$

και

$$W_g = \frac{1}{2} R_g |I|^2 = \frac{|V_g|^2}{8} \frac{R_g}{(R_r + R_L)^2} = \frac{|V_g|^2}{8R_g} \quad (4.3.15)$$

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι στην καλύτερη περίπτωση, δηλ. όταν η κεραία είναι χωρίς απώλειες και συζυγώς προσαρμοσμένη με την αντίσταση εξόδου του πομπού, μπορεί να εκπεμφθεί η μισή από την ισχύ που παρέχει ο πομπός ενώ η άλλη μισή χάνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών στο κύκλωμα του πομπού ($W_g = W_{rad}$). Στις λοιπές περιπτώσεις το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος του πομπού πηγαίνει σε απώλειες ($W_g + W_L > W_{rad}$).

Σημειώνεται ότι αντίστοιχο ισοδύναμο κύκλωμα, στο οποίο υπεισέρχεται και πάλι η σύνθετη αντίσταση εισόδου της κεραίας αλλά με κάπως διαφορετικό τρόπο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κεραία σε κατάσταση λήψης (ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας λήψης). Το κύκλωμα αυτό θα εξετασθεί σε επόμενη ενότητα του παρόντος.

4.3.3. Το εύρος ζώνης κεραίας

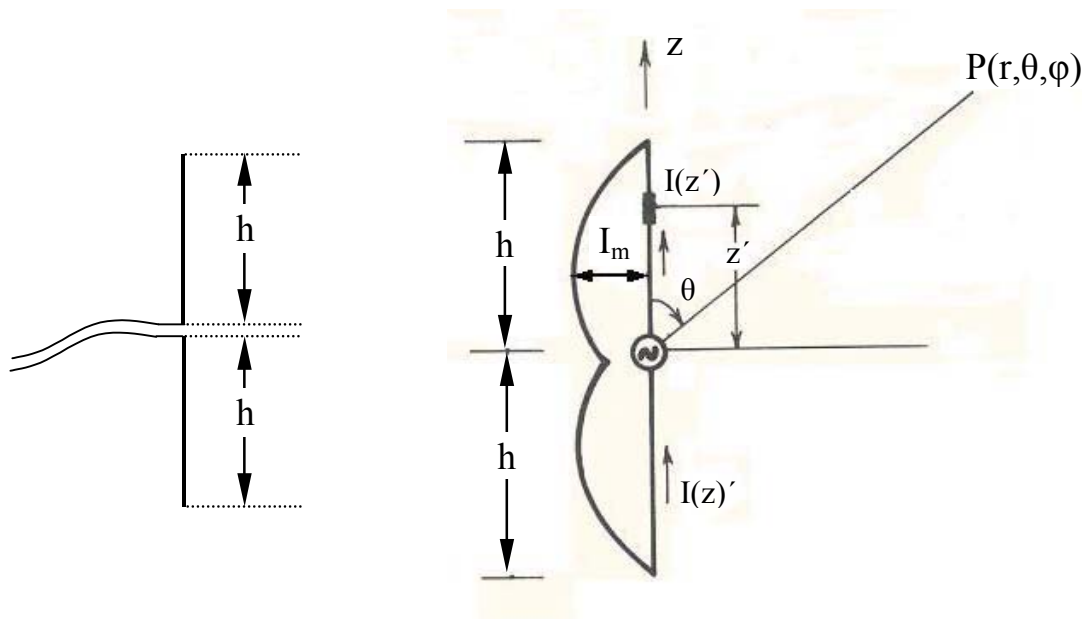
Ως **εύρος ζώνης** κεραίας γενικά ορίζεται το εύρος της περιοχής συχνοτήτων εντός της οποίας κάποιο χαρακτηριστικό (παράμετρος) της κεραίας (όπως π.χ. η κατευθυντικότητα ή το κέρδος, το εύρος δέσμης κύριου λοβού, η σύνθετη αντίσταση εισόδου κ.α.) παραμένει μέσα σε κάποια προκαθορισμένα πλαίσια, δηλ. ικανοποιεί κάποια συνθήκη «καλής συμπεριφοράς» (π.χ. το κέρδος διαφέρει το πολύ 1 dB από τη μέγιστη τιμή του, η φανταστική αντίσταση εισόδου είναι λιγότερο από 10% της πραγματικής κτλ.). Με την έννοια αυτή, είναι φανερό ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντος ορισμός του εύρους ζώνης διότι αυτό εξαρτάται από το μέγεθος ως προς το οποίο το ορίζουμε και ως προς τη συνθήκη η οποία απαιτούμε να ικανοποιείται. Η «ασάφεια» αυτή στον ορισμό οφείλεται σε πρακτικούς λόγους, επειδή ανάλογα με την συγκεκριμένη εφαρμογή της κεραίας διαφέρει και η παράμετρος αυτής που έχει τη μεγαλύτερη σημασία, αλλά και η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί. Συνηθισμένες παράμετροι κεραίας ως προς τις οποίες ορίζεται το εύρος ζώνης της είναι μεταξύ άλλων το κέρδος, το εύρος δέσμης και η αντίσταση εισόδου.

Η περιοχή συχνοτήτων αυτή κατά κανόνα λαμβάνεται γύρω από μία κεντρική συχνότητα στην οποία η σχετική παράμετρος λαμβάνει την «άριστη» τιμή της, π.χ. (κατά περίπτωση) τη συχνότητα όπου η κεραία παρουσιάζει μέγιστο κέρδος ή εκείνη όπου παρουσιάζει καθαρά ωμική αντίσταση εισόδου (η οποία, όπως προαναφέρθηκε, αποκαλείται συχνότητα συντονισμού της κεραίας). Στις περιπτώσεις όπου η περιοχής αυτή είναι σχετικά μικρή (στενή ζώνη) συνηθίζεται το εύρος ζώνης να εκφράζεται ως ποσοστό % της κεντρικής συχνότητας. Για παράδειγμα, εύρος ζώνης 5% σημαίνει ότι η διαφορά της ανώτερης από την κατώτερη συχνότητα της εν λόγω περιοχής είναι ίση με το 5% της κεντρικής συχνότητας. Στις περιπτώσεις μεγάλης περιοχής συχνοτήτων (ευρείας ζώνης) συνήθως το εύρος ζώνης εκφράζεται ως λόγος της ανώτερης συχνότητας προς την κατώτερη, π.χ. εύρος ζώνης 5 : 1 σημαίνει ότι η ανώτερη συχνότητα είναι πενταπλάσια από την κατώτερη.

4.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΑ ΔΙΠΟΛΑ

4.4.1. Γενικά

Τα δίπολα αποτελούν την απλούστερη, αρχαιότερη ιστορικά και ίσως την πιο διαδεδομένη μέχρι και σήμερα κατηγορία κεραιών. Αποτελούνται (όπως δείχνει και το όνομα) από δύο μεταλλικά στελέχη τοποθετημένα στην ίδια ευθεία (τον **άξονα** του διπόλου), με ένα μικρό **διάκενο** μεταξύ τους (συνήθως θεωρείται κατά προσέγγιση μηδενικό) και τροφοδοτούμενα στα κοντινά άκρα τους (τη **βάση** του διπόλου) κατευθείαν από την έξοδο του πομπού ή (το συνηθέστερο προκειμένου για εκπομπή) μία γραμμή μεταφοράς (διότι η κεραιά εκπομπής κατά κανόνα θα είναι τοποθετημένη σε σχετικά υψηλό σημείο προκειμένου να μειώνεται η επίδραση εμποδίων όπως κοντινά κτίρια κτλ.) Η γεωμετρία ενός τυπικού διπόλου μήκους $2h$ φαίνεται στο Σχ. 4.8α, ενώ στο Σχ. 4.8β παρουσιάζεται και μια ενδεικτική κατανομή του ρεύματος πάνω στα δύο στελέχη του διπόλου, όπου οι φορές των ρευμάτων δείχνουν ότι το ρεύμα εισέρχεται από τη γραμμή στο ένα στέλεχος και επιστρέφει από το άλλο, όπως και πραγματικά συμβαίνει. Το «κύκλωμα» μεταξύ των δύο στελεχών κλείνει διαμέσου του περιβάλλοντος χώρου λόγω των εναλλασσόμενων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων (δηλ. των ρευμάτων μετατόπισης) που αναπτύσσονται στο χώρο. Εναλλακτικά (αλλά ισοδύναμα) μπορούμε να θεωρούμε το δίπολο ως μια «παραμορφωμένη» παραλλαγή πυκνωτή, όπου τα στελέχη αντιστοιχούν στους δύο οπλισμούς. Το εναλλασσόμενο ρεύμα καταφέρνει να περάσει από το δίπολο εξαιτίας των διαδοχικών φορτίσεων και εκφορτίσεων των δύο «οπλισμών».



Σχ. 4.8α: Γεωμετρία διπόλου Σχ. 4.8β: Κατανομή ρεύματος στο δίπολο

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι το πάχος των αγωγών που αποτελούν τα μεταλλικά στελέχη έχει κάποια επίδραση στα χαρακτηριστικά του διπόλου, σε πρώτη προσέγγιση

όμως μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο, δηλ. οι αγωγοί θεωρούνται απείρως λεπτοί («νηματοειδείς»). Η προσέγγιση αυτή επαρκεί για τη μελέτη των χαρακτηριστικών ακτινοβολίας του διπόλου, ενώ αργότερα όταν θα αναφερθούμε στην σύνθετη αντίσταση εισόδου του θα λάβουμε υπόψη και το πάχος.

4.4.2. Το ρεύμα στο δίπολο

Η κατανομή του ρεύματος πάνω στο δίπολο εξαρτάται από το μήκος $2h$ του διπόλου. Πιο συγκεκριμένα, για δίπολο πολύ μικρού μήκους ($2h \ll \lambda$), το οποίο ονομάζεται και δίπολο Hertz, το ρεύμα μπορεί να θεωρηθεί περίπου σταθερό

$$I(z') \cong I = \text{σταθ.} \quad , \quad -h \leq z' \leq h$$

ενώ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις διπόλων δίνεται με καλή προσέγγιση από την

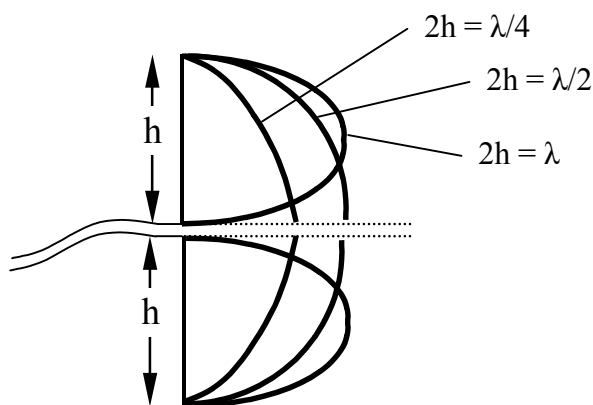
$$I(z') = I_m \sin[k(h - |z'|)] \quad , \quad -h \leq z' \leq h \quad (4.4.1)$$

όπου η μεταβλητή z' προσδιορίζει τη θέση κάθε σημείου πάνω στο δίπολο και I_m είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος. Παρατηρούμε ότι η ρευματική αυτή κατανομή είναι ημιτονοειδούς μορφής και μηδενίζεται πάντοτε στα άκρα του διπόλου ($z' = \pm h$), ενώ η θέση όπου εμφανίζεται η μέγιστη τιμή ρεύματος εξαρτάται από το μήκος $2h$ του διπόλου *εκφρασμένο σε μήκη κύματος*. Αυτό γίνεται φανερό αν ξαναγραφεί η παραπάνω εξ. (4.4.1) λαμβάνοντας υπόψη ότι $k = 2\pi/\lambda$:

$$I(z') = I_m \sin \left[2\pi \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{|z'|}{\lambda} \right) \right] \quad , \quad -h \leq z' \leq h$$

όπου λ το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας του διπόλου.

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι από τον λόγο h/λ εξαρτάται ποιο τμήμα της περιόδου ενός ημιτόνου αντιπροσωπεύει η κατανομή του ρεύματος πάνω στο δίπολο. Καθώς το z' μεταβάλλεται από 0 ως h (ή από 0 ως $-h$, που είναι το ίδιο), η τιμή του ρεύματος μεταβάλλεται από $I_m \sin(0) = 0$ ως $I_m \sin(2\pi h/\lambda)$. Για παράδειγμα, αν $2h = \lambda/4$ δηλ. $h = \lambda/8$, τότε $2\pi h/\lambda = \pi/4$ και το ημίτονο διατρέχει την περιοχή τιμών $\sin(0)$ ως $\sin(\pi/4)$. Κατά συνέπεια η ρευματική κατανομή στο δίπολο συμπεριφέρεται σαν $1/8$ της περιόδου ημιτόνου, ενώ αντίστοιχα για $2h = \lambda/2$ συμπεριφέρεται σαν $1/4$ περιόδου, για $2h = \lambda$ σαν ημιπερίοδος κ.ο.κ. Ενδεικτικές περιπτώσεις κατανομών για διάφορα μήκη διπόλου παρουσιάζονται στο Σχ. 4.9 που ακολουθεί. Πρέπει να τονισθεί ότι οι εν λόγω κατανομές ρεύματος αντιστοιχούν είτε σε διαφορετικά δίπολα (με διαφορετικό μέγεθος) που λειτουργούν στην ίδια συχνότητα είτε σε διαφορετικές τιμές του μήκους κύματος, δηλ. διαφορετικές συχνότητες λειτουργίας για το ίδιο δίπολο.



Σχ. 4.9: Κατανομές ρεύματος για διάφορες περιπτώσεις διπόλων

4.4.3. Το στοιχειώδες δίπολο (Δίπολο Hertz)

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, **δίπολο Hertz** ονομάζεται ένα δίπολο με μήκος πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος ($2h \ll \lambda$), στο οποίο το ρεύμα είναι κατά προσέγγιση σταθερό. Το απλό αυτό μοντέλο είναι χρήσιμο κυρίως σε περιπτώσεις χαμηλών συχνοτήτων (της τάξεως των kHz) στις οποίες το μήκος κύματος είναι τόσο μεγάλο (π.χ. για συχνότητα 500 kHz έχουμε $\lambda = 600$ m, για συχνότητα 1 MHz είναι $\lambda = 300$ m κ.ο.κ.) ώστε η προαναφερόμενη συνθήκη $2h \ll \lambda$ ισχύει για τις περισσότερες τιμές φυσικού μήκους $2h$ του διπόλου που ενδέχεται να εμφανιστούν στην πράξη.

Με βάση την (σταθερή) κατανομή του ρεύματος πάνω στο δίπολο Hertz, με κατάλληλη χρήση των εξισώσεων Maxwell μπορούν να βρεθούν οι εκφράσεις που δίνουν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που εκπέμπει το δίπολο, οι οποίες μάλιστα στην περίπτωση του διπόλου Hertz προκύπτουν απλούστερες από ό,τι για τα άλλα είδη διπόλων. Εδώ θα περιορισθούμε στην περιοχή του μακρινού πεδίου (πεδίου ακτινοβολίας), η οποία (όπως έχει εξηγηθεί) είναι η κατεξοχήν περιοχή ενδιαφέροντος. Στο μακρινό πεδίο οι γενικές εκφράσεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων του διπόλου απλοποιούνται ακόμη περισσότερο και γράφονται ως εξής

$$H_{\phi}(r, \theta) \cong \frac{jkI2h}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} \quad (4.4.2a)$$

$$E_{\theta}(r, \theta) \cong \frac{j\omega\mu I2h}{4\pi r} \sin \theta e^{-jkr} = \zeta H_{\phi} \quad (4.4.2b)$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα και k ο γωνιακός κυματικός αριθμός που αντιστοιχεί στην συχνότητα λειτουργίας (ως γνωστόν $\omega = 2\pi f$ και $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$), I το ρεύμα του διπόλου και ζ η **κυματική αντίσταση** του χώρου στον οποίο λειτουργεί το δίπολο, δηλ. στην συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων του ελεύθερου χώρου (κενό ή αέρας) η οποία έχει οριστεί στο εισαγωγικό κεφάλαιο του παρόντος

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

ενώ ειδικά για τον ελεύθερο χώρο (κενό ή αέρα) η αριθμητική τιμή της είναι

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 120\pi \text{ (σε Ohm)} \quad (4.4.3)$$

Όπως δείχνουν οι παραπάνω εξισώσεις, το πεδίο ακτινοβολίας του διπόλου Hertz (αλλά και κάθε διπόλου όπως θα φανεί λίγο αργότερα) αποτελείται από μία μόνο συνιστώσα για κάθε πεδίο (η θ συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου και η ϕ συνιστώσα του μαγνητικού). Είναι προφανές ότι το πεδίο αυτό υπακούει στις γενικές ιδιότητες του πεδίου ακτινοβολίας (4.1.1-2) που ισχύουν για κάθε κεραία, όπως έχει αναφερθεί στα προηγούμενα.

Το πεδίο αυτό παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία διότι όλες οι συνιστώσες του εξαρτώνται μόνο από τη γωνία θ και είναι ανεξάρτητες από την ϕ , πράγμα που από φυσική άποψη οφείλεται στην κυλινδρική συμμετρία της γεωμετρίας του διπόλου. Οι συνιστώσες αυτές είναι προφανώς κάθετες μεταξύ τους. Είναι επίσης ομοφασικές (σε φάση), όπως φαίνεται από το γεγονός ότι οι ανωτέρω εκφράσεις δίνουν *το ίδιο όρισμα* για τις μιγαδικές τιμές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, και μάλιστα το ηλεκτρικό πεδίο είναι απλό πολλαπλάσιο του μαγνητικού με συντελεστή αναλογίας την κυματική αντίσταση (υπενθυμίζουμε και το αντίστοιχο φαινόμενο που έχει παρατηρηθεί στην περίπτωση κυματοδηγού). Παρατηρούμε ακόμη ότι, όπως προκύπτει από τις εν λόγω εκφράσεις και το γεγονός ότι $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$, το διάνυσμα Poynting έχει μόνο r συνιστώσα:

$$\bar{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_\theta H_\phi^*](\hat{\theta} \times \hat{\phi}) = P_r \hat{r}$$

όπου

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[E_\theta H_\phi^*]$$

δηλαδή η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι *ακτινική*, και κατά συνέπεια το κύμα του διπόλου στο μακρινό πεδίο είναι *εγκάρσιο*, δηλ. τα κυμαινόμενα διανύσματα E και H είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης. Έτσι επιβεβαιώνονται και πάλι, στη συγκεκριμένη περίπτωση διπόλου, οι *γενικές ιδιότητες* που έχουν αναφερθεί για το μακράν πεδίο *οποιασδήποτε* κεραίας. Πρόκειται για **σφαιρικό κύμα**, πράγμα που σημαίνει ότι οι *επιφάνειες σταθερής φάσης* είναι *σφαιρικές*, όπως δείχνουν οι παραπάνω εκφράσεις των E_θ και H_ϕ στις οποίες η φάση (δηλ. το όρισμα των μιγαδικών τιμών των E_θ και H_ϕ) εξαρτάται *μόνο* από την συνιστώσα r (και άρα πάνω σε επιφάνεια σταθερού r , δηλ. σφαίρα, η φάση είναι σταθερή). Σημειώνουμε το γεγονός ότι η διεύθυνση διάδοσης του κύματος (εδώ

ακτινική) είναι κάθετη στις επιφάνειες σταθερής φάσης, πράγμα που αποτελεί γενικό κανόνα για όλα τα κύματα που αναπτύσσονται σε ισοτροπικά μέσα (μια παραλλαγή του κανόνα αυτού ισχύει και σε ανισοτροπικά μέσα, τα οποία όμως ξεφεύγουν από τα πλαίσια του παρόντος). Αξίζει εδώ να επισημανθεί η φυσική ομοιότητα που παρουσιάζει το εν λόγω σφαιρικό κύμα στο μακρινό πεδίο με το επίπεδο κύμα που έχει παρουσιασθεί στο εισαγωγικό κεφάλαιο, εάν το παρατηρήσουμε κατά μήκος μιας ακτίνας πάνω στην οποία διαδίδεται. Αυτό διότι σε μεγάλες αποστάσεις r (δηλ. μεγάλες ακτίνες) ένα τμήμα σφαιρικής επιφάνειας τοπικά προσομοιάζει με τμήμα επιπέδου κάθετο στην ακτίνα (και εφαπτόμενο στη σφαίρα).

Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες εκφράσεις των E_θ και H_ϕ για το μακρινό πεδίο παίρνουμε την έκφραση για την τιμή του διανύσματος Poynting

$$P_r(r, \theta) = \frac{\zeta(k|I|2h)^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \quad (4.4.4)$$

από την οποία προκύπτει αμέσως η σχέση για την ένταση ακτινοβολίας

$$U(\theta) = \frac{\zeta(k|I|2h)^2}{32\pi^2} \sin^2 \theta = U_{\max} \sin^2 \theta \quad (4.4.5)$$

όπου U_{\max} η μέγιστη τιμή της έντασης ακτινοβολίας, η οποία εμφανίζεται για $\theta = 90^\circ$, δηλ. στο μεσοκάθετο επίπεδο του διπόλου (όπου $\sin\theta = 1$). Όπως είναι προφανές από τα παραπάνω, οι πεδιακές συνιστώσες στο μακρινό πεδίο μειώνονται αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση, δηλ. με εξάρτηση της μορφής $1/r$, και κατά συνέπεια η πυκνότητα ισχύος παρουσιάζει εξάρτηση της μορφής $1/r^2$ (σε συμφωνία με τον γενικό κανόνα για το πεδίο ακτινοβολίας κάθε κεραίας), ενώ η ένταση ακτινοβολίας είναι ανεξάρτητη από το r (όπως πρέπει) και εξαρτάται μόνο από το θ , σύμφωνα και με τις προηγούμενες παρατηρήσεις για την κυλινδρική συμμετρία του πεδίου.

Η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς από το δίπολο μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας την ένταση ακτινοβολίας του διπόλου πάνω στην πλήρη στερεά γωνία

$$W_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 2\pi \int_0^\pi U(\theta) \sin \theta \, d\theta = 2\pi \frac{\zeta(k|I|2h)^2}{32\pi^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \quad (4.4.6)$$

Αντικαθιστώντας $k = 2\pi/\lambda$ και εκτελώντας την ολοκλήρωση

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = \dots = \frac{4}{3}$$

(η οποία μπορεί να εκτελεσθεί με αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$ οπότε $dx = -\sin\theta \, d\theta$, επομένως $\sin^3\theta \, d\theta = -(1-x^2) \, dx$ και οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση), προκύπτει τελικά

$$W_{\text{rad}} = \frac{\zeta\pi|I|^2}{3} \left(\frac{2h}{\lambda}\right)^2 \quad (4.4.7)$$

ενώ από την παραπάνω προκύπτει, με βάση τον ορισμό (4.3.3), και η σχέση για την αντίσταση ακτινοβολίας του διπόλου

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2}R_r|I|^2 \Rightarrow R_r = \frac{2}{3}\pi\zeta\left(\frac{2h}{\lambda}\right)^2 \quad (4.4.8)$$

Η (μέγιστη) κατευθυντικότητα του διπόλου Hertz προκύπτει από τον γενικό ορισμό της κατευθυντικότητας, αντικαθιστώντας την συνολική ακτινοβολούμενη ισχύ W_{rad} και την μέγιστη τιμή U_{max} της έντασης ακτινοβολίας που έχουν δοθεί προηγουμένως:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\text{max}}}{W_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{\zeta(k|I|2h)^2}{32\pi^2} \frac{3}{\zeta\pi|I|^2} \left(\frac{\lambda}{2h}\right)^2 = \dots = 1,5 \quad (4.4.9)$$

ενώ σε dB είναι

$$(D_m)_{\text{dB}} = 10 \log(1,5) \cong 1,761 \text{ dB} \quad (4.4.10)$$

4.4.4. Δίπολο οποιουδήποτε μήκους

Στη γενικότερη περίπτωση διπόλου με οποιοδήποτε μήκος $2h$ (για το οποίο η κατανομή ρεύματος έχει δοθεί στα προηγούμενα) οι εκφράσεις για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία και τα λοιπά σχετικά μεγέθη είναι πιο περίπλοκες, αλλά τα βασικά γνωρίσματα του ακτινοβολούμενου κύματος στο μακρινό πεδίο, που έχουν ήδη παρατηρηθεί στο δίπολο Hertz, ισχύουν και εδώ (τα περισσότερα άλλωστε ισχύουν για κάθε κεραία). Το κύμα στο μακρινό πεδίο διαδίδεται ακτινικά, παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, είναι εγκάρσιο και περιέχει μόνο τις συνιστώσες E_θ και H_ϕ οι οποίες συνδέονται με απλή αναλογία η μία με την άλλη. Πιο συγκεκριμένα, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στο μακρινό πεδίο δίνονται από την:

$$E_\theta(r, \theta) = \zeta H_\phi(r, \theta) \cong \frac{j\zeta I_m}{2\pi r} \left[\frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)}{\sin \theta} \right] e^{-jkr} \quad (4.4.11)$$

ενώ από την ανωτέρω έκφραση των E_θ και H_ϕ προκύπτει εύκολα (όπως στα προηγούμενα) το διάνυσμα Poynting και ακολούθως η ένταση ακτινοβολίας

$$U(\theta) \cong \frac{\zeta|I_m|^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)}{\sin \theta} \right]^2 \quad (4.4.12)$$

όπου $|I_m|$ είναι το μέτρο της μέγιστης τιμής του ρεύματος πάνω στο δίπολο (σύμφωνα με την κατανομή ρεύματος που έχει δοθεί προηγουμένως), η οποία όπως έχει επισημανθεί μπορεί να εμφανίζεται είτε στο μέσο του διπόλου (στη θέση $z' = 0$, δηλ. στους ακροδέκτες) είτε σε άλλο σημείο του, ανάλογα με το μήκος $2h$. Εφόσον εμφανίζεται στο

μέσο του διπόλου, δηλ. εφόσον $I_m = I(0)$, η τιμή αυτή έχει σαφές φυσικό νόημα: αποτελεί το ρεύμα εισόδου του διπόλου (λέγεται και **ρεύμα βάσης** διότι εμφανίζεται στη «βάση» του διπόλου) και θα μπορούσε εύκολα να μετρηθεί και πειραματικά στη θέση αυτή (τη θέση τροφοδοσίας). Σε αντίθετη περίπτωση, η τιμή αυτή αποτελεί απλώς μια τιμή ρεύματος σε ενδιάμεσο σημείο του διπόλου η οποία είναι πολύ δύσκολο να μετρηθεί στην πράξη, σχετίζεται όμως με απλό τρόπο (βλ. και παραπάνω) με την (εύκολα μετρήσιμη) τιμή του ρεύματος εισόδου ως εξής:

$$\text{Ρεύμα εισόδου (βάσης): } I(0) = I_m \sin(kh) \quad (4.4.13)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω εκφράσεων είναι δυνατόν να υπολογισθεί και η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς του διπόλου (και η αντίσταση ακτινοβολίας), και στη συνέχεια η κατευθυντικότητα αυτού, με τον ίδια ακριβώς τρόπο όπως έγινε και για το δίπολο Hertz. Ωστόσο οι σχετικοί τύποι προκύπτουν αρκετά περίπλοκοι και θα παραλειφθούν. Θα προχωρήσουμε όμως στην πιο αξιοσημείωτη ειδική περίπτωση, αυτή του διπόλου $\lambda/2$.

4.4.5. Το δίπολο $\lambda/2$

Το δίπολο με μήκος $2h = \lambda/2$, το οποίο συνηθίζεται να αποκαλείται απλώς δίπολο $\lambda/2$, είναι από τις χρησιμότερες στην πράξη περιπτώσεις διπόλου, όχι τόσο λόγω του διαγράμματος ακτινοβολίας και της κατευθυντικότητάς του όσο λόγω του γεγονότος ότι η σύνθετη αντίσταση εισόδου του έχει τιμή *πολύ κοντά σε πραγματική* (δηλ. πολύ μικρό φανταστικό μέρος). Οι κεραίες που έχουν πραγματική (ωμική) σύνθετη αντίσταση εισόδου λέγονται (όπως προαναφέρθηκε) **συντονισμένες**, και η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα επιθυμητή στην πράξη διότι διευκολύνει την προσαρμογή της κεραίας προς την γραμμή μεταφοράς (ή αντίστοιχα τον κυματοδηγό) που την τροφοδοτεί, η οποία ως γνωστόν κατασκευάζεται πάντοτε με χαρακτηριστική αντίσταση *πραγματικής τιμής* (ή όσο είναι δυνατόν πλησιέστερα σε αυτή).

Το πεδίο του διπόλου $\lambda/2$ εμφανίζει ποιοτικά τις ιδιότητες που έχουν ήδη αναφερθεί για την γενική περίπτωση διπόλου (ακτινική διάδοση, κυλινδρική συμμετρία, εγκάρσιο και με συνιστώσες E_θ και H_ϕ), ενώ από τις προηγούμενες γενικές εκφράσεις θέτοντας $h = \lambda/4$, δηλ. $kh = \pi/2$, προκύπτουν οι τύποι για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο

$$E_\theta(r, \theta) = \zeta H_\phi(r, \theta) \cong \frac{j\zeta I_m}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{-jkr} \quad (4.4.14)$$

και για την ένταση ακτινοβολίας

$$U(\theta) \cong \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \quad (4.4.15)$$

Η ακτινοβολούμενη ισχύς, η αντίσταση ακτινοβολίας και η κατευθυντικότητα του διπόλου $\lambda/2$ μπορούν να υπολογισθούν, με βάση τους ορισμούς των μεγεθών αυτών, από την ένταση ακτινοβολίας του διπόλου όπως δίνεται από την (4.4.15). Τα τελικά αποτελέσματα των σχετικών υπολογισμών προκύπτουν ως εξής:

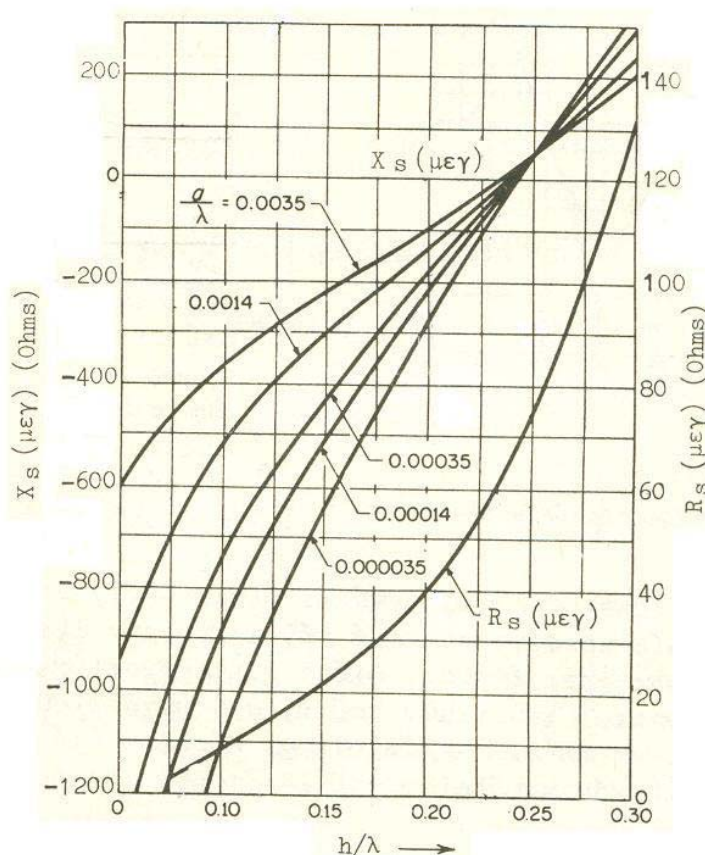
$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} R_r |I_m|^2, \quad \text{όπου } R_r \cong 73,09 \, \Omega \quad (4.4.16)$$

Η τιμή του μέγιστου ρεύματος I_m αποτελεί για το δίπολο $\lambda/2$ και την τιμή του ρεύματος εισόδου του, δηλ. $I_m = I(0)$, σύμφωνα και με τις προηγούμενες σχετικές παρατηρήσεις.

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\text{max}}}{W_{\text{rad}}} = \dots \cong 1,64 \Rightarrow (D_m)_{\text{dB}} = 10 \log(1,64) \cong 2,148 \, \text{dB} \quad (4.4.17)$$

Από την παραπάνω τιμή της κατευθυντικότητας παρατηρούμε ότι το δίπολο $\lambda/2$ είναι πιο κατευθυντικό από ό,τι το δίπολο Hertz, αν και η διαφορά δεν είναι πολύ μεγάλη, συγκεκριμένα περίπου 0,387 dB όπως φαίνεται από τις τιμές της (4.4.17) και της προηγούμενης (4.4.10).

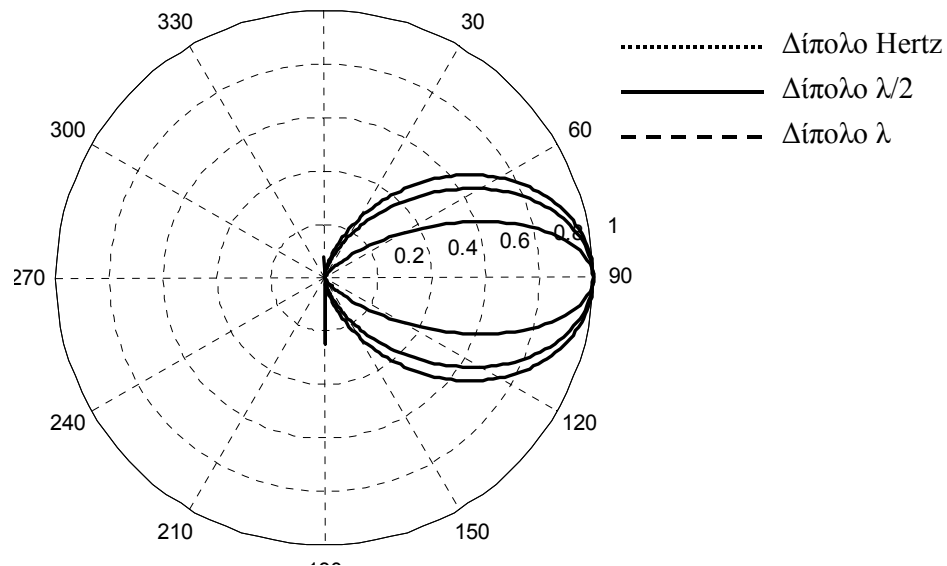
Στο επόμενο Σχ. 4.10 επιδεικνύεται ένα σημαντικότερο πλεονέκτημα του διπόλου $\lambda/2$, δηλ. το γεγονός ότι (όπως προαναφέρθηκε) είναι περίπου συντονισμένο. Στο εν λόγω σχήμα η καμπύλη κάτω δεξιά δείχνει το πραγματικό (R_s) και η ομάδα καμπυλών πάνω αριστερά το φανταστικό (X_s) μέρος της σύνθετης αντίστασης εισόδου διπόλου συναρτήσει του μήκους του (δηλ. του λόγου h/λ). Οι τιμές αυτές σημειώνονται με $R_s(\text{μεγ})$ και $X_s(\text{μεγ})$ διότι έχουν υπολογιστεί αναφορικά με το μέγιστο ρεύμα I_m και όχι το ρεύμα βάσης, η αναγωγή όμως μπορεί να γίνει εύκολα με τη βοήθεια της (4.4.13). Επισημαίνεται ότι το φανταστικό μέρος εξαρτάται και από το πάχος του διπόλου, δηλ. από την ακτίνα a των αγωγών που το αποτελούν, και για το λόγο αυτό στο σχήμα φαίνονται διάφορες καμπύλες για την X_s οι οποίες αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές του λόγου a/λ . Παρατηρούμε όμως ότι για $h/\lambda \cong 0,25$ η τιμή της X_s είναι πρακτικά ανεξάρτητη του πάχους (όλες οι καμπύλες συναντώνται) και πολύ κοντά στο 0.



Σχ. 4.10: Η σύνθετη αντίσταση εισόδου διπόλου

4.4.6. Η γενική μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας διπόλου

Στο Σχ. 4.11 που ακολουθεί παρουσιάζονται οι μορφές των διαγραμμάτων ακτινοβολίας για τρεις ενδεικτικές περιπτώσεις διπόλων: το δίπολο Hertz, το δίπολο $\lambda/2$ και το δίπολο μήκους λ (το οποίο δεν εξετάστηκε χωριστά εδώ αλλά προκύπτει από την γενική περίπτωση). Τα διαγράμματα είναι κανονικοποιημένα στη μέγιστη τιμή τους η οποία διαφέρει σε καθένα από τα δίπολα αυτά. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το διάγραμμα γίνεται στενότερο (πράγμα που υποδηλώνει μεγαλύτερη κατευθυντικότητα) καθώς το μήκος του διπόλου αυξάνει. Εντούτοις η αύξηση της κατευθυντικότητας ποσοτικά δεν είναι «δραματική», όπως άλλωστε επισημάνθηκε προηγουμένως συγκρίνοντας το δίπολο $\lambda/2$ με το δίπολο Hertz.



Σχ. 4.11: Διαγράμματα ακτινοβολίας (κανονικοποιημένα) για διάφορα δίπολα

Οι παραπάνω περιπτώσεις διπόλων παρουσιάζουν ως κοινό γνώρισμα (όπως δείχνει το σχήμα) την ύπαρξη ενός και μόνο λοβού ακτινοβολίας με εύρος π (δηλ. 180°), ο οποίος καλύπτει όλη την περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα αν αυτό αποτελεί ιδιότητα όλων των διπόλων οποιουδήποτε μήκους, δηλ. το ερώτημα πόσοι είναι οι λοβοί ακτινοβολίας τυχόντος διπόλου. Προφανώς ισοδύναμο είναι το ερώτημα πόσοι είναι οι μηδενισμοί του διαγράμματος ακτινοβολίας του διπόλου. Για να δώσουμε την απάντηση θα εκτελέσουμε διερεύνηση της (4.4.12) που δίνει την ένταση ακτινοβολίας για οποιοδήποτε δίπολο.

Από την (4.4.12) παρατηρούμε ότι θα πρέπει να εξετασθεί πότε μηδενίζεται ο αριθμητής

$$[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]$$

διότι ο παρονομαστής $\sin \theta$ μηδενίζεται μόνο στις θέσεις $\theta = 0$ και $\theta = \pi$ στις οποίες ήδη ξέρουμε ότι παρουσιάζονται μηδενισμοί. Για να μηδενισθεί ο αριθμητής πρέπει και αρκεί

$$\cos(kh \cos \theta) = \cos(kh) \Leftrightarrow kh \cos \theta = 2n\pi \pm kh \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{2n\pi}{kh} \pm 1$$

Προφανώς για να έχει λύση η τελευταία ως προς θ πρέπει (και αρκεί) το δεξί μέλος να έχει τιμή μεταξύ -1 και 1 . Αυτό με τη σειρά του εξαρτάται από τις τιμές των kh και n . Διακρίνουμε λοιπόν περιπτώσεις ως προς την τιμή του n :

- **$n = 0$** : Τότε πρέπει $\cos \theta = \pm 1$. Υπάρχουν οι ήδη γνωστές 2 λύσεις $\theta = 0, \pi$.
- **$n = 1$** : Τότε η εξίσωση γίνεται $\cos \theta = \frac{2\pi}{kh} \pm 1$. Για να υπάρχει λύση πρέπει

$$-1 < \frac{2\pi}{kh} \pm 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{2\pi}{kh} < 0 \quad \eta \quad 0 < \frac{2\pi}{kh} < 2$$

Θέτουμε το « \Leftrightarrow » και όχι το « \leq » διότι στην περίπτωση που θα ίσχυε το « $=$ » θα παίρναμε $\cos\theta = \pm 1$ από όπου προκύπτουν οι γνωστές λύσεις $\theta = 0, \pi$, ενώ εδώ ψάχνουμε για νέες λύσεις.

Η πρώτη συνθήκη (που προκύπτει από το « $+$ ») είναι προφανώς αδύνατη, ενώ η δεύτερη (που προκύπτει από το « $-$ ») ικανοποιείται εφόσον

$$kh > \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}h > \pi \Leftrightarrow h > \frac{\lambda}{2}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται $\cos\theta = \frac{2\pi}{kh} - 1$ και έχει μία λύση θ_1 στην περιοχή $0 \leq \theta \leq \pi$.

- **$n = -1$** : Η εξίσωση γίνεται $\cos\theta = -\frac{2\pi}{kh} \pm 1$ με τις συνθήκες $-1 < -\frac{2\pi}{kh} \pm 1 < 1$.

Τώρα η συνθήκη με « $-$ » είναι αδύνατη, ενώ λαμβάνοντας το « $+$ » διαπιστώνουμε ότι υπό την ίδια προϋπόθεση ($h > \lambda/2$) υπάρχει μία λύση και είναι παραπληρωματική της προηγούμενης ($\pi - \theta_1$). Συνεπώς οι περιπτώσεις $n = \pm 1$ δίνουν δύο νέους μηδενισμούς σε θέσεις θ_1 και $(\pi - \theta_1)$, δηλ. συμμετρικές ως προς το μεσοκάθετο επίπεδο ($\theta = \pi/2$).

- **$n = \pm 2$** : Όπως και για $n = \pm 1$, οι δύο αυτές περιπτώσεις μπορούν να εξετασθούν μαζί. Η εξίσωση γίνεται $\cos\theta = \pm \frac{4\pi}{kh} \pm 1$ και συνδυάζοντας τα « $+$ » με τα « $-$ »

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι λύση θα υπάρχει εφόσον ισχύει κάποια από τις συνθήκες

$$-1 < \frac{4\pi}{kh} + 1 < 1 \Leftrightarrow -2 < \frac{4\pi}{kh} < 0$$

$$\text{ή} \quad -1 < \frac{4\pi}{kh} - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{4\pi}{kh} < 2$$

Όμως η πρώτη είναι αδύνατη, ενώ η δεύτερη ικανοποιείται εφόσον

$$kh > 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}h > 2\pi \Leftrightarrow h > \lambda$$

και τότε θα εμφανισθούν δύο ακόμα μηδενισμοί (ένας για $n = 2$ και ένας για $n = -2$) σε παραπληρωματικές θέσεις.

- **$n = \pm 3$** : Με όμοια διαδικασία καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι λύση θα υπάρχει εφόσον $h > 3\lambda/2$. Τότε εμφανίζονται δύο επιπλέον μηδενισμοί.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι για $n = \pm 4$ θα προκύψουν δύο νέες λύσεις (μηδενισμοί) εφόσον $h > 2\lambda$, για $n = \pm 5$ δύο ακόμη εφόσον $h > 5\lambda/2$ κ.ο.κ.

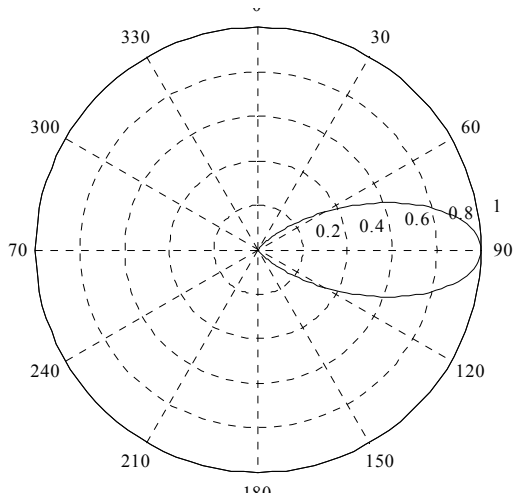
Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των μηδενισμών αυξάνεται καθώς αυξάνει η τιμή του μήκους h . Πιο συγκεκριμένα:

- Για $0 < h \leq \lambda/2$ υπάρχει λύση μόνο για $n = 0$, που δίνει τους γνωστούς μηδενισμούς $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, δηλ. ένας λοβός.
- Για $\lambda/2 < h \leq \lambda$ υπάρχουν δύο ακόμη λύσεις (για $n = \pm 1$) που δίνουν δύο πρόσθετους μηδενισμούς σε παραπληρωματικές θέσεις. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των μηδενισμών αυτών περικλείεται ένας λοβός (που είναι και ο κύριος), ενώ μεταξύ α) του ενός από αυτούς και του ημιάξονα $\theta = 0$ και β) του δεύτερου από αυτούς και του ημιάξονα $\theta = \pi$ (όπου υπάρχουν οι γνωστοί μηδενισμοί) περικλείονται δύο ακόμη λοβοί, εκατέρωθεν του κύριου, που είναι οι πλευρικοί. Συνολικά 3 λοβοί.
- Για $\lambda < h \leq 3\lambda/2$ προκύπτουν δύο επιπλέον λύσεις (για $n = \pm 2$) και άρα δύο ακόμη μηδενισμοί (πάντοτε σε παραπληρωματικές θέσεις). Επομένως εμφανίζονται δύο ακόμη λοβοί εκατέρωθεν του κύριου λοβού, ήτοι συνολικά 4 πλευρικοί (από 2 σε κάθε πλευρά του κύριου λοβού). Συνολικά 5 λοβοί.

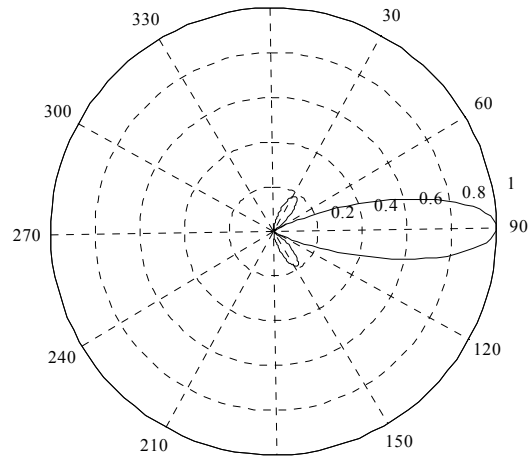
Και γενικότερα καθώς αυξάνει το μήκος του διπόλου, σε κάθε διαδοχικό διάστημα τιμών του h εύρους $\lambda/2$ προκύπτουν δύο επιπλέον λοβοί σε σχέση με το προηγούμενο.

Με βάση τη διερεύνηση αυτή μπορούμε πλέον να «ταυτοποιήσουμε» το δίπολο στο οποίο αντιστοιχεί το ενδεικτικό διάγραμμα ακτινοβολίας των προηγούμενων Σχ. 4.4α-β: Αυτό περιέχει 3 λοβούς (κύριο και 2 πλευρικούς), και συνεπώς πρόκειται για δίπολο που το μήκος του (δηλ. το $2h$) είναι μεταξύ λ και 2λ . Επίσης τα παραπάνω συμπεράσματα υποδεικνύουν έναν λόγο για να προτιμηθούν τα δίπολα σχετικά μικρού μήκους, της περιοχής $0 \leq 2h \leq \lambda$, καθόσον τα μεγαλύτερα δίπολα εμφανίζουν και πλευρικούς λοβούς οι οποίοι κατά γενικό κανόνα είναι ανεπιθύμητοι.

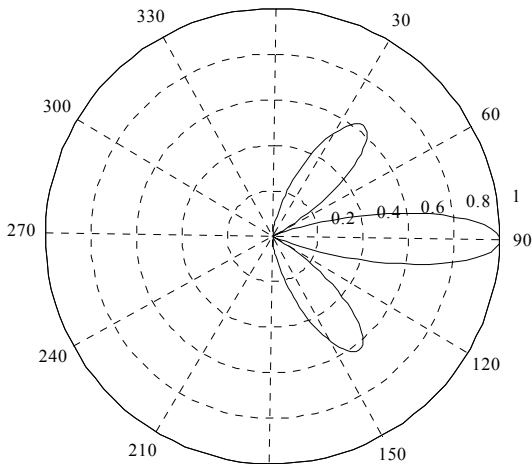
Στο Σχ. 4.12 που ακολουθεί παρουσιάζονται χαρακτηριστικά διαγράμματα ακτινοβολίας διπόλων διαφόρων μηκών, όπου παρατηρούμε την εμφάνιση πρόσθετων ζευγών λοβών καθώς αυξάνεται το μήκος του διπόλου. Σημειώνεται ότι στην οριακή περίπτωση $2h = 2\lambda$ (σχήμα 4.12ε) παρατηρούμε την εξαφάνιση του κεντρικού λοβού (γύρω από την διεύθυνση $\theta = 90^\circ$) επειδή οι δύο μηδενισμοί που τον περιβάλλουν συμβαίνει να συμπίπτουν, ο λοβός αυτός όμως εμφανίζεται τόσο για $2h < 2\lambda$ όσο και για $2h > 2\lambda$.



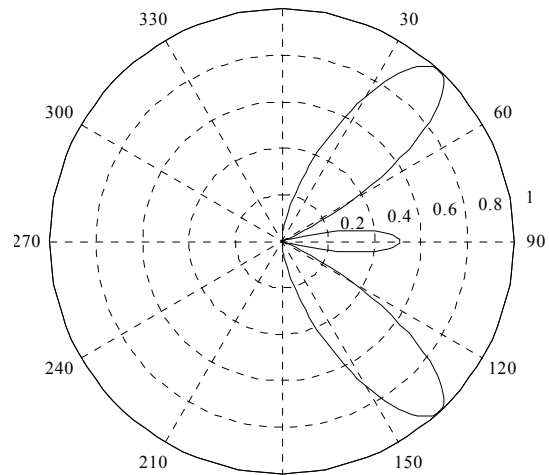
$\alpha: 2h = \lambda$



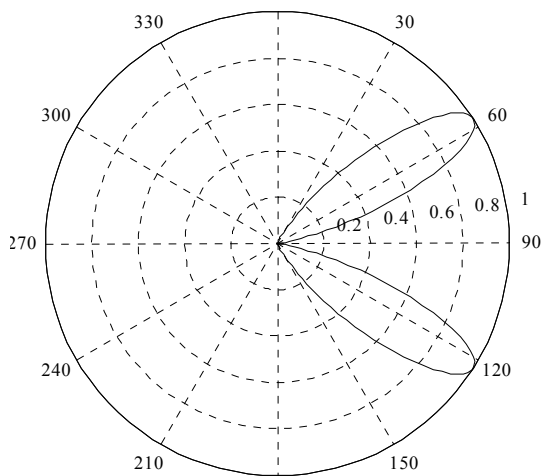
$\beta: 2h = 1,3\lambda$



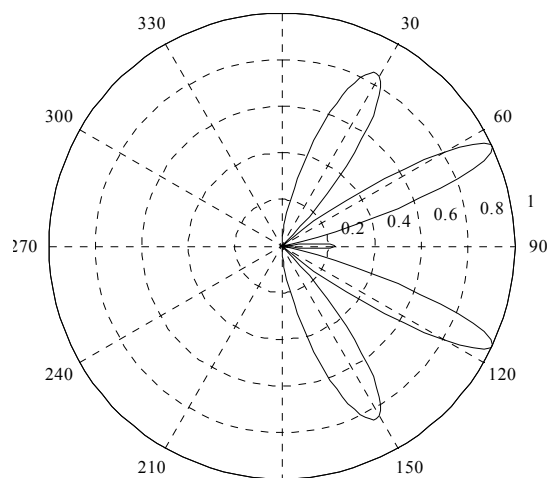
$\gamma: 2h = 1,4\lambda$



$\delta: 2h = 1,5\lambda$



$\epsilon: 2h = 2\lambda$



$\sigma\tau: 2h = 2,4\lambda$

Σχ. 4.12: Διαγράμματα ακτινοβολίας για διάφορα μήκη διπόλων

4.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 4.1. Η ένταση ακτινοβολίας ενός διπόλου πολύ μικρού μήκους (διπόλου Hertz) είναι κατά τα γνωστά

$$U(\theta) = U_{\max} \sin^2 \theta$$

όπου η γωνία θ μετράται από τον άξονα z ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα του διπόλου. Η κατευθυντικότητα του διπόλου είναι $D_m = 1,761$ dB. Αν ένα δίπολο Hertz χωρίς απώλειες εκπέμπει συνολική ισχύ 10 W, να βρεθεί **α)** η μέγιστη τιμή U_{\max} της έντασης ακτινοβολίας του διπόλου, **β)** η πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας στη διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα του διπόλου και σε απόσταση 1 km από το δίπολο.

Να μη χρησιμοποιηθούν οι ειδικοί τύποι της παρ. 4.4 για το δίπολο Hertz, παρά μόνο τα στοιχεία που δίνονται εδώ και οι γενικοί τύποι της παρ. 4.2 που αφορούν στην ένταση ακτινοβολίας και την κατευθυντικότητα.

Απάντηση

α) Σύμφωνα με την (4.2.7), η μέγιστη ένταση ακτινοβολίας μιας κεραίας συνδέεται με την κατευθυντικότητα ως εξής:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}} \Leftrightarrow U_{\max} = \frac{D_m W_{\text{rad}}}{4\pi}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για την τιμή της κατευθυντικότητας ως καθαρού αριθμού (όχι σε dB). Μετατρέποντας από dB σε καθαρό αριθμό (αδιάστατη κατευθυντικότητα) έχουμε

$$D_m = 10^{1,761/10} = 1,5$$

Δεδομένου η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς είναι $W_{\text{rad}} = 10$ W, η μέγιστη ένταση ακτινοβολίας του διπόλου είναι

$$U_{\max} = \frac{1,5 \cdot 10}{4\pi} \cong 1,194 \text{ W/sterad}$$

β) Η πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας που εκπέμπει η κεραία δίνεται από το διάνυσμα Poynting. Αυτό ως γνωστόν στο μακρινό πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα P_r που δίνεται από την (4.2.1), η οποία στην περίπτωσή μας εφαρμόζεται ως εξής:

$$P_r(r, \theta) = \frac{U(\theta)}{r^2} = \frac{U_{\max} \sin^2 \theta}{r^2}$$

Με αντικατάσταση των γνωστών τιμών $U_{\max} \cong 1,194$, $\theta = 30^\circ$ και $r = 1000$ m παίρνουμε την τιμή της πυκνότητας ισχύος στη συγκεκριμένη διεύθυνση και απόσταση:

$$P_r\left(1000, \frac{\pi}{6}\right) \cong 0,2895 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Παράδειγμα 4.2. α) Έστω μια κεραία η οποία ακτινοβολεί μόνο στον ημιχώρο $z > 0$ και η ένταση ακτινοβολίας της δίνεται από τη σχέση

$$U(\theta) = A \cos \theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

όπου A κάποια σταθερά. Η σχέση αυτή δείχνει επίσης ότι το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας είναι ανεξάρτητο από τη γωνία φ (ομοιοκατευθυντική κεραία με συμμετρία περί τον άξονα z) και αποτελείται από έναν μόνο λοβό (ο οποίος προφανώς είναι και ο κύριος λοβός).

Να προσδιορισθεί η κατευθυντικότητα της κεραίας με δύο τρόπους: βάσει του ορισμού και με προσεγγιστική μέθοδο.

β) Να επαναληφθεί η διαδικασία για την περίπτωση που η ένταση ακτινοβολίας είναι

$$U(\theta) = A \cos^2 \theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με την προηγούμενη περίπτωση.

Απάντηση

α) Για να βρεθεί η κατευθυντικότητα της κεραίας με βάση τον ορισμό (4.2.7) πρέπει να υπολογισθεί η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς W_{rad} , η οποία δίνεται από την εξ. (4.2.2). Εκτελώντας την (προφανή) ολοκλήρωση ως προς φ παίρνουμε:

$$W_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} U(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi A \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι η περιοχή ολοκλήρωσης ως προς θ είναι $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Επειδή $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με αλλαγή μεταβλητής

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin u \, du = \frac{1}{4} (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4} [-\cos(\pi) + 1] = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει η W_{rad} :

$$W_{\text{rad}} = \pi A$$

Είναι επίσης προφανές ότι η διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας είναι εκείνη για την οποία μεγιστοποιείται η ποσότητα $\cos \theta$, δηλ. η διεύθυνση $\theta = 0$ (θετικός ημιάξονας z). Επομένως

$$U_{\max} = U(0) = A \cos(0) = A$$

Οπότε εφαρμόζοντας την (4.2.7) έχουμε:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{A}{\pi A} = 4$$

Ο δεύτερος τρόπος είναι με εφαρμογή του προσεγγιστικού τύπου (4.2.11), για την οποία θα πρέπει να βρεθούν οι γωνίες ανοίγματος μισής ισχύος θ_{1r} και θ_{2r} , οι οποίες όμως στην περίπτωση μας ταυτίζονται λόγω κυλινδρικής συμμετρίας και επομένως αρκεί να βρεθεί η μία, έστω θ_r (προς τυχούσα διεύθυνση). Για τη γωνία θ_r πρέπει να ισχύει:

$$U\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{U_{\max}}{2} \Leftrightarrow A \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta_r}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta_r = \frac{2\pi}{3}$$

όπου η γωνία $\theta_r / 2$ στην παραπάνω μετράται από τον άξονα z μέχρι το σημείο μισής ισχύος και άρα αντιπροσωπεύει το μισό της γωνίας ανοίγματος (παρατηρήστε προσεκτικά το Σχ. 4.5 ή το Σχ. 4.3α όπου ορίζεται το άνοιγμα μισής ισχύος).

Οπότε η προσεγγιστική σχέση (4.2.11) δίνει

$$D_m \cong \frac{4\pi}{(\theta_r)^2} = \frac{4\pi}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2} = 4\pi \frac{9}{4\pi^2} = \frac{9}{\pi} \cong 2,865$$

Προφανώς η προσέγγιση αυτή δεν είναι καλή και αυτό οφείλεται στο ότι ο λοβός ακτινοβολίας δεν είναι στενός (όπως φαίνεται και από το εύρος δέσμης μισής ισχύος που βρέθηκε παραπάνω ότι ανέρχεται σε 120°).

β) Στη δεύτερη περίπτωση η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς W_{rad} δίνεται από την:

$$W_{\text{rad}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} U(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} A \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi A \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας (όπως έγινε και στην παρ. 4.4.3) την αλλαγή μεταβλητής $x = \cos \theta$, οπότε $dx = -\sin \theta \, d\theta \Rightarrow \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = -x^2 \, dx$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στη μορφή

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = -\int_1^0 x^2 \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} (x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} [1 - 0] = \frac{1}{3}$$

και με αντικατάσταση παίρνουμε την W_{rad} :

$$W_{\text{rad}} = \frac{2\pi A}{3}$$

Επειδή και πάλι είναι $U_{\max} = A$, βάσει του ορισμού (4.2.7) προκύπτει:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{A}{2\pi A/3} = 6$$

Κατά την προσεγγιστική μέθοδο προσδιορίζουμε τη γωνία θ_r με τον ίδιο τρόπο:

$$U\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{U_{\max}}{2} \Leftrightarrow A \cos^2\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\theta_r}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta_r = \frac{\pi}{2}$$

και η (4.2.11) δίνει

$$D_m \cong \frac{4\pi}{(\theta_r)^2} = \frac{4\pi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 4\pi \frac{4}{\pi^2} = \frac{16}{\pi} \cong 5,093$$

Στην περίπτωση αυτή η προσέγγιση είναι σαφώς καλύτερη από την προηγούμενη (για σύγκριση μπορείτε να υπολογίσετε το ποσοστιαίο σφάλμα σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις), επειδή ο λοβός είναι αρκετά στενότερος.

Παράδειγμα 4.3. α) Μια κεραία έχει σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z_A = R_A + jX_A$, όπου η αντίσταση $R_A = 50 \Omega$ και η φανταστική αντίσταση (αντίδραση) X_A είναι άγνωστη, με χωρητικό χαρακτήρα. Η κεραία τροφοδοτείται από μια πηγή με εσωτερική αντίσταση $Z_g = R_g + jX_g$, όπου $R_g = 60 \Omega$ και η X_g είναι μεταβλητή. Μεταβάλλοντας την τιμή της X_g και εκτελώντας μετρήσεις της ισχύος W_{in} που απορροφά η κεραία (ισχύος τροφοδοσίας) διαπιστώνουμε ότι αυτή μεγιστοποιείται για κάποια τιμή της X_g και τότε λαμβάνει την τιμή $W_{\text{in,max}} = 20,66 \text{ W}$. Επίσης, εκτελώντας την ίδια μέτρηση για την τιμή $X_g = 0$ βρίσκουμε τιμή $W_{\text{in},0} = 16,53 \text{ W}$. Να βρεθεί η τιμή της X_g για την οποία μεγιστοποιήθηκε η τιμή της ισχύος τροφοδοσίας W_{in} , καθώς και η αντίδραση εισόδου X_A της κεραίας.

Απάντηση

α) Όπως είναι γνωστό, στη γενική περίπτωση η ισχύς W_{in} που απορροφάται από την κεραία γίνεται μέγιστη όταν έχουμε συζυγή προσαρμογή, δηλ. όταν ισχύει $R_A = R_g$ και $X_A = -X_g$. Όμως στην περίπτωσή μας το πραγματικό μέρος R_g της εσωτερικής αντίστασης της κεραίας έχει δεδομένη τιμή η οποία δεν ικανοποιεί τη συνθήκη συζυγούς προσαρμογής. Άρα πρέπει να προσδιορισθεί όχι το απόλυτο μέγιστο της ισχύος W_{in} αλλά ένα μέγιστο υπό συνθήκη για τη συγκεκριμένη τιμή της R_g .

Από το ισοδύναμο κύκλωμα εισόδου της κεραίας φαίνεται αμέσως ότι

$$W_{\text{in}} = \frac{1}{2}(R_r + R_L)|I|^2 = \frac{1}{2}R_A|I|^2 = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_A}{(R_A + R_g)^2 + (X_A + X_g)^2}$$

Εφόσον όλες οι υπόλοιπες παράμετροι είναι σταθερές (έχουν συγκεκριμένη τιμή) και μεταβάλλεται μόνο η X_g , είναι φανερό ότι η W_{in} μεγιστοποιείται όταν ελαχιστοποιηθεί ο παρονομαστής, πράγμα που συμβαίνει όταν μηδενίζεται ο δεύτερος όρος, δηλ. όταν

$$X_g = -X_A$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της ισχύος τροφοδοσίας είναι

$$W_{in,max} = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_A}{(R_A + R_g)^2}$$

Κατά αντίστοιχο τρόπο η τιμή της ισχύος τροφοδοσίας για $X_g = 0$ είναι

$$W_{in,0} = \frac{|V_g|^2}{2} \frac{R_A}{(R_A + R_g)^2 + X_A^2}$$

οπότε διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{W_{in,max}}{W_{in,0}} = \frac{(R_A + R_g)^2 + X_A^2}{(R_A + R_g)^2} = 1 + \frac{X_A^2}{(R_A + R_g)^2}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές και επιλύοντας ως προς X_A προκύπτει

$$1 + \frac{X_A^2}{(50 + 60)^2} = \frac{20,66}{16,53} \cong 1,25 \Rightarrow X_A^2 \cong 0,25 \cdot 110^2 \cong 3025 \Rightarrow |X_A| \cong 55$$

και επειδή η X_A είναι χωρητική συμπεραίνουμε ότι $X_A = -55 \Omega$.

Παράδειγμα 4.4. Ένα δίπολο μήκους $2h = 1,5$ m λειτουργεί σε συχνότητα 100 MHz και το κέρδος του στη συχνότητα αυτή είναι $G_m \cong 1,761$ dB. Να βρεθεί ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας και ο συντελεστής απωλειών του διπόλου αυτού (ως ποσοστό %), καθώς και η αντίσταση απωλειών του.

Απάντηση

Στη συχνότητα 100 MHz το μήκος κύματος λειτουργίας είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 3$$

και επομένως για το μήκος του διπόλου ισχύει $2h = \lambda/2$, δηλ. στη συχνότητα αυτή το δίπολο είναι δίπολο $\lambda/2$ για το οποίο η κατευθυντικότητα και η αντίσταση ακτινοβολίας είναι γνωστές από τη θεωρία:

$$D_m \cong 1,64 \quad , \quad R_r \cong 73,09 \Omega$$

Το αδιάστατο κέρδος του διπόλου (δηλ. υπό μορφή καθαρού αριθμού) προκύπτει κατά τα γνωστά από την τιμή του σε dB:

$$G_m \cong 10^{1,761/10} \cong 1,5$$

Άρα ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας του διπόλου αυτού είναι

$$G_m = n_r D_m \Rightarrow n_r = \frac{G_m}{D_m} \cong \frac{1,5}{1,64} \cong 0,9146 = 91,46 \%$$

και επομένως ο συντελεστής απωλειών του είναι

$$n_L = 1 - n_r \cong 8,54 \%$$

Ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας συνδέεται με τις αντιστάσεις ακτινοβολίας και απωλειών με τη γνωστή σχέση

$$n_r = \frac{R_r}{R_r + R_L}$$

και η τιμή της αντίστασης ακτινοβολίας είναι γνωστή (βλ. παραπάνω). Επιλύοντας ως προς R_L και αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές παίρνουμε

$$R_L = \left(\frac{1}{n_r} - 1 \right) R_r \cong \left(\frac{1}{0,9146} - 1 \right) \cdot 73,09 \cong 6,82 \Omega$$

Παράδειγμα 4.5. Να υπολογισθεί προσεγγιστικά, με χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης, **α)** η αντίσταση ακτινοβολίας διπόλου με $h = \lambda/4$ και **β)** η κατευθυντικότητα και η αντίσταση ακτινοβολίας διπόλου με $h = 3\lambda/8$.

Για την αριθμητική ολοκλήρωση να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας Simpson, ο οποίος λέει ότι αν το διάστημα ολοκλήρωσης, έστω $a \leq x \leq b$, υποδιαιρεθεί σε $2m$ το πλήθος ίσα υποδιαστήματα μήκους $D = \frac{b-a}{2m}$ με τη βοήθεια $2m+1$ διαδοχικών σημείων (λέγονται και *διακριτικά σημεία*) του διαστήματος ($x_0 = a$, $x_1 = a + D$, $x_2 = a + 2D$, ..., $x_{2m} = b$), τότε η τιμή του ολοκληρώματος προσεγγίζεται από τον τύπο

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{D}{3} [f_0 + f_{2m} + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2})]$$

όπου $f_n = f(x_n)$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση να ληφθεί $m = 3$.

Απάντηση

Από τη σχέση ορισμού (4.3.3) της αντίστασης ακτινοβολίας φαίνεται ότι για να υπολογισθεί αυτή θα πρέπει να υπολογισθεί η ακτινοβολούμενη ισχύς W_{rad} του διπόλου. Εφαρμόζοντας την (4.2.2) για την ακτινοβολούμενη ισχύ, εισάγοντας σε αυτή την (4.4.12) η οποία δίνει την ένταση ακτινοβολίας οποιουδήποτε διπόλου και εκτελώντας αμέσως την ολοκλήρωση ως προς ϕ η οποία είναι προφανής λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, παίρνουμε

$$W_{\text{rad}} = 2\pi \int_0^{\pi} U(\theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{\zeta |I_m|^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta$$

Για την εφαρμογή της (4.3.3) πρέπει να προσέξουμε ότι αυτή αναφέρεται στο ρεύμα εισόδου της κεραίας, ενώ η (4.4.12) για το δίπολο περιέχει τη μέγιστη τιμή του ρεύματος του διπόλου η οποία δεν ταυτίζεται πάντοτε με την τιμή εισόδου (που λέγεται και ρεύμα βάσης), ενώ η σχέση μεταξύ αυτών δίνεται από την (4.4.13). Εφαρμόζοντας λοιπόν την (4.3.3) με την τιμή του ρεύματος εισόδου και χρησιμοποιώντας την (4.4.13) έχουμε

$$R_r = \frac{2W_{\text{rad}}}{|I(0)|^2} = \frac{\zeta}{2\pi |\sin(kh)|^2} \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta$$

Είναι φανερό ότι για τον προσδιορισμό της ζητούμενης R_r πρέπει να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$F = \int_0^{\pi} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta$$

πράγμα που θα γίνει εφαρμόζοντας τον κανόνα Simpson. Παρατηρούμε όμως ότι η ολοκληρωτέα παράσταση παρουσιάζει «συμμετρία» περί το σημείο $\theta = \pi/2$, οπότε για να αυξήσουμε την ακρίβεια υποδιαιρούμε πρώτα σε δύο τμήματα ως εξής:

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα εκτελούμε αλλαγή μεταβλητής $\theta' = \pi - \theta$, οπότε έρχεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta &= \int_{\pi/2}^0 \frac{\{\cos[kh \cos(\pi - \theta')] - \cos(kh)\}^2}{\sin(\pi - \theta')} (-d\theta') = \\ &= - \int_{\pi/2}^0 \frac{[\cos(-kh \cos \theta') - \cos(kh)]^2}{\sin \theta'} \, d\theta' = \int_0^{\pi/2} \frac{[\cos(kh \cos \theta') - \cos(kh)]^2}{\sin \theta'} \, d\theta' \end{aligned}$$

και άρα πρέπει τελικά να υπολογίσουμε το

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta} \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} f(\theta) \, d\theta \quad \text{με} \quad f(\theta) = \frac{[\cos(kh \cos \theta) - \cos(kh)]^2}{\sin \theta}$$

Για την εφαρμογή του κανόνα Simpson στο παραπάνω ολοκλήρωμα θα λάβουμε $m = 3$, δηλ. τα διαιρετικά σημεία

$$\theta_0 = 0 \quad , \quad \theta_1 = \frac{\pi}{12} \quad , \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \dots \quad , \quad \theta_5 = \frac{6\pi}{12} \quad , \quad \theta_6 = \frac{\pi}{2}$$

τα οποία γενικά δίνονται από την έκφραση $\theta_n = nD = n \frac{\pi}{12}$, $n = 0,1,\dots,6$ με $D = \frac{1}{6} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$

και έτσι ο προσεγγιστικός τύπος για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος παίρνει τη μορφή

$$\int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta \cong \frac{\pi}{36} [f_0 + f_6 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4)]$$

α) Στην περίπτωση $h = \lambda/4$ έχουμε $kh = (2\pi/\lambda) \lambda/4 = \pi/2$ οπότε $\cos(kh) = 0$ και $\sin(kh) = 1$ και η ολοκληρωτέα παράσταση παίρνει τη μορφή

$$f(\theta) = \frac{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^2}{\sin \theta} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \text{ δηλ. } F = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta$$

Αντικαθιστώντας και εκτελώντας τις πράξεις προκύπτουν οι τιμές που χρειάζονται για τον κανόνα Simpson, και η εφαρμογή του γίνεται όπως στον παρακάτω πίνακα

n	θ_n	f_n
0	0	0
1	0,262	0,011
2	0,524	0,087
3	0,785	0,279
4	1,047	0,577
5	1,309	0,873
6	1,571	1,000
$F = 2 \int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta$		1,219

Προσέξτε ότι για το σημείο $\theta_0 = 0$ η ολοκληρωτέα παράσταση παρουσιάζει απροσδιοριστία της μορφής $0 / 0$ αλλά παίρνουμε την οριακή τιμή της στη θέση αυτή η οποία υπολογίζεται εύκολα με τον κανόνα L' Hospital.

Εισάγοντας την παραπάνω τιμή που υπολογίσθηκε για το F στην έκφραση για την αντίσταση ακτινοβολίας και χρησιμοποιώντας την τιμή $\sin(kh) = 1$ και την προσεγγιστική τιμή της κυματικής αντίστασης ελεύθερου χώρου $\zeta \cong 120 \pi$, παίρνουμε

$$R_r = \frac{\zeta}{2\pi|\sin(kh)|^2} F \cong \frac{120\pi}{2\pi} F \cong 60 \cdot 1,219 \cong 73,08 \text{ (σε } \Omega \text{)}$$

τιμή η οποία παρατηρούμε ότι είναι πολύ κοντά στην τιμή που δίνει η θεωρία.

β) Στην περίπτωση $h = 3\lambda/8$ έχουμε $kh = (2\pi/\lambda) 3\lambda/8 = 3\pi/4$ οπότε $\cos(kh) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

$\sin(kh) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και η ολοκληρωτέα παράσταση παίρνει τη μορφή

$$f(\theta) = \frac{\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^2}{\sin \theta} \quad \text{δηλ.} \quad F = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta$$

Τότε για την εφαρμογή του κανόνα Simpson έχουμε

n	θ_n	f_n
0	0	0
1	0,262	0,013
2	0,524	0,130
3	0,785	0,530
4	1,047	1,371
5	1,309	2,414
6	1,571	2,914
$F = 2 \int_0^{\pi/2} f(\theta) d\theta$		3,097

όπου και πάλι για το σημείο $\theta_0 = 0$ λήφθηκε η οριακή τιμή με τον κανόνα L' Hospital.

Με τον ίδιο τρόπο, λαμβάνοντας όμως υπόψη ότι τώρα είναι $\sin(kh) = \sqrt{2}/2$, παίρνουμε

$$R_r = \frac{\zeta}{2\pi|\sin(kh)|^2} F \cong \frac{120\pi}{2\pi \cdot 1/2} F \cong 120 \cdot 3,097 \cong 371,64 \text{ (σε } \Omega\text{)}$$

Σημειώνουμε ότι αν κατά σύμβαση υπολογίζαμε την R_r σε σχέση με το μέγιστο ρεύμα του διπόλου και όχι με το ρεύμα εισόδου, τότε δεν θα λαμβάναμε υπόψη τον παράγοντα $\sin(kh)$ και θα βρίσκαμε $R_r \cong 185,82 \Omega$.

Ως προς την (μέγιστη) κατευθυντικότητα του διπόλου με $h = 3\lambda/8$, θα χρησιμοποιήσουμε την (4.2.7) σε συνδυασμό με την (4.4.12) για την ένταση ακτινοβολίας όπως την επεξεργαστήκαμε στα προηγούμενα:

$$D_m = 4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}} = 4\pi \frac{U_{\max}}{\frac{\zeta|I_m|^2}{4\pi} F} = (4\pi)^2 \frac{U_{\max}}{\zeta|I_m|^2 F}$$

όπου F είναι το ολοκλήρωμα που υπολογίσαμε παραπάνω. Για τη μέγιστη ένταση ακτινοβολίας U_{\max} θα χρησιμοποιήσουμε τη γενική έκφραση (4.4.12), η οποία για $h = 3\lambda/8$ γράφεται στη μορφή

$$U(\theta) = \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \frac{\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^2}{\sin^2 \theta}$$

Η έκφραση αυτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της για τη διεύθυνση $\theta = \pi/2 = 90^\circ$, δηλ. στο μεσοκάθετο επίπεδο του διπόλου. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παραγωγή, ενώ και διαισθητικά είναι φανερό από τα διαγράμματα του Σχ. 4.10, αν λάβουμε υπόψη ότι η παρούσα περίπτωση $h = 3\lambda/8$ είναι ανάμεσα στις περιπτώσεις $h = \lambda/4$ (δίπολο $\lambda/2$) και $h = \lambda/2$ (δίπολο λ) που απεικονίζονται στο σχήμα αυτό. Έτσι η μέγιστη ένταση ακτινοβολίας U_{\max} είναι

$$U_{\max} = \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \frac{\left[\cos(0) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^2}{1} = \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

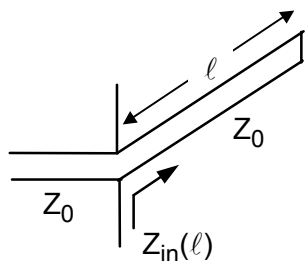
Επομένως

$$D_m = (4\pi)^2 \frac{U_{\max}}{\zeta |I_m|^2 F} = (4\pi)^2 \frac{\frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{\zeta |I_m|^2 F} = \frac{2}{F} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

και αντικαθιστώντας την τιμή που υπολογίσαμε για το ολοκλήρωμα F παίρνουμε

$$D_m \cong 1,882 \quad \text{ή} \quad D_{m,dB} \cong 2,746 \text{ dB}$$

Παράδειγμα 4.6. Ένα δίπολο με σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z_\Delta = 73 + j45 \Omega$



τροφοδοτείται από γραμμή μεταφοράς χωρίς απώλειες με χαρακτηριστική αντίσταση $Z_0 = 100 \Omega$. Προκειμένου να επιτευχθεί συντονισμός του διπόλου, δηλ. πραγματική τιμή της συνολικής σύνθετης αντίστασης εισόδου Z_L αυτού (η οποία είναι και αντίσταση τερματισμού για τη γραμμή μεταφοράς), ένα

βραχυκυκλωμένο τμήμα της ίδιας γραμμής μεταφοράς με μήκος l συνδέεται παράλληλα στο δίπολο.

Να βρεθεί το μήκος l του βραχυκυκλωμένου τμήματος ώστε να επιτυγχάνεται συντονισμός του διπόλου. Η συχνότητα λειτουργίας είναι 300 MHz και η ταχύτητα των Η/Μ κυμάτων στη γραμμή μεταφοράς είναι όση και στον ελεύθερο χώρο.

Απάντηση

Έστω $Z_{in}(\ell)$ η σύνθετη αντίσταση εισόδου του βραχυκυκλωμένου τμήματος γραμμής. Λόγω της παράλληλης συνδεσμολογίας, η σύνθετη αγωγιμότητα του συνδυασμού των Z_{Δ} και $Z_{in}(\ell)$ η οποία θα πρέπει να είναι πραγματική δίνεται από την

$$Y_L = Y_{\Delta} + Y_{in}(\ell) = \frac{1}{73 + j45} + Y_{in}(\ell) = \frac{73 - j45}{73^2 + 45^2} + Y_{in}(\ell) = \frac{73}{7354} - j\frac{45}{7354} + Y_{in}(\ell)$$

Επειδή η $Z_{in}(\ell)$ αντιστοιχεί σε βραχυκυκλωμένη γραμμή χωρίς απώλειες, θα είναι καθαρά φανταστική, άρα ομοίως και η $Y_{in}(\ell)$. Κατά συνέπεια, για να είναι η Z_L πραγματική, με βάση την παραπάνω έκφραση, θα πρέπει να ισχύει

$$\text{Im}[Y_{\Delta} + Y_{in}(\ell)] = 0 \Rightarrow -j\frac{45}{7354} + Y_{in}(\ell) = 0 \Rightarrow Y_{in}(\ell) = j\frac{45}{7354} \Rightarrow Z_{in}(\ell) = -j\frac{7354}{45} \cong -j163,42$$

Το μήκος κύματος πάνω στη γραμμή είναι $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / 300 \cdot 10^6 = 1 \text{ m}$ και άρα η σταθερά διάδοσης σε αυτή είναι $\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi$. Η σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z_{in}(\ell)$ της βραχυκυκλωμένης γραμμής δίνεται κατά τα γνωστά από την

$$Z_{in}(\ell) = jZ_0 \tan(\beta\ell) \Rightarrow \tan(\beta\ell) = -j\frac{Z_{in}(\ell)}{Z_0}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των $Z_{in}(\ell)$ και Z_0 από τα προηγούμενα παίρνουμε

$$\tan(2\pi\ell) = -\frac{163,42}{100} \Rightarrow 2\pi\ell = \tan^{-1}(-1,6342) \cong -1,0217 + n \cdot \pi$$

Από τις άπειρες λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης επιλέγουμε αυτή που οδηγεί στο μικρότερο μήκος γραμμής, δηλ. την πρώτη θετική ($n = 1$ ανωτέρω), οπότε προκύπτει

$$\ell \cong \frac{\pi - 1,0217}{2\pi} \cong 0,337 \text{ m}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΛΗΨΗ – ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΕΡΑΙΩΝ

5.1. ΓΕΝΙΚΑ

Όπως έχει προαναφερθεί, μια κεραία μπορεί να βρίσκεται είτε σε κατάσταση εκπομπής (transmitting mode) είτε σε κατάσταση λήψης (receiving mode), χωρίς να αποκλείεται η περίπτωση να εκτελεί και τους δύο ρόλους ταυτόχρονα. Το να βρίσκεται η κεραία σε κατάσταση εκπομπής σημαίνει ότι τροφοδοτείται από κάποια πηγή (τον πομπό) η οποία δημιουργεί ρεύμα πάνω σε αυτή (μιλάμε τότε για επιβεβλημένη ρευματική κατανομή πάνω στην κεραία). Το ρεύμα αυτό δημιουργεί, σύμφωνα με τους νόμους του Maxwell, ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο εκπέμπεται από την κεραία προς τον γύρω χώρο. Στην κατάσταση λήψης η κεραία βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργεί κάποια άλλη κεραία, και εξαιτίας αυτού δημιουργείται στην κεραία λήψης ρεύμα εξ επαγωγής, οπότε γίνεται λόγος για επαγόμενο ρευματική κατανομή πάνω στην κεραία*. Το ρεύμα αυτό διαρρέει και το κύκλωμα που συνδέεται με την κεραία (κατά κανόνα ένα κύκλωμα δέκτη) και αποδίδει ένα μέρος της ισχύος του (την ωφέλιμη ισχύ) σε αυτό, ενώ ένα άλλο μέρος της ισχύος του μεταφέρεται σε ένα «δευτερογενές» ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δηλ. σκεδαζόμενο κύμα, το οποίο δημιουργείται από αυτό το ρεύμα και το οποίο επανεκπέμπεται (σκεδάζεται) από την κεραία.

Η κατάσταση που περιγράφηκε παραπάνω χαρακτηρίζεται με τον γενικό όρο αλληλεπίδραση κεραιών. Στην ειδικότερη περίπτωση κατά την οποία οι δύο κεραίες που αλληλεπιδρούν βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση, δηλ. η κεραία λήψης είναι στο μακρινό πεδίο της κεραίας εκπομπής, κάνουμε λόγο για ασύρματη ζεύξη. Προφανώς αυτή αφορά στη μετάδοση σημάτων σε μεγάλες αποστάσεις, η οποία είναι και η ουσία των ασύρματων τηλεπικοινωνιών. Στην περίπτωση αυτή, αυτό που κατ' αρχήν ενδιαφέρει είναι η ισχύς που μεταδίδεται από τον πομπό στον δέκτη. Το πρόβλημα είναι λιγότερο περίπλοκο από το γενικό πρόβλημα υπολογισμού του επαγόμενου ρεύματος και μάλιστα διευκολύνεται πολύ από το γεγονός ότι τα χαρακτηριστικά εκπομπής και λήψης (όπως το διάγραμμα ακτινοβολίας, το κέρδος και η σύνθετη αντίσταση) μιας κεραίας ταυτίζονται. Αυτό είναι ένα από τα κυριότερα συμπεράσματα της θεωρίας των κεραιών και οι συνέπειές του,

* Ο υπολογισμός του επαγόμενου ρεύματος στην κεραία λήψης θεωρητικά μπορεί να γίνει με βάση τους νόμους Maxwell λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες που ισχύουν πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, αλλά οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι περίπλοκες και η λύση παρουσιάζει μεγάλες αριθμητικές δυσχέρειες.

καθώς και το θεμελιώδες θεώρημα από το οποίο απορρέει (θεώρημα της αμοιβαιότητας), θα αναλυθούν στα επόμενα.

Η άλλη περίπτωση αλληλεπίδρασης είναι οι κεραιές να βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη, πράγμα που μπορεί να συμβεί όταν αποτελούν μέρη (στοιχεία) μιας στοιχειοκεραίας (array) η οποία όπως θα δούμε αργότερα είναι σύστημα πολλών όμοιων κεραιών. Τότε ο σκοπός του συστήματος των κεραιών δεν είναι η μετάδοση σήματος από τη μία στην άλλη αλλά η επίτευξη βελτιωμένων χαρακτηριστικών της στοιχειοκεραίας σε σχέση με αυτά που θα είχαν μεμονωμένα τα στοιχεία αυτής (οι επιμέρους κεραιές που την αποτελούν). Δεν υπάρχουν λοιπόν μονοσήμαντοι ρόλοι πομπού και δέκτη μεταξύ των επιμέρους κεραιών της στοιχειοκεραίας (ή μάλλον καθεμία από τις επιμέρους κεραιές μπορεί να παίζει συγχρόνως και τους δύο ρόλους), αλλά η συνολική στοιχειοκεραία παίζει ρόλο πομπού ή δέκτη κατά περίπτωση. Κατά συνέπεια αυτό που ενδιαφέρει δεν είναι τόσο η ισχύς που μεταδίδεται μεταξύ των επιμέρους αλληλεπιδρώντων κεραιών όσο η μεταβολή του ρεύματος καθεμίας από αυτές εξαιτίας της παρουσίας της άλλης (ή των άλλων), είτε τροφοδοτούνται όλες είτε μόνο ορισμένες από αυτές, με άλλα λόγια το πρόβλημα της διέγερσης στοιχειοκεραίας δηλ. του υπολογισμού των ρευμάτων (και τάσεων) τροφοδοσίας των επιμέρους στοιχείων αυτής. Φυσικά η άλλη πλευρά του προβλήματος είναι ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών ακτινοβολίας (επομένως και χαρακτηριστικών λήψης) της στοιχειοκεραίας, πράγμα που θα εξετασθεί αργότερα.

Στα επόμενα, λοιπόν, θα χρησιμοποιούμε τον όρο «αλληλεπίδραση κεραιών» με γενικότερη έννοια υποδηλώνοντας οποιαδήποτε από τις ανωτέρω περιπτώσεις, ενώ ο όρος «ασύρματη ζεύξη» θα αναφέρεται ειδικότερα στην περίπτωση δύο απομακρυσμένων κεραιών εκπομπής και λήψης οι οποίες βρίσκονται η μία στο μακρινό πεδίο της άλλης. Θα αναφερθούμε σε γενικές αρχές και μεθόδους που εφαρμόζονται σε κάθε περίπτωση αλληλεπίδρασης κεραιών, ενώ στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση ασύρματων ζεύξεων εξετάζοντας την ενεργό επιφάνεια, η οποία είναι το κύριο μέγεθος χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά μιας κεραιάς σε κατάσταση λήψης, και τη βασική εξίσωση που ισχύει για ασύρματες ζεύξεις η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση του Friis.

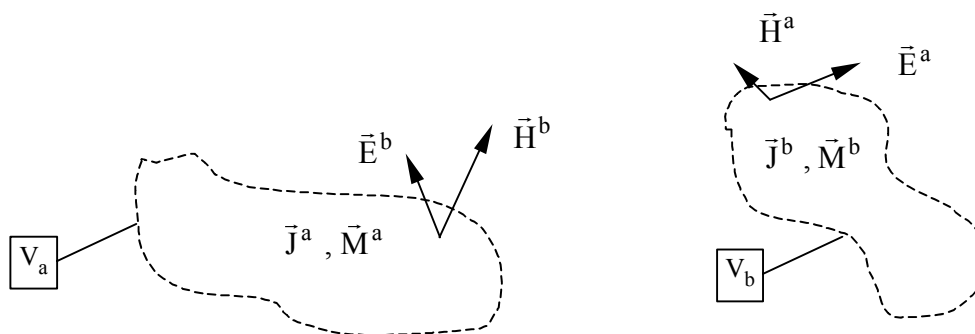
5.2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΜΟΙΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

5.2.1. Η γενική μορφή

Το θεώρημα της αμοιβαιότητας (reciprocity theorem) είναι από τα σημαντικότερα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Στη γενική του μορφή διατυπώνεται (και αποδεικνύεται με βάση τους νόμους του Maxwell) σε σχέση με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάποια

περιοχή του χώρου, ενώ εφαρμόζεται ουσιαστικά σε όλα τα προβλήματα διάδοσης και σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Γενικά το θεώρημα της αμοιβαιότητας αναφέρεται σε δύο οποιεσδήποτε πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, δηλ. ρευματικές κατανομές, (a) και (b), οι οποίες βρίσκονται σε κάποια περιοχή του χώρου και δημιουργούν κύματα είτε συγχρόνως είτε και αλληλοδιαδόχως. Οι εν λόγω πηγές κυμάτων γενικά μπορεί να είναι κάποιες κατανομές (πυκνότητες) ηλεκτρικών ρευμάτων \vec{J} , καθώς και οι λεγόμενες πυκνότητες μαγνητικών ρευμάτων \vec{M} , οι οποίες είναι φανταστικές πηγές που (ως γνωστόν) δεν υπάρχουν στη φύση αλλά είναι δυνατόν να ορισθούν κατάλληλα (με βάση τη λεγόμενη μέθοδο των ισοδύναμων πηγών) ώστε να διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Έστω λοιπόν \vec{J}^a και \vec{M}^a οι κατανομές ρευμάτων (ηλεκτρικών και μαγνητικών) που αποτελούν την πηγή (a) και δημιουργούν τα πεδία \vec{E}^a και \vec{H}^a , και αντίστοιχα οι κατανομές \vec{J}^b και \vec{M}^b που αποτελούν την πηγή (b) και δημιουργούν τα πεδία \vec{E}^b και \vec{H}^b . Η γεωμετρία για την εφαρμογή του θεωρήματος φαίνεται στο Σχ. 5.1 που ακολουθεί.



Σχ. 5.1: Περιοχές, πηγές και πεδία για την εφαρμογή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας. Τα πεδία \vec{E}^a , \vec{H}^a δημιουργούνται από τις πηγές \vec{J}^a και \vec{M}^a , και αντίστοιχα τα (b).

Υπό την προϋπόθεση ότι η περιοχή αυτή του χώρου είναι γραμμική και ισοτροπική (αλλά όχι αναγκαστικά ομογενής, δηλ. οι ηλεκτρικές και μαγνητικές σταθερές του χώρου επιτρέπεται να μεταβάλλονται συναρτήσει της θέσης), αποδεικνύεται η σχέση

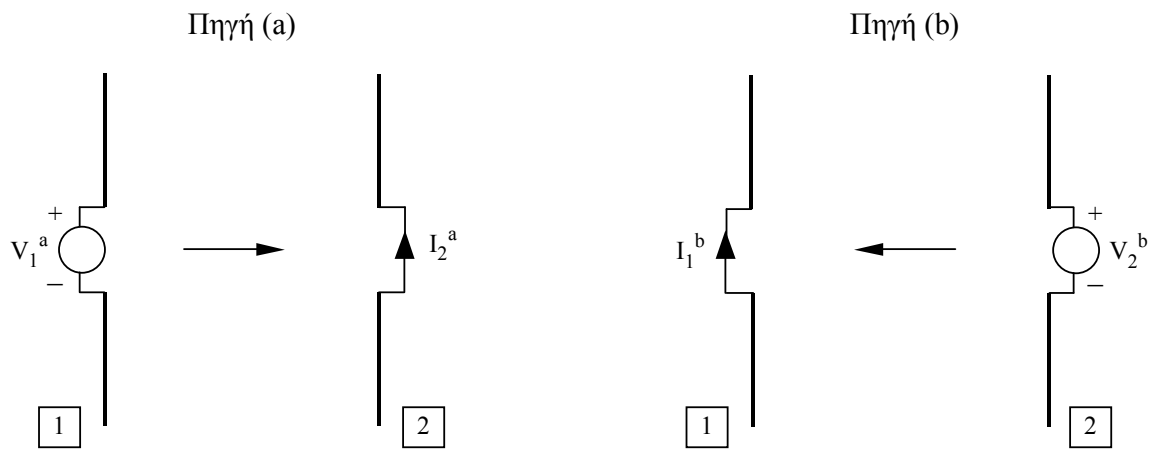
$$\iiint_{V_b} (\vec{E}^a \cdot \vec{J}^b - \vec{H}^a \cdot \vec{M}^b) dV = \iiint_{V_a} (\vec{E}^b \cdot \vec{J}^a - \vec{H}^b \cdot \vec{M}^a) dV \quad (5.2.1)$$

η οποία είναι η γενική ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας (υπάρχει και διαφορική μορφή αλλά δεν θα μας απασχολήσει εδώ). Οι περιοχές V_a και V_b είναι αυτές που καταλαμβάνουν οι ρευματικές κατανομές (a) και (b) αντίστοιχα. Όπως δείχνει η (5.2.1), στη γενική (πεδιακή) αυτή μορφή του θεωρήματος υπεισέρχονται τα πεδία \vec{E}^a και \vec{H}^a που δημιουργούνται από την πηγή (a) στην περιοχή V_b και τα πεδία \vec{E}^b και \vec{H}^b που δημιουργούνται από την πηγή (b) στην περιοχή V_a . Δηλ. οι τιμές των ρευμάτων της κάθε

πηγής συνδυάζονται με τα πεδία που δημιουργούνται στην περιοχή της από την άλλη πηγή.

5.2.2. Η κυκλωματική μορφή

Η γενική (πεδιακή) μορφή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας έχει, όπως προαναφέρθηκε, πολύ μεγάλη θεωρητική σπουδαιότητα αλλά στην πράξη είναι δύσχρηστη. Για την πρακτική εφαρμογή του στην περίπτωση δύο κεραιών σε αλληλεπίδραση είναι σαφώς προτιμότερη (και απλούστερη) η κυκλωματική μορφή του θεωρήματος, η οποία χρησιμοποιεί τις τάσεις και τα ρεύματα πάνω στις δύο κεραίες. Θεωρούμε δύο κεραίες #1 και #2 στις οποίες εφαρμόζονται διαδοχικά δύο πηγές τάσης (a) και (b), δηλ. οι πηγές ενεργούν χωριστά (πράγμα που, όπως έχει αναφερθεί, δεν επηρεάζει την ισχύ του θεωρήματος). Η πηγή (a) έχει τάση V_1^a και η πηγή (b) έχει τάση V_2^b . Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε και ότι οι δύο πηγές ενεργούν συγχρόνως, αλλά η φυσική εικόνα είναι απλούστερη αν τις εξετάσουμε χωριστά. Πρώτα εφαρμόζεται η πηγή τάσης V_1^a στην κεραία #1 και η κεραία #2 βραχυκυκλώνεται, δηλ. η κεραία #1 είναι σε κατάσταση εκπομπής και η κεραία #2 σε κατάσταση λήψης. Τότε στην κεραία #2 λόγω της τάσης V_1^a δημιουργείται κάποιο ρεύμα I_2^a . Έπειτα εφαρμόζεται η πηγή τάσης V_2^b στην κεραία #2 και βραχυκυκλώνεται η κεραία #1, οπότε αντίστοιχα στην κεραία #1 λόγω της τάσης V_2^b δημιουργείται κάποιο ρεύμα I_1^b . Έχουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις, η μία με την πηγή (a) οπότε η κεραία #1 εκπέμπει και η #2 λαμβάνει, και η άλλη με την πηγή (b) οπότε οι κεραίες αντιστρέφουν ρόλους, δηλ. η #2 εκπέμπει και η #1 λαμβάνει. Η κατάσταση απεικονίζεται στο Σχ. 5.2. Σημειώνουμε ότι η εικόνα των κεραιών ως διπόλων είναι καθαρά ενδεικτική. Το θεώρημα ισχύει για κεραίες οποιουδήποτε είδους, σε οποιαδήποτε σχετική θέση και με οποιονδήποτε προσανατολισμό μεταξύ τους, πρέπει όμως κατά την αντιστροφή των ρόλων η γεωμετρία της διάταξης, δηλ. η σχετική θέση και ο προσανατολισμός των κεραιών, να διατηρείται αμετάβλητη.



Σχ. 5.2: Δύο κεραιές σε κατάσταση εκπομπής και λήψης εναλλάξ για την εφαρμογή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας

Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι το θεώρημα της αμοιβαιότητας ανάγεται στην ακόλουθη σχέση τάσεων και ρευμάτων

$$\frac{V_1^a}{I_2^a} = \frac{V_2^b}{I_1^b} \quad (5.2.2)$$

η οποία αποτελεί την κυκλωματική μορφή του θεωρήματος. Στη μορφή αυτή το θεώρημα λέει ότι η σχέση μεταξύ της τάσης που τροφοδοτεί την κεραιά εκπομπής και του ρεύματος που δημιουργείται στην κεραιά λήψης παραμένει η ίδια όταν αντιστραφούν οι ρόλοι των δύο κεραιών. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι η τάση V_1^a αντιστοιχεί σε μια ισοδύναμη πηγή κατά Thevenin που τροφοδοτεί το ισοδύναμο κύκλωμα εκπομπής της κεραιάς #1, ενώ αντίστοιχα το ρεύμα βραχυκυκλώσεως I_2^a αποτελεί την ισοδύναμη πηγή κατά Norton η οποία τροφοδοτεί το ισοδύναμο κύκλωμα λήψης (θα το δούμε αμέσως μετά) της κεραιάς #2. Κατά την αντιστροφή των ρόλων των δύο κεραιών προφανώς αντιστρέφεται και η φυσική σημασία των αντίστοιχων τάσεων και ρευμάτων.

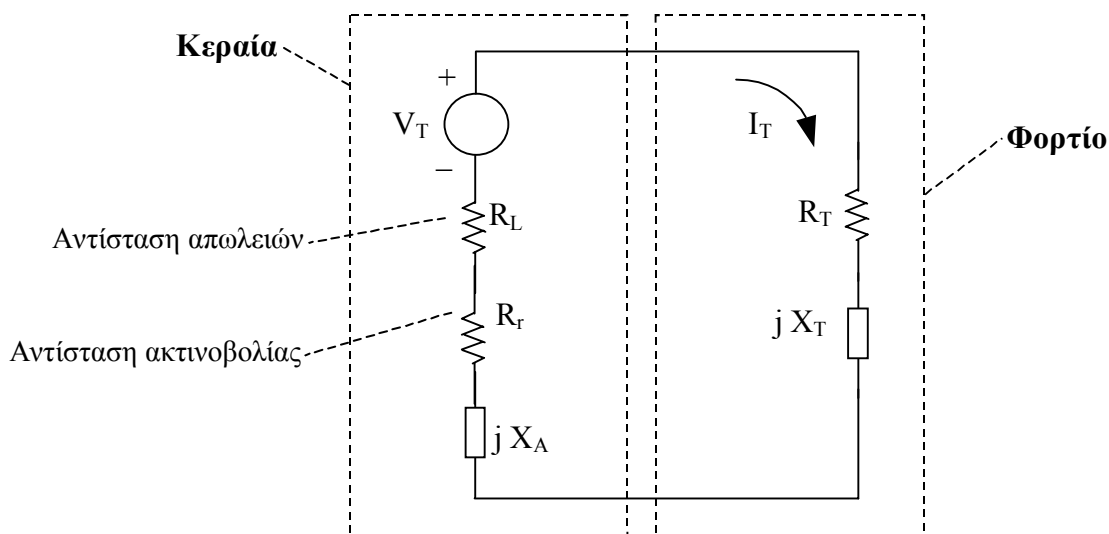
5.3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

5.3.1. Ισοδύναμο κύκλωμα κεραιάς λήψης

Όταν μια κεραιά βρίσκεται σε κατάσταση λήψης, η συμπεριφορά της σε σχέση με το υπόλοιπο κύκλωμα που συνδέεται σε αυτή (δηλ. το κύκλωμα του δέκτη) μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός ισοδύναμου κυκλώματος, κατά αντίστοιχο τρόπο όπως και στην περίπτωση εκπομπής. Το ισοδύναμο αυτό κύκλωμα αποτελείται από το ισοδύναμο Thevenin της κεραιάς λήψης (φυσικά θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το ισοδύναμο Norton) και μια σύνθετη αντίσταση που αντιπροσωπεύει τον δέκτη (είναι η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος δέκτη, με ή χωρίς γραμμή μεταφοράς). Το ισοδύναμο Thevenin της κεραιάς, κατά τα γνωστά, εμφανίζει στους ακροδέκτες του (οι οποίοι είναι οι

ίδιοι οι ακροδέκτες της κεραίας) τιμές τάσης και ρεύματος οι οποίες ταυτίζονται με αυτές που εμφανίζει η κεραία. Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι η κεραία λήψης έχει τον ρόλο της πηγής και ο δέκτης τον ρόλο του φορτίου, διότι η κεραία προσφέρει ισχύ (που προέρχεται από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που συλλέγει) προς το κύκλωμα του δέκτη το οποίο την απορροφά. Αυτή είναι και η διαφορά του ισοδύναμου κυκλώματος κεραίας λήψης σε σχέση με το ισοδύναμο κύκλωμα εκπομπής, δηλ. το γεγονός ότι στο ισοδύναμο κύκλωμα λήψης της κεραίας περιλαμβάνεται και μια πηγή. Από την άλλη πλευρά, η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση της κεραίας είναι η ίδια όπως και στην κατάσταση εκπομπής, πράγμα που αποδεικνύεται με βάση το θεώρημα της αμοιβαιότητας.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας λήψης είναι όπως φαίνεται στο Σχ. 5.3. Οι (ωμικές) αντιστάσεις ακτινοβολίας R_T και απωλειών R_L και η (άεργη) αντίδραση X_A της κεραίας είναι οι ίδιες όπως και στο κύκλωμα εκπομπής. Η ισοδύναμη πηγή V_T της κεραίας αντιπροσωπεύει την ισχύ του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που συλλέγει και μετατρέπει σε ισχύ ρευμάτων η κεραία, ενώ η σύνθετη αντίσταση φορτίου $Z_T = R_T + jX_T$ είναι η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση (αντίσταση εισόδου) του δέκτη.



Σχ. 5.3: Το ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας λήψης

Όπως τονίσθηκε, οι R_T και R_L είναι ακριβώς οι ίδιες όπως και για την εκπομπή, η φυσική τους ερμηνεία όμως διαφέρει στην περίπτωση της λήψης. Η αντίσταση απωλειών R_L αντιστοιχεί στο μέρος της ισχύος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που καταναλώνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών πάνω στην κεραία, ενώ η αντίσταση ακτινοβολίας R_T αντιστοιχεί σε ένα άλλο μέρος της ισχύος που επανεκπέμπεται (δηλ. σκεδαάζεται) από την κεραία προς τον χώρο που την περιβάλλει. Η συνολική ισχύς στο κύκλωμα κεραίας – φορτίου (δηλ. η συνολική ισχύς που παρέχει η ισοδύναμη πηγή) αποτελείται από τη σκεδαζόμενη ισχύ W_{sc} , την ισχύ απωλειών της κεραίας W_L και την ωφέλιμη ισχύ W_T που τελικά καταλήγει στο φορτίο, δηλ. στον δέκτη:

$$W_{ολ} = W_T + W_{sc} + W_L \quad (5.3.1)$$

και οι τύποι που δίνουν καθεμία από τις ισχύεις αυτές είναι εντελώς αντίστοιχοι με τους τύπους του ισοδύναμου κυκλώματος εκπομπής (βλ. τις εξ. (4.3.9-11) του προηγούμενου κεφαλαίου) και αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

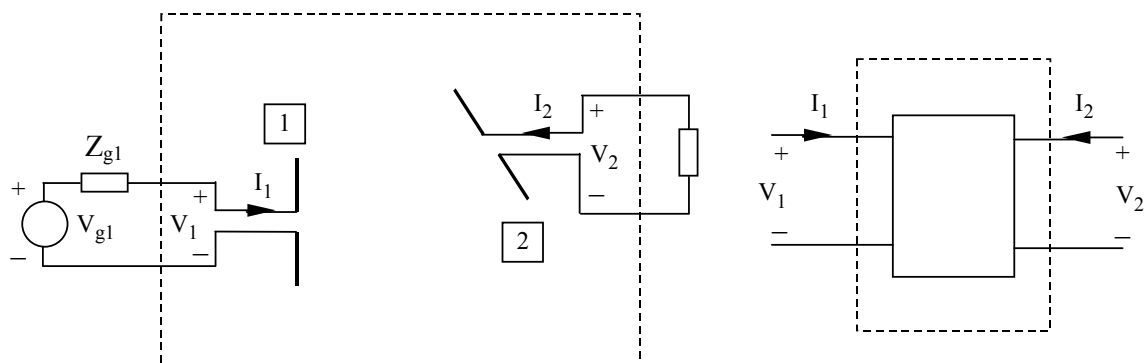
Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό, η R_T είναι κατά κανόνα πολύ μεγαλύτερη από την R_L , πράγμα που σημαίνει ότι η ισχύς που σκεδάζεται από την κεραία λήψης είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη που καταναλώνεται πάνω σε αυτή και αποτελεί το κυριότερο αίτιο μείωσης της ισχύος που τελικά καταλήγει στον δέκτη (δηλ. της ωφέλιμης ισχύος για το κύκλωμα λήψης). Το θεώρημα συζυγούς προσαρμογής φυσικά ισχύει και εδώ και λέει ότι η ωφέλιμη ισχύς που μεταβιβάζεται από την κεραία προς τον δέκτη μεγιστοποιείται όταν η σύνθετη αντίσταση εισόδου του δέκτη είναι συζυγώς προσαρμοσμένη προς την ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση της κεραίας, δηλ.

$$\begin{aligned} R_T &= R_r + R_L \\ X_T &= -X_A \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

και τότε η ωφέλιμη ισχύς είναι ίση προς το μισό της συνολικής ισχύος που παρέχει η πηγή, δηλ. της ισχύος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που συλλέγει η κεραία. Με άλλα λόγια, τουλάχιστον το μισό της ηλεκτρομαγνητικής ισχύος που συλλέγει η κεραία λήψης είτε σκεδάζεται είτε χάνεται υπό μορφή θερμικών απωλειών και (στην καλύτερη περίπτωση!) το άλλο μισό παρέχεται στον δέκτη. Η φυσική σημασία της παρατήρησης αυτής είναι ότι αναγκαστικά η κεραία λήψης σκεδάζει (επανεκπέμπει) ένα σημαντικό τμήμα της ισχύος του κύματος που λαμβάνει, δηλ. πάντοτε λειτουργεί εν μέρει και ως κεραία εκπομπής (λόγω των ρευμάτων εξ επαγωγής πάνω στην κεραία λήψης). Όταν λοιπόν η κεραία εκπομπής και η κεραία λήψης είναι σχετικά κοντά, η επίδραση του σκεδαζόμενου κύματος στην κεραία εκπομπής δεν είναι αμελητέα και λαμβάνεται υπόψη με τη βοήθεια του ισοδύναμου διθύρου κυκλώματος που εξετάζεται στην επόμενη ενότητα.

5.3.2. Ισοδύναμο κύκλωμα κεραιών σε αλληλεπίδραση

Έστω δύο κεραίες #1 και #2 που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σε οποιαδήποτε γεωμετρική διάταξη (απόσταση και προσανατολισμό μεταξύ τους) και σε οποιαδήποτε κατάσταση λειτουργίας, π.χ. η κεραία #1 εκπέμπει και η κεραία #2 λαμβάνει, ή το αντίστροφο, είτε και συνδυασμός των δύο (οι δύο κεραίες εκπέμπουν και λαμβάνουν συγχρόνως). Η συμπεριφορά του εν λόγω συστήματος των δύο αλληλεπιδρωσών κεραιών, μη συμπεριλαμβανομένων των εξωτερικών κυκλωμάτων που τυχόν συνδέονται σε αυτές, μπορεί να περιγραφεί από ένα ισοδύναμο δίθυρο κύκλωμα, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4.



Σχ. 5.4: Δύο κεραιές σε αλληλεπίδραση και το ισοδύναμο δίθυρο κύκλωμα αυτών

Το κύκλωμα που συνδέεται σε κάθε κεραία μπορεί λοιπόν να είναι οποιοδήποτε (στο Σχ. 5.4 φαίνεται ενδεικτικά και μόνο η κεραία #1 συνδεδεμένη με πηγή και η #2 με φορτίο), αλλά αυτό δεν περιλαμβάνεται στο ισοδύναμο δίθυρο και δεν το επηρεάζει. Το ισοδύναμο δίθυρο είναι ένα μοντέλο που περιγράφει τις σχέσεις μεταξύ των τάσεων και ρευμάτων στους ακροδέκτες της κεραίας #1 και τους ακροδέκτες της κεραίας #2. Οι πολικότητες και φορές αναφοράς των εν λόγω τάσεων και ρευμάτων λαμβάνονται κατά σύμβαση όπως στο Σχ. 5.4, πράγμα που δεν βλάπτει τη γενικότητα του μοντέλου, αφού αν τυχόν οι πραγματικές πολικότητες και φορές είναι αντίθετες αυτό θα εκφρασθεί απλώς με αρνητικό πρόσημο (κατά τα γνωστά).

Υπό την προϋπόθεση ότι ο χώρος που περιβάλλει τις κεραιές είναι γραμμικός και ιστροπικός (πράγμα που ισχύει ουσιαστικά πάντοτε στην πράξη), οι τάσεις και τα ρεύματα στις θύρες του διθύρου διέπονται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (5.3.3\alpha)$$

$$V_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (5.3.3\beta)$$

όπου καθεμία από τις Z_{11} και Z_{22} λέγεται **ιδία* σύνθετη αντίσταση** (self-impedance) της κεραίας #1 και της #2 αντίστοιχα, ενώ η Z_{12} ονομάζεται **αμοιβαία σύνθετη αντίσταση** (mutual impedance) μεταξύ των κεραιών #1 και #2. Στο σύστημα των εξισώσεων (5.3.3α-β), το οποίο προφανώς μπορεί να γραφεί και με πίνακες, οι διαγώνιοι όροι $Z_{11}I_1$ και $Z_{22}I_2$ σχετίζονται με τη συμπεριφορά εκάστης μεμονωμένης κεραίας, ενώ οι δύο άλλοι όροι $Z_{12}I_2$ και $Z_{12}I_1$ εκφράζουν την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αυτών κεραιών: αν αφαιρεθούν αυτοί, το σύστημα ανάγεται σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις όμοιες με αυτές που ισχύουν για την κάθε κεραία μόνη στο χώρο. Αυτό σημαίνει ότι η ίδια σύνθετη αντίσταση (Z_{11} και Z_{22}) καθεμιάς από τις κεραιές #1 και #2 ταυτίζεται με την σύνθετη

* Η λέξη «ιδία» στη συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει «δική της», όπως στα αρχαία ελληνικά.

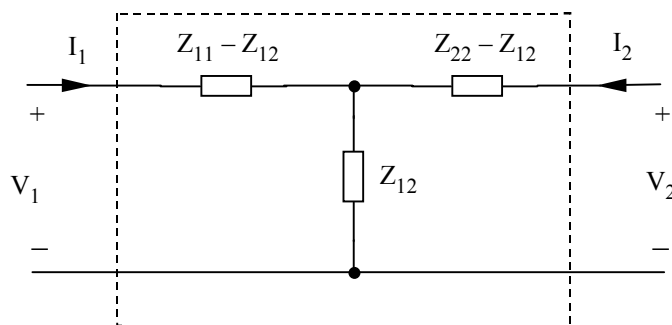
αντίσταση της κεραίας*, όπως είναι γνωστή από τα ισοδύναμα κυκλώματα εκπομπής και λήψης αυτής. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το ισοδύναμο δίθυρο αποτελεί επέκταση της έννοιας της σύνθετης αντίστασης κεραίας ώστε να καλύψει και την περίπτωση περισσότερων κεραιών σε αλληλεπίδραση. Η αμοιβαία σύνθετη αντίσταση Z_{12} γενικά εξαρτάται από το είδος των δύο κεραιών, την απόσταση και τον σχετικό προσανατολισμό τους. Ειδικότερα, όπως είναι προφανές, η Z_{12} μειώνεται καθώς αυξάνει η απόσταση, διότι τότε η αλληλεπίδραση των κεραιών εξασθενεί.

Σημειώνουμε ότι στη θεωρία κυκλωμάτων η γενική μορφή των εξισώσεων διθύρου είναι

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

δηλ. υπάρχουν δύο αμοιβαίες σύνθετες αντιστάσεις Z_{12} και Z_{21} , ανάλογα με τη «φορά» της αλληλεπίδρασης. Εφόσον αυτές είναι ίσες, $Z_{12} = Z_{21}$, το δίθυρο λέγεται αμφίδρομο. Στην περίπτωση δύο κεραιών σε αλληλεπίδραση η αμφίδρομικότητα ισχύει πάντοτε υπό την προϋπόθεση γραμμικού και ισοτροπικού χώρου, δηλ. μπορεί ουσιαστικά να θεωρείται δεδομένη όπως έγινε στις (5.3.3α-β). Αυτό απορρέει από το θεώρημα της αμοιβαιότητας**. Εναλλακτικά, το σύστημα των δύο κεραιών μπορεί επίσης να περιγραφεί και με το λεγόμενο ισοδύναμο T-κύκλωμα που φαίνεται στο Σχ. 5.5. Οι σύνθετες αντιστάσεις του κυκλώματος αυτού σχετίζονται με τις τιμές των Z_{11} , Z_{22} και Z_{12} με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Εύκολα διαπιστώνουμε εφαρμόζοντας τους νόμους Kirchhoff ότι τα μεγέθη V_1 , V_2 και I_1 , I_2 στο ισοδύναμο T-κύκλωμα διέπονται επίσης από τις (5.3.3α-β), πράγμα που αποδεικνύει ότι πρόκειται όντως για ισοδύναμο κύκλωμα.



Σχ. 5.5: Ισοδύναμο T-κύκλωμα για δύο κεραιές σε αλληλεπίδραση

* Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό με τον ακόλουθο συλλογισμό: Θεωρούμε ότι απομακρύνουμε βαθμηδόν τη μία κεραία από την άλλη, οπότε η Z_{12} μειώνεται διαρκώς και τελικά όταν η απόσταση γίνει πολύ μεγάλη (τείνει στο άπειρο) η Z_{12} οριακά μηδενίζεται, κάθε κεραία είναι πλέον απομονωμένη από την άλλη και ισχύει γι' αυτή το γνωστό ισοδύναμο κύκλωμα εκπομπής ή λήψης. Όμως η Z_{11} και η Z_{22} δεν αλλάζουν, άρα αυτές είναι που συμμετέχουν στο κάθε ισοδύναμο κύκλωμα.

** Μια απόδειξη δίνεται στο Παράδειγμα 5.1.

Χρησιμοποιώντας είτε το ισοδύναμο δίθυρο είτε το ισοδύναμο T-κύκλωμα μπορούμε να βρούμε την σύνθετη αντίσταση εισόδου για κάθε μία θύρα του κυκλώματος, δηλ. για κάθε μία από τις αλληλεπιδρώσες κεραιές. Σύμφωνα με την θεωρία κυκλωμάτων η σύνθετη αντίσταση εισόδου είναι η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση όπως «φαίνεται» μεταξύ των δύο ακροδεκτών της κάθε συγκεκριμένης θύρας, δηλ. ο λόγος τάσης / ρεύματος στη θύρα αυτή. Από τις (5.3.3α-β) παίρνουμε

$$Z_{in,1} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1} \quad (5.3.4α)$$

$$Z_{in,2} = \frac{V_2}{I_2} = Z_{12} \frac{I_1}{I_2} + Z_{22} \quad (5.3.4β)$$

Η σύνθετη αντίσταση εισόδου $Z_{in,1}$ (ή $Z_{in,2}$) λέγεται **σύνθετη αντίσταση οδήγησης** (driving point impedance) της κεραιάς #1 (ή της κεραιάς #2 αντίστοιχα) και εκφράζει την σύνθετη αντίσταση που «βλέπει» το κύκλωμα που συνδέεται με την κεραιά αυτή (πομπός ή δέκτης). Πρόκειται λοιπόν για την σύνθετη αντίσταση εισόδου (ή εξόδου) της κεραιάς όπως αυτή τροποποιείται από την παρουσία της άλλης κεραιάς και την αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Η σύνθετη αντίσταση οδήγησης είναι αυτή που πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε κυκλωματικούς υπολογισμούς για την κάθε κεραιά, π.χ. για να προσαρμοσθεί αυτή με τον πομπό που την τροφοδοτεί (ή με τον δέκτη που τροφοδοτείται από αυτή). Για να την προσδιορίσουμε πρέπει να γνωρίζουμε τα στοιχεία του ισοδύναμου διθύρου (δηλ. τις Z_{11} , Z_{22} και Z_{12}) καθώς και κάποιο δεδομένο που να επιτρέπει τον υπολογισμό του λόγου ρευμάτων I_1 / I_2 (π.χ. από τα υπόλοιπα κυκλώματα που συνδέονται με το δίθυρο).

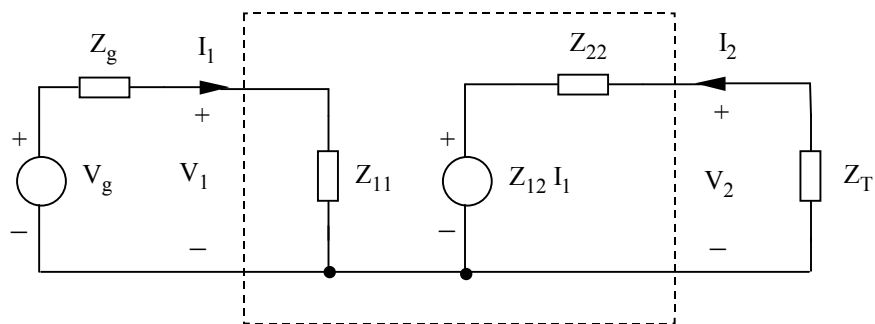
Στην περίπτωση που οι αλληλεπιδρώσες κεραιές αποτελούν μια ασύρματη ζεύξη, δηλ. βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση η μία από την άλλη (η κεραιά λήψης είναι στο μακρινό πεδίο της κεραιάς εκπομπής), θεωρώντας ότι η κεραιά #1 είναι σε κατάσταση εκπομπής και η #2 λήψης παρατηρούμε ότι στην (5.3.3α) ο όρος $Z_{12}I_2$ μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος διότι τότε ισχύει συγχρόνως $Z_{12} \ll Z_{11}$ (η αμοιβαία σύνθετη αντίσταση είναι πολύ μικρή) και $I_2 \ll I_1$ (το ρεύμα στην κεραιά λήψης είναι πολύ μικρό), και επομένως $Z_{12}I_2 \ll Z_{11}I_1$. Από την άλλη πλευρά, ο όρος $Z_{12}I_1$ στην (5.3.3β) δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος διότι ισχύει $Z_{12} \ll Z_{22}$ αλλά και $I_1 \gg I_2$, και άρα δεν μπορεί να βγει συμπέρασμα για τη σχέση μεταξύ των γινομένων $Z_{12}I_1$ και $Z_{22}I_2$ από μαθηματική άποψη, αλλά και από φυσική άποψη δεν είναι επιτρεπτό να θεωρηθεί αμελητέος επειδή αν αγνοηθεί αυτός ο όρος χάνεται όλη η πληροφορία σχετικά με την αλληλεπίδραση των κεραιών και το δίθυρο ανάγεται (όπως προαναφέρθηκε) σε δύο ανεξάρτητα κυκλώματα εκπομπής και λήψης τα οποία δεν παρέχουν κανένα στοιχείο για την μεταξύ τους ζεύξη. Κατά συνέπεια, στην

περίπτωση ασύρματης ζεύξης, οι εξισώσεις (5.3.3α-β) με την παραπάνω απλοποίηση έρχονται στη μορφή

$$V_1 \cong Z_{11}I_1 \quad (5.3.5\alpha)$$

$$V_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (5.3.5\beta)$$

Από φυσική άποψη, η απλοποίηση αυτή σημαίνει ότι σε μια ασύρματη ζεύξη (δηλ. σε μεγάλη απόσταση) το ρεύμα της κεραίας εκπομπής δεν επηρεάζεται από την παρουσία της κεραίας ή των κεραιών λήψης (σκεφθείτε π.χ. το παράδειγμα ενός ραδιοφωνικού σταθμού), ενώ το ρεύμα της κεραίας λήψης προφανώς επηρεάζεται από την κεραία εκπομπής (αλλιώς δεν θα υπήρχε ζεύξη!). Στην περίπτωση αυτή, το ισοδύναμο δίθυρο ανάγεται στο κύκλωμα του Σχ. 5.6, το οποίο εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τις (5.3.5α-β).



Σχ. 5.6: Το ισοδύναμο κύκλωμα για ασύρματη ζεύξη

Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.6, το ισοδύναμο δίθυρο έχει αναχθεί σε δύο ανεξάρτητα επιμέρους κυκλώματα, τα οποία είναι ακριβώς τα ισοδύναμα κυκλώματα εκπομπής και λήψης που έχουν παρουσιασθεί στα προηγούμενα για μια μεμονωμένη κεραία. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο αυτών κυκλωμάτων (μέσω της ασύρματης ζεύξης) εκφράζεται από την εξαρτημένη πηγή τάσης $Z_{12}I_1$, η οποία είναι η ισοδύναμη πηγή τάσης του κυκλώματος λήψης (η V_T του Σχ. 5.3) και εδώ δίνεται η εξάρτησή της από το ρεύμα στην κεραία εκπομπής.

5.4. ΕΝΕΡΓΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΕΡΑΙΑΣ

5.4.1. Ορισμοί

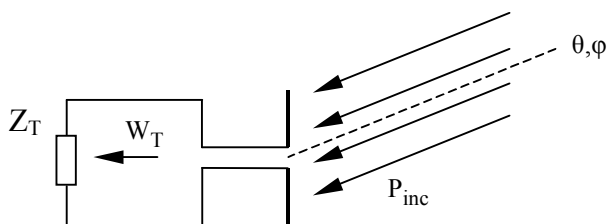
Όπως προκύπτει από τις γενικές ιδιότητες του μακρινού πεδίου (πεδίου ακτινοβολίας) που έχουν αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα οποιασδήποτε κεραίας εκπομπής στο πεδίο ακτινοβολίας είναι ένα σφαιρικό κύμα (δηλ. οι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι σφαίρες) το οποίο τοπικά προσομοιάζει με επίπεδο κύμα. Δηλ. σε μια ασύρματη ζεύξη η κεραία λήψης (ευρισκόμενη στο πεδίο ακτινοβολίας της κεραίας εκπομπής) «βλέπει» ένα κύμα το οποίο, στις περιορισμένες γεωμετρικές διαστάσεις της,

έχει ουσιαστικά τη μορφή επίπεδου κύματος. Κατά συνέπεια, το διάνυσμα Poynting του προσπίπτοντος κύματος, δηλ. του κύματος που προσπίπτει στην κεραία λήψης ερχόμενο από την κεραία εκπομπής, είναι περίπου σταθερό κατά μέτρο και διεύθυνση σε όλη την περιοχή της κεραίας λήψης. Η διεύθυνση (θ, φ) του διανύσματος αυτού (διεύθυνση πρόσπτωσης) είναι η διεύθυνση υπό την οποία η κεραία λήψης «βλέπει» την κεραία εκπομπής (την κεραία από την οποία προέρχεται το κύμα) και το μέτρο P_{inc} του εν λόγω διανύσματος δίνει την προσπίπτουσα πυκνότητα ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας. Από την ισχύ που μεταφέρει το προσπίπτον κύμα κάποια ποσότητα συλλέγεται από την κεραία λήψης, μετατρέπεται σε ισχύ ρευμάτων και τελικά εν μέρει αποδίδεται στο φορτίο (δέκτη) που συνδέεται με την κεραία (ωφέλιμη ισχύς W_T) και εν μέρει σκεδάζεται ή καταναλώνεται υπό μορφή απωλειών στην κεραία.

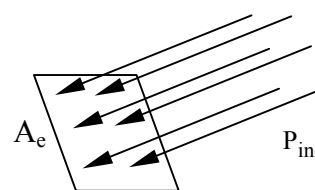
Η ενεργός επιφάνεια A_e (effective area ή effective aperture) της κεραίας λήψης ως προς κάποια διεύθυνση (θ, φ) ορίζεται από τον λόγο της ωφέλιμης ισχύος W_T που τελικά αποδίδει η κεραία στο φορτίο της προς την πυκνότητα ισχύος P_{inc} του προσπίπτοντος κύματος που προσέρχεται στην κεραία από την διεύθυνση (θ, φ) :

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{W_T}{P_{inc}} \tag{5.4.1}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η ενεργός επιφάνεια εκφράζεται σε μονάδες εμβαδού (m^2), πράγμα που δικαιολογεί την ονομασία «επιφάνεια». Η φυσική της σημασία είναι το εμβαδόν μιας ιδεατής επιφάνειας που θα έπρεπε να τοποθετηθεί κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος ώστε να συλλέξει τόση ισχύ όση είναι η ωφέλιμη ισχύς που αποδίδει η κεραία στο φορτίο της, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.7.



Σχ. 5.7α: Ορισμός ενεργού επιφάνειας κεραίας



Σχ. 5.7β: Φυσική ερμηνεία της

Η ενεργός επιφάνεια είναι το βασικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τη συμπεριφορά της κεραίας σε κατάσταση λήψης. Εξαρτάται από τη διεύθυνση πρόσπτωσης (θ, φ) διότι τα χαρακτηριστικά λήψης της κεραίας εξαρτώνται από αυτή, δηλ. η ισχύς που επιτυγχάνει να συλλέξει η κεραία λήψης διαφέρει ανάλογα με τη διεύθυνση υπό την οποία «βλέπει» την κεραία εκπομπής, δηλ. τη διεύθυνση από την οποία προσέρχεται σε αυτή το κύμα. Αν σχεδιάζαμε ένα πολικό διάγραμμα της $A_e(\theta, \varphi)$, αυτό θα αποτελούσε το «διάγραμμα λήψης» της κεραίας που θα έδειχνε τη συμπεριφορά της ανά κάθε διεύθυνση λήψης. Όπως

θα δούμε όμως σε λίγο, τέτοιο διάγραμμα δεν είναι ανάγκη να σχεδιασθεί διότι είναι ταυτόσημο με το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας.

Από τον ορισμό (5.4.1) παρατηρούμε ότι η ενεργός επιφάνεια γενικά εξαρτάται και από το φορτίο με το οποίο συνδέεται η κεραία. Πραγματικά, από το ισοδύναμο κύκλωμα λήψης της κεραίας (βλ. το Σχ. 5.3) παίρνουμε

$$W_T = \frac{1}{2} R_T |I|^2 = \frac{|V_T|^2}{2} \frac{R_T}{(R_T + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2} \quad (5.4.2)$$

Προκειμένου όμως να ορισθεί ένα μέγεθος χαρακτηριστικό της κεραίας καθαυτής και ανεξάρτητο από το υπόλοιπο κύκλωμα που συνδέεται (ή θα μπορούσε να συνδεθεί) με αυτή, συνήθως η ενεργός επιφάνεια ορίζεται με την παραδοχή ότι η κεραία έχει συνδεθεί με φορτίο συζυγώς προσαρμοσμένο με αυτή, δηλ. $Z_T = Z_A^* = R_T + R_L - j X_A$. Τότε η ωφέλιμη ισχύς που μεταδίδεται στο φορτίο γίνεται μέγιστη και δίνεται, κατά τα γνωστά, από την

$$W_T = W_{T,\max} = \frac{|V_T|^2}{8(R_T + R_L)} = \frac{|V_T|^2}{8R_T} \quad (5.4.3)$$

και με βάση την ισχύ αυτή ορίζεται η μέγιστη ενεργός επιφάνεια της κεραίας (προσοχή: μέγιστη ως προς το φορτίο και όχι ως προς τη διεύθυνση). Η παραδοχή αυτή κατά κανόνα θεωρείται δεδομένη στον ορισμό της ενεργού επιφάνειας (εκτός αν αναφέρεται ρητώς το αντίθετο). Αν είναι γνωστή η ενεργός επιφάνεια και χρειάζεται να υπολογισθεί η ωφέλιμη ισχύς για κάποιο άλλο φορτίο διαφορετικό από το προσαρμοσμένο, ο υπολογισμός γίνεται με τη βοήθεια του ισοδύναμου κυκλώματος της κεραίας λήψης.

Κατά ανάλογο τρόπο μπορούν να ορισθούν και άλλες «ενεργοί» ή «ισοδύναμες» επιφάνειες που αντιπροσωπεύουν άλλα τμήματα της ισχύος που συλλέγει η κεραία λήψης. Ειδικότερα, από τη σκεδαζόμενη ισχύ ορίζεται η επιφάνεια σκέδασης (scattering area)

$$A_s(\theta, \varphi) = \frac{W_{sc}}{P_{inc}} \quad (5.4.4)$$

και από την ισχύ απωλειών η επιφάνεια απωλειών (loss area)

$$A_L(\theta, \varphi) = \frac{W_L}{P_{inc}} \quad (5.4.5)$$

ενώ μπορεί να ορισθεί και η επιφάνεια συλλογής (capture area) η οποία αντιπροσωπεύει τη συνολική ισχύ που συλλέγει η κεραία από το προσπίπτον κύμα

$$A_c(\theta, \varphi) = \frac{W_{ολ}}{P_{inc}} \quad (5.4.6)$$

Όλες οι παραπάνω επιφάνειες ορίζονται συνήθως με την παραδοχή συζυγούς προσαρμογής μεταξύ κεραίας και φορτίου, όπως και η ενεργός επιφάνεια. Είναι προφανές ότι μεταξύ τους υπάρχει μια σχέση αντίστοιχη με την (5.3.1) μεταξύ των ισχύων που αντιπροσωπεύουν:

$$A_c = A_e + A_s + A_L \quad (5.4.7)$$

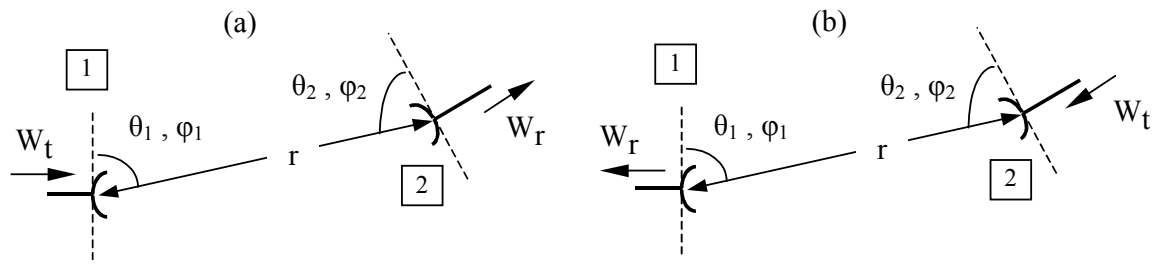
δηλ. η A_c ισούται με το σύνολο των άλλων τριών, ενώ επίσης οι A_s και A_L συνδέονται μέσω του συντελεστή απόδοσης ακτινοβολίας της κεραίας που έχει ορισθεί στα προηγούμενα.

Τονίζουμε επίσης ότι οι παραπάνω επιφάνειες έχουν διαστάσεις εμβαδού, δεν ταυτίζονται όμως με τη φυσική επιφάνεια της κεραίας. Προκειμένου για **κεραίες ανοίγματος** (aperture antennas), δηλ. κεραίες με σχετικά μεγάλη φυσική επιφάνεια (όπως είναι τα κάτοπτρα και οι χοανοκεραίες), η συνολική επιφάνεια συλλογής προσεγγίζει τη φυσική τους επιφάνεια, και μάλιστα είναι πλησιέστερη σε αυτή όσο σταθερότερη είναι η κατανομή των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων πάνω στο άνοιγμα της κεραίας (πράγμα που γενικά συμβαίνει για μεγάλα ανοίγματα). Αντίθετα, για κεραίες αποτελούμενες από λεπτούς (νηματοειδείς) αγωγούς (thin wire antennas), όπως είναι τα δίπολα, η επιφάνεια συλλογής είναι πολύ μεγαλύτερη από τη φυσική επιφάνειά τους η οποία άλλωστε τείνει στο 0.

5.4.2. Ενεργός επιφάνεια και κατευθυντικότητα – κέρδος

Στο σημείο αυτό θα δείξουμε ότι η ενεργός επιφάνεια κεραίας (η οποία περιγράφει τα χαρακτηριστικά λήψης της), σχετίζεται άμεσα με την κατευθυντικότητα και το κέρδος της, τα οποία ως γνωστόν είναι τα βασικά μεγέθη που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά εκπομπής της κεραίας. Η σχέση αυτή, που βασίζεται στο θεώρημα της αμοιβαιότητας, μας οδηγεί στο θεμελιώδες συμπέρασμα ότι τα χαρακτηριστικά εκπομπής και λήψης κάθε κεραίας είναι ταυτόσημα.

Θεωρούμε δύο κεραίες #1 και #2 σε αλληλεπίδραση οι οποίες αποτελούν ασύρματη ζεύξη, δηλ. βρίσκονται η μία στο πεδίο ακτινοβολίας της άλλης. Η #1 βλέπει την #2 υπό διεύθυνση (θ_1, φ_1) , ενώ η #2 βλέπει την #1 υπό διεύθυνση (θ_2, φ_2) και έστω r η απόσταση μεταξύ των δύο κεραιών. Έστω επίσης $A_{e1}(\theta_1, \varphi_1)$, $D_1(\theta_1, \varphi_1)$ και $A_{e2}(\theta_2, \varphi_2)$, $D_2(\theta_2, \varphi_2)$ η ενεργός επιφάνεια και η κατευθυντικότητα καθεμιάς από αυτές, ενώ εφόσον έχουν απώλειες θεωρούμε και τα κέρδη αυτών $G_1(\theta_1, \varphi_1)$ και $G_2(\theta_2, \varphi_2)$. Η γεωμετρία της διάταξης φαίνεται στο Σχ. 5.8 (τα σύμβολα των δύο κεραιών είναι γενικού χαρακτήρα χωρίς να υποδηλώνουν κάποιο ιδιαίτερο τύπο κεραίας, όπως άλλωστε και σε όλα τα προηγούμενα).



Σχ. 5.8: Ασύρματη ζεύξη δύο κεραιών με εναλλασσόμενους ρόλους. (a): Η κεραία #1 εκπέμπει και η #2 λαμβάνει, (b): Η κεραία #2 εκπέμπει και η #1 λαμβάνει.

Θεωρούμε ότι εκτελούνται δύο πειράματα (a) και (b), τα οποία αντιστοιχούν σε δύο περιπτώσεις λειτουργίας των κεραιών με αντεστραμμένους ρόλους. Και στις δύο περιπτώσεις (a) και (b) υποθέτουμε συνθήκες συζυγούς προσαρμογής στις δύο κεραιές (με το κύκλωμα πομπού και δέκτη στο οποίο συνδέεται εκάστη). Στο πείραμα (a) η κεραία #1 εκπέμπει και η #2 λαμβάνει, και έστω W_t η ισχύς εισόδου (τροφοδοσίας) της κεραιάς εκπομπής #1 (όπως έχει ορισθεί στην παράγραφο 4.2.3 του προηγούμενου κεφαλαίου) και W_r η ωφέλιμη ισχύς που αποδίδει η κεραία λήψης #2 στον δέκτη (όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο 5.4.1). Στο πείραμα (b) οι ρόλοι των δύο κεραιών εναλλάσσονται, δηλ. η #2 εκπέμπει και η #1 λαμβάνει, διατηρώντας όμως τη γεωμετρία της διάταξης (δηλ. την απόσταση και τον σχετικό προσανατολισμό των κεραιών) ακριβώς ίδια και θέτοντας την ισχύ εισόδου (τροφοδοσίας) της κεραιάς #2 ίση με την προηγούμενη W_t της κεραιάς #1. Τότε για το πείραμα (b) αποδεικνύεται ότι η ωφέλιμη ισχύς που αποδίδει η κεραία #1 στον δέκτη θα είναι ίση με την προηγούμενη W_r , δηλ. με την ωφέλιμη ισχύ στον δέκτη του πειράματος (a). Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα της αμοιβαιότητας*.

Στην περίπτωση (a) που η #1 εκπέμπει, μια ισοτροπική κεραία ισοδύναμη προς την #1 θα δημιουργούσε πάνω στην κεραία λήψης #2 πυκνότητα ισχύος (διάνυσμα Poynting) με μέτρο

$$P_0 = \frac{W_t}{4\pi r^2}$$

* Η απόδειξη βασίζεται στην (5.2.2), μετατρέποντας όμως τα ρεύματα βραχυκυκλώσεως I_2^a και I_1^b (που είναι ουσιαστικά ισοδύναμες πηγές κατά Norton) στις ισοδύναμες πηγές τάσης κατά Thevenin για το κύκλωμα της εκάστοτε κεραιάς λήψης δηλ. της #1 για (a) και της #2 για (b). Λαμβάνουμε υπόψη την ισότητα της ισχύος εισόδου W_t στις περιπτώσεις (a) και (b) από την οποία, δεδομένης της συζυγούς προσαρμογής, συνεπάγεται μια σχέση για τις πηγές V_1^a και V_2^b . Εφαρμόζοντας την (5.2.2) οδηγούμαστε σε μια σχέση για τις προαναφερθείσες ισοδύναμες πηγές τάσης Thevenin από την οποία απορρέει η ισότητα της ωφέλιμης ισχύος προς τον δέκτη.

εφόσον η κεραία #1 δεν έχει απώλειες (οπότε $W_t = W_{rad}$), ενώ αν έχει απώλειες (οπότε ο συντελεστής απόδοσής της έστω n_1) το διάνυσμα Poynting που δημιουργεί μια ισοδύναμη ιστροπική κεραία θα έχει μέτρο

$$P_0 = \frac{n_1 W_t}{4\pi r^2}$$

Από τον ορισμό της κατευθυντικότητας (4.2.6) συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα Poynting της κεραίας #1 πάνω στην #2 προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το διάνυσμα Poynting της ισοδύναμης ιστροπικής κεραίας επί την κατευθυντικότητα της κεραίας #1:

$$P_1 = P_0 D_1(\theta_1, \varphi_1) = \frac{W_t n_1 D_1(\theta_1, \varphi_1)}{4\pi r^2} = \frac{W_t G_1(\theta_1, \varphi_1)}{4\pi r^2}$$

(στο ίδιο συμπέρασμα θα μπορούσαμε να φτάσουμε και κατευθείαν συνδυάζοντας την (4.2.6) με την (4.2.1) που αποτελεί τον ορισμό της έντασης ακτινοβολίας).

Εφαρμόζοντας τον ορισμό (5.4.1) για την ενεργό επιφάνεια της κεραίας #2 και χρησιμοποιώντας την τιμή που βρέθηκε παραπάνω για την πυκνότητα ισχύος P_1 του προσπίπτοντος κύματος σε αυτή παίρνουμε

$$W_r = A_{e2}(\theta_2, \varphi_2) P_1 = \frac{W_t G_1(\theta_1, \varphi_1) A_{e2}(\theta_2, \varphi_2)}{4\pi r^2} \quad (5.4.8\alpha)$$

Στη συνέχεια εκτελούμε το πείραμα (b), δηλ. θεωρούμε την περίπτωση (b) όπου η #2 εκπέμπει και η #1 λαμβάνει. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ότι το διάνυσμα Poynting πάνω στην κεραία #1 που προέρχεται από την κεραία #2 δίνεται από την

$$P_2 = P_0 D_2(\theta_2, \varphi_2) = \frac{W_t n_2 D_2(\theta_2, \varphi_2)}{4\pi r^2} = \frac{W_t G_2(\theta_2, \varphi_2)}{4\pi r^2}$$

και από τον ορισμό της ενεργού επιφάνειας για την κεραία #1 παίρνουμε

$$W_r = A_{e1}(\theta_1, \varphi_1) P_2 = \frac{W_t G_2(\theta_2, \varphi_2) A_{e1}(\theta_1, \varphi_1)}{4\pi r^2} \quad (5.4.8\beta)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η W_r παραμένει η ίδια στην περίπτωση (b).

Συνδυάζοντας τις (5.4.8α-β) παίρνουμε

$$G_2(\theta_2, \varphi_2) A_{e1}(\theta_1, \varphi_1) = G_1(\theta_1, \varphi_1) A_{e2}(\theta_2, \varphi_2) \Rightarrow \frac{G_1(\theta_1, \varphi_1)}{A_{e1}(\theta_1, \varphi_1)} = \frac{G_2(\theta_2, \varphi_2)}{A_{e2}(\theta_2, \varphi_2)} \quad (5.4.9)$$

Η (5.4.9) λέει ότι για δύο οποιοσδήποτε κεραίες (και για οποιοσδήποτε κατευθύνσεις) ο λόγος του κέρδους προς την ενεργό επιφάνεια είναι ο ίδιος. Αντίστοιχη αναλογία ισχύει προφανώς για την κατευθυντικότητα εφόσον οι δύο κεραίες (ή και μόνο η μία από αυτές) δεν έχουν απώλειες. Αφού όμως το συμπέρασμα αυτό προέκυψε για δύο οποιοσδήποτε κεραίες, άρα ισχύει για όλες τις κεραίες. Με άλλα λόγια, ο λόγος του κέρδους προς την

ενεργό επιφάνεια είναι σταθερός για όλες τις κεραίες. Κατά συνέπεια αρκεί ο λόγος αυτός να βρεθεί για μία συγκεκριμένη κεραία και έπειτα μπορεί να εφαρμοσθεί αυτούσιος σε κάθε κεραία. Μάλιστα αφού, όπως είδαμε, ο λόγος είναι ο ίδιος για οποιαδήποτε κατεύθυνση, αρκεί αυτός να βρεθεί για μία συγκεκριμένη κατεύθυνση, π.χ. για την κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας.

Η απλούστερη περίπτωση κεραίας είναι προφανώς ένα δίπολο Hertz και μάλιστα χωρίς απώλειες. Στην περίπτωση αυτή η κατευθυντικότητα, η οποία ταυτίζεται με το κέρδος του, είναι γνωστή και ίση (βλ. την παράγραφο 4.4.3 του προηγούμενου κεφαλαίου) με 1,5 στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας. Επίσης η ενεργός επιφάνεια στην κατεύθυνση αυτή προσδιορίζεται θεωρητικά ότι είναι ίση με $3\lambda^2 / 8\pi$. Δηλαδή για το δίπολο Hertz έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} G_{mH} = 1,5 \\ A_{emH} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{G_{mH}}{A_{emH}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \quad (5.4.10)$$

Επομένως για κάθε κεραία ο λόγος της (5.4.9) έχει την τιμή της (5.4.10), δηλ.

$$\frac{G(\theta, \varphi)}{A_e(\theta, \varphi)} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \Leftrightarrow A_e(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta, \varphi) \quad (5.4.11)$$

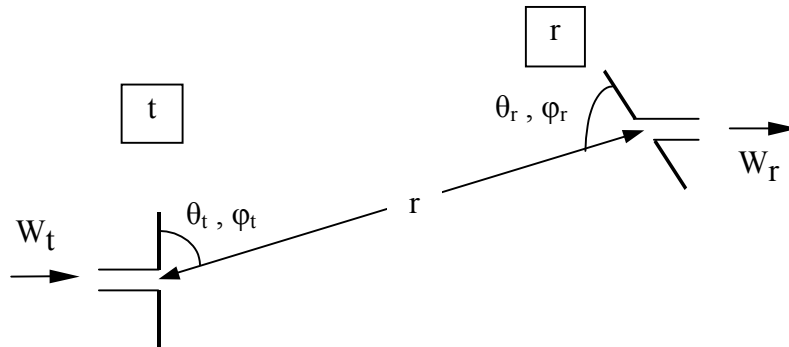
Η (5.4.11) είναι η σχέση που συνδέει την ενεργό επιφάνεια με το κέρδος σε κάθε περίπτωση κεραίας, και προφανώς ανάγεται στην αντίστοιχη μορφή με την κατευθυντικότητα αντί του κέρδους εφόσον η κεραία δεν έχει απώλειες. Ένα από τα συμπεράσματα που απορρέουν από αυτή είναι το γεγονός ότι, όπως προαναφέρθηκε επανειλημμένως, το διάγραμμα ακτινοβολίας της κεραίας εκφράζει και τα χαρακτηριστικά λήψης αυτής, αφού όπως δείχνει η (5.4.11) αποτελεί συγχρόνως (με διαφορά μόνο στην κλίμακα) και διάγραμμα της ενεργού επιφάνειας της κεραίας συναρτήσει της κατεύθυνσης.

5.5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΣΥΡΜΑΤΩΝ ΖΕΥΞΕΩΝ

5.5.1. Η εξίσωση του Friis

Η λεγόμενη εξίσωση του Friis είναι η βασική σχέση που διέπει τη μετάδοση ισχύος από μια κεραία σε μια άλλη (από την κεραία εκπομπής στη κεραία λήψης) μέσω μιας ασύρματης ζεύξης στον ελεύθερο χώρο (δηλ. χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τυχόν ατμοσφαιρικά φαινόμενα, η επίδραση του εδάφους κτλ.) Η εξίσωση αυτή βασίζεται στην θεμελιώδη σχέση μεταξύ κέρδους και ενεργού επιφάνειας κεραίας που βρέθηκε προηγουμένως. Για τη διατύπωσή της αναφερόμαστε στη γενική γεωμετρία ασύρματης ζεύξης, χωρίς να χρειάζεται πλέον η αντιστροφή ρόλων μεταξύ κεραιών #1 και #2, συμβολίζοντας απλώς ό,τι σχετίζεται με την κεραία εκπομπής με τον δείκτη t (transmitter)

και ό,τι σχετίζεται με την κεραία λήψης με τον δείκτη r (receiver). Με τον συμβολισμό αυτό, η κεραία εκπομπής βλέπει την κεραία λήψης υπό διεύθυνση (θ_t, φ_t) , ενώ η κεραία λήψης βλέπει την κεραία εκπομπής υπό διεύθυνση (θ_r, φ_r) . Όπως και στα προηγούμενα, συμβολίζουμε με W_t την ισχύ εισόδου (τροφοδοσίας) της κεραίας εκπομπής και W_r την ωφέλιμη ισχύ που αποδίδει η κεραία λήψης στον δέκτη υπό συνθήκες συζυγούς προσαρμογής. Το συμπέρασμα που θα βρούμε ισχύει λοιπόν με την παραδοχή συζυγούς προσαρμογής και στις δύο κεραίες, αλλά δεν είναι δύσκολο να επεκταθεί και σε διαφορετικές περιπτώσεις με χρήση των ισοδύναμων κυκλωμάτων εκπομπής και λήψης.



Σχ. 5.9: Ασύρματη ζεύξη μεταξύ κεραίας εκπομπής (t) και λήψης (r) για την εφαρμογή της εξίσωσης Friis

Θα προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ της ισχύος εισόδου της κεραίας εκπομπής W_t και της ωφέλιμης ισχύος W_r της κεραίας λήψης. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε το διάνυσμα Poynting P_t του κύματος που δημιουργεί η κεραία εκπομπής πάνω στην κεραία λήψης. Με την ίδια διαδικασία όπως στην προηγούμενη παράγραφο βρίσκουμε ότι η τιμή του διανύσματος αυτού είναι, εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες στην κεραία εκπομπής

$$P_t = \frac{W_t D_t(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi r^2}$$

ή γενικότερα, εφόσον υπάρχουν και απώλειες

$$P_t = \frac{W_t \eta_t D_t(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi r^2} = \frac{W_t G_t(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi r^2}$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της ενεργού επιφάνειας της κεραίας λήψης παίρνουμε

$$W_r = P_t A_{er}(\theta_r, \varphi_r) = \frac{W_t G_t(\theta_t, \varphi_t) A_{er}(\theta_r, \varphi_r)}{4\pi r^2}$$

και χρησιμοποιώντας την (5.4.11) για την ενεργό επιφάνεια καταλήγουμε στην

$$W_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 W_t G_t(\theta_t, \varphi_t) G_r(\theta_r, \varphi_r) \quad (5.4.12)$$

Η (5.4.12) είναι η έκφραση της εξίσωσης Friis για τον ελεύθερο χώρο (δηλ. όταν μεταξύ των κεραιών εκπομπής και λήψης μεσολαβεί κενό ή αέρας και χωρίς να λαμβάνεται

υπόψη η γη ή άλλα αντικείμενα), για οποιοδήποτε σχετικό προσανατολισμό της μίας κεραίας προς την άλλη, αλλά με την σιωπηρή παραδοχή ότι οι δύο κεραίες έχουν την ίδια πόλωση. Τυχόν διαφορά στην πόλωση των δύο κεραιών (εκπομπής και λήψης) προκαλεί μείωση της μεταδιδόμενης ισχύος και εξετάζεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Από την άλλη πλευρά, αν υποθεθεί ότι οι κεραίες εκπομπής και λήψης είναι τοποθετημένες υπό βέλτιστο προσανατολισμό (δηλ. καθεμία βλέπει την άλλη υπό τη διεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας της) και με την ίδια πόλωση, τότε τα κέρδη των δύο κεραιών λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους και η εξίσωση απλοποιείται στη μορφή

$$W_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 W_t G_{mt} G_{mr} \quad (5.4.13)$$

Αυτή είναι μια αρκετά συνηθισμένη μορφή της εξίσωσης Friis, δεδομένου ότι στην πράξη πάντοτε επιδιώκεται οι δύο κεραίες να τοποθετούνται κατά τον βέλτιστο δυνατό τρόπο.

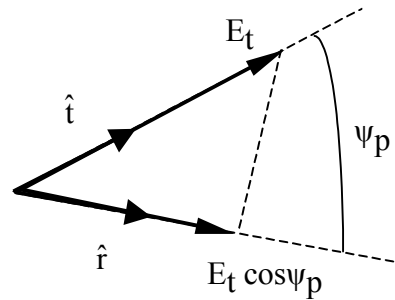
5.5.2. Η επίδραση της πόλωσης

Ως πόλωση μιας κεραίας εννοείται η πόλωση του κύματος που ακτινοβολεί αυτή όταν είναι σε κατάσταση εκπομπής. Για περισσότερα σχετικά με τη γενικότερη έννοια της πόλωσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος ο αναγνώστης παραπέμπεται στην παράγραφο 7 της Εισαγωγής. Ως προς την κατάσταση λήψης, η γενική αρχή (η οποία θα πρέπει να έχει γίνει αρκετά σαφής στον αναγνώστη μέχρι τώρα) της ταυτότητας των ιδιοτήτων εκπομπής και λήψης κεραίας εφαρμόζεται και εδώ, υπό την έννοια ότι η πόλωση του κύματος που ακτινοβολεί η κεραία όταν είναι σε κατάσταση εκπομπής είναι συγχρόνως η «προτιμητέα» πόλωση για την κεραία σε κατάσταση λήψης, δηλ. η πόλωση ενός προσπίπτοντος κύματος από το οποίο η κεραία λήψης θα συλλέξει μέγιστη ισχύ σε σύγκριση με άλλα προσπίπτοντα κύματα με την ίδια πυκνότητα ισχύος αλλά διαφορετική πόλωση.

Για να γίνει πιο συγκεκριμένη η έννοια των παραπάνω θα θεωρήσουμε (για απλότητα) γραμμική πόλωση τόσο της κεραίας εκπομπής όσο και της κεραίας λήψης*, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.10, όπου οι κατευθύνσεις των πολώσεων των κεραιών εκπομπής και λήψης (ή ακριβέστερα οι πολώσεις του προσπίπτοντος κύματος και της κεραίας λήψης) παριστάνονται με δύο μοναδιαία διανύσματα \hat{t} και \hat{r} αντίστοιχα. Έστω ότι οι δύο αυτές πολώσεις σχηματίζουν γωνία ψ_p όπως στο σχήμα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι στην κεραία λήψης προσπίπτει ένα κύμα γραμμικά πολωμένο κατά τη διεύθυνση \hat{t} με ηλεκτρικό πεδίο

* Αντίστοιχα συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν και για τα άλλα είδη πόλωσης, με περισσότερες αλγεβρικές περιπλοκές αλλά με την ίδια ουσία. Η διαφορά της πόλωσης μεταξύ της κεραίας λήψης και του κύματος μπορεί επιπλέον να οφείλεται στην στροφή της πόλωσής του καθώς μεταδίδεται στην ατμόσφαιρα.

E_t κατά τη διεύθυνση αυτή.



Σχ. 5.10: Διαφορά πολώσεων μεταξύ εκπομπής (t) και λήψης (r)

Αν το προσπίπτον πεδίο E_t ήταν πολωμένο κατά τη διεύθυνση \hat{t} τότε θα προσέφερε μέγιστη ισχύ στην κεραία λήψης λαμβανόμενο από αυτή. Αν πάλι ήταν πολωμένο σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση \hat{t} τότε δεν θα προσέφερε καθόλου ισχύ στην κεραία λήψης δηλ. ουσιαστικά δεν θα μπορούσε να ληφθεί από αυτή (σκεφθείτε π.χ. την περίπτωση ενός διπόλου το οποίο δεν μπορεί να λάβει κύμα πολωμένο κάθετα στην διεύθυνσή του διότι πάνω στο δίπολο δεν μπορούν να δημιουργηθούν ρεύματα κατά τη διεύθυνση αυτή). Στη γενικότερη περίπτωση που εξετάζουμε (η οποία δεν ταυτίζεται με καμμία από τις δύο προηγούμενες «ακραίες» περιπτώσεις πολώσεων), αναλύουμε το προσπίπτον πεδίο E_t σε δύο συνιστώσες, τη μία κατά τη διεύθυνση \hat{t} (φαίνεται στο σχήμα και έχει την τιμή $E_t \cos \psi_p$) και την άλλη κάθετη προς αυτή. Η συνιστώσα κατά τη διεύθυνση \hat{t} λαμβάνεται από την κεραία λήψης ενώ η άλλη όχι. Κατά συνέπεια η συνολική ισχύς που λαμβάνει η κεραία λήψης οφείλεται στην συνιστώσα του πεδίου $E_t \cos \psi_p$ που είναι παράλληλη στη διεύθυνση πόλωσης \hat{t} της κεραίας λήψης. Επειδή όμως η ισχύς είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του ηλεκτρικού πεδίου, η ισχύς που λαμβάνει η κεραία λήψης είναι ανάλογη προς $E_t^2 \cos^2 \psi_p$, ενώ η (μέγιστη) ισχύς που θα λάμβανε αν η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος ήταν παράλληλη στη διεύθυνση \hat{t} θα ήταν ανάλογη προς E_t^2 . Συμπεραίνουμε ότι όταν υπάρχει διαφορά πολώσεων μεταξύ εκπομπής και λήψης με γωνία ψ_p μεταξύ των δύο πολώσεων, τότε η ισχύς που λαμβάνει η κεραία μειώνεται κατά το τετράγωνο του $\cos \psi_p$, που λέγεται **συντελεστής απωλειών πόλωσης**:

$$n_p = \cos^2 \psi_p \quad (5.4.14)$$

Αν λοιπόν στην εξίσωση Friis ληφθεί υπόψη και μια διαφορά των πολώσεων των δύο κεραιών κατά γωνία ψ_p , η ισχύς που τελικά μεταδίδεται στο κύκλωμα δέκτη μειώνεται κατά τον συντελεστή απωλειών πόλωσης και η εξίσωση Friis παίρνει τη γενικότερη μορφή

$$W_r = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 W_t G_t(\theta_t, \varphi_t) G_r(\theta_r, \varphi_r) \cos^2 \psi_p \quad (5.4.15)$$

5.5.3. Προϋπολογισμός ζεύξης (Link budget)

Ο προϋπολογισμός ζεύξης ή ισολογισμός ισχύος ζεύξης (link budget) είναι γενική έννοια που εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε τηλεπικοινωνιακή ζεύξη (ασύρματη ή ενσύρματη). Πρόκειται για τον συνυπολογισμό όλων των παραγόντων (κερδών και απωλειών) που μεσολαβούν κατά τη μετάδοση της ισχύος από τον πομπό στον δέκτη, ο οποίος οδηγεί σε μια σχέση μεταξύ της ισχύος που παρέχει ο πομπός και της ισχύος που τελικά λαμβάνει ο δέκτης (ή κάποια ισοδύναμη παραλλαγή της). Όλα τα μεγέθη που εμπλέκονται εκφράζονται σε λογαριθμικές μονάδες, δηλ. τα κέρδη και απώλειες σε dB και οι ισχείς σε dBW ή dBm*. Έτσι ο υπολογισμός των κερδών και απωλειών ισχύος λαμβάνει τη μορφή προσθαφαιρέσεων (πράγμα που δικαιολογεί την ονομασία «προϋπολογισμός»).

Η απλούστερη μορφή προϋπολογισμού ζεύξης μπορεί να προκύψει από την εξίσωση Friis με μετατροπή της σε μονάδες dB. Από την (5.4.12) ή (5.4.13) με λογαρίθμιση παίρνουμε

$$W_r = W_t + G_t + G_r - L_p \quad (5.4.16)$$

όπου οι ισχείς W_t και W_r εκφράζονται στις ίδιες λογαριθμικές μονάδες (π.χ. και οι δύο σε dBW ή και οι δύο σε dBm κ.ο.κ.) και τα κέρδη** G_t και G_r εκφράζονται σε dB. Η ποσότητα L_p εκφράζει τις απώλειες διάδοσης*** (propagation loss) σε dB, οι οποίες για τον ελεύθερο χώρο (Free Space) από την εξίσωση Friis είναι

$$L_p = L_{FS} = -10 \log \left[\left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \right] \quad \text{και μετά τις πράξεις}$$

$$L_{FS} = 20 \log(4\pi) + 20 \log(r/\lambda) \cong 22 + 20 \log(r) - 20 \log(\lambda) \quad (5.4.17)$$

Πολύ συχνά στην πράξη προτιμάται η έκφραση συναρτήσεως της συχνότητας αντί για το μήκος κύματος. Αντικαθιστούμε $\lambda = c/f = 3 \cdot 10^8 / f$ και με λίγες πράξεις προκύπτει

$$L_{FS} = 20 \log(4\pi/3) - 160 + 20 \log(r) + 20 \log(f) \cong 20 \log(r) + 20 \log(f) - 147,56$$

* Η μονάδα ισχύος dBW εκφράζει το κατά πόσα dB η μετρούμενη ισχύς είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την στάθμη αναφοράς 1 W. Δηλ. η τιμή κάποιας ισχύος $W_{(dBW)}$ σε dBW συνδέεται με την τιμή της W σε Watt μέσω της $W_{(dBW)} = 10 \log W$. Εντελώς αντίστοιχα η μονάδα dBm εκφράζει το κατά πόσα dB η ισχύς είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την στάθμη αναφοράς 1 mW και συνδέεται με την τιμή σε mW μέσω της $W_{(dbm)} = 10 \log W_{(mW)}$. Επειδή $1 \text{ W} = 1000 \text{ mW}$ και άρα $W_{(mW)} = 1000 W$, με λογαρίθμιση προκύπτει η απλή σχέση μετατροπής $W_{(dbm)} = 10 \log W_{(mW)} = 10 \log(1000W) = 10 \log W + 30 = W_{(dBW)} + 30$. Στους προϋπολογισμούς ασύρματων ζεύξεων κατά κανόνα προτιμάται η μονάδα dBm που βρίσκεται ανάμεσα στα συνηθέστερα επίπεδα ισχύος των πομπών (W ή μεγαλύτερα) και των δεκτών (μW ή μικρότερα).

** Με βέλτιστο προσανατολισμό των κεραιών, αυτά είναι τα μέγιστα κέρδη G_{mt} και G_{mr} . Παρατηρούμε επίσης ότι η εμφάνιση των G_t και G_r προσθετικά στην (5.4.16) δικαιολογεί την ονομασία «κέρδος»!

*** Όπως έχει φανεί και από τα προηγούμενα, ο όρος «απώλειες» εδώ είναι κάπως καταχρηστικός διότι δεν εκφράζει τις ενεργειακές απώλειες αλλά την «αραιώση» της ισχύος του κύματος με την απόσταση.

όπου η απόσταση r είναι σε m και η συχνότητα f σε Hz όπως στην εξίσωση Friis. Στην πράξη συχνά η απόσταση εκφράζεται σε χιλιόμετρα και η συχνότητα σε MHz, οπότε αντικαθιστώντας $r = 10^3 \cdot r_{(\text{km})}$ και $f = 10^6 \cdot f_{(\text{MHz})}$ παίρνουμε

$$L_{\text{FS}} = 20 \log(4\pi/3) - 160 + 60 + 20 \log r_{(\text{km})} + 120 + 20 \log f_{(\text{MHz})}$$

και μετά τις πράξεις

$$L_{\text{FS}} \cong 32,44 + 20 \log r_{(\text{km})} + 20 \log f_{(\text{MHz})} \quad (5.4.18)$$

Σημειώνεται ότι πολλές φορές χρησιμοποιείται και η λεγόμενη «ισοδύναμη ισοτροπικά ακτινοβολούμενη ισχύς» (**EIRP** – Effective Isotropic Radiated Power) της κεραίας εκπομπής η οποία σε μονάδες ισχύος W, mW κ.ο.κ. είναι το γινόμενο $(\text{EIRP}) = G_t W_t$ ενώ σε λογαριθμικές μονάδες γράφεται

$$(\text{EIRP}) = W_t + G_t \quad (5.4.19)$$

Η EIRP εκφράζει την ολική ακτινοβολούμενη ισχύ που θα έπρεπε να έχει μια ισοτροπική κεραία ώστε να εκπέμπει με την ίδια ένταση ακτινοβολίας στην κατεύθυνση της ζεύξης.

Χρησιμοποιώντας την EIRP η (5.4.16) γράφεται

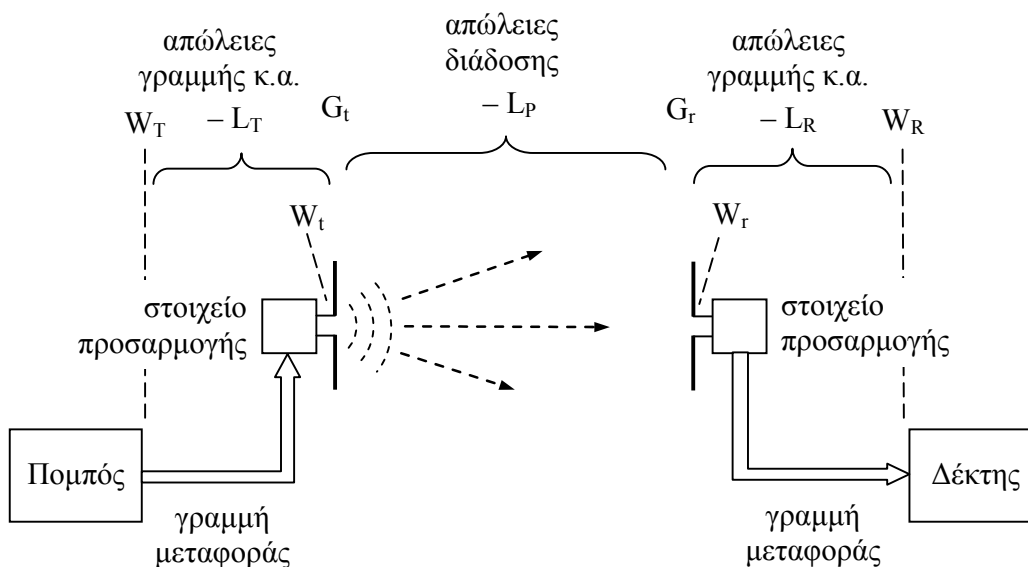
$$W_r = (\text{EIRP}) + G_r - L_p \quad (5.4.20)$$

Στα προηγούμενα, με W_t συμβολίζεται η ισχύς που εισέρχεται στην κεραία εκπομπής (προερχόμενη από τον πομπό) και με W_r η ισχύς που εξέρχεται από την κεραία λήψης (κατευθυνόμενη προς τον δέκτη). Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η ισχύς εξόδου του πομπού, έστω W_T , και η ισχύς εισόδου του δέκτη, έστω W_R . Η διαφορά έγκειται στο ότι μεταξύ του πομπού και της κεραίας εκπομπής μεσολαβεί ένα κύκλωμα το οποίο τυπικά περιλαμβάνει γραμμή μεταφοράς και κάποιο στοιχείο προσαρμογής αμέσως πριν την κεραία. Αντίστοιχο κύκλωμα μεσολαβεί μεταξύ της κεραίας λήψης και του δέκτη. Τα κυκλώματα αυτά προκαλούν απώλεια ισχύος λόγω αποσβέσεων στη γραμμή, τυχόν ανακλάσεων (οι οποίες έστω και με τα στοιχεία προσαρμογής δεν εκμηδενίζονται πάντοτε), άλλων ωμικών απωλειών στα επιμέρους στοιχεία κτλ. Συνήθως η τιμή της W_T προκύπτει από τα χαρακτηριστικά του πομπού (και για την W_R προκύπτει μια επιθυμητή ή ανεκτή τιμή από τις προδιαγραφές του δέκτη), ενώ και η μέτρηση των W_T και W_R στους ακροδέκτες πομπού και δέκτη είναι ευκολότερη παρά των W_t και W_r στις κεραίες.

Με βάση τα παραπάνω, συμβολίζουμε με L_T το σύνολο των απωλειών μεταξύ του πομπού και της κεραίας εκπομπής και με L_R το σύνολο των απωλειών μεταξύ της κεραίας λήψης και του δέκτη. Έτσι η βασική μορφή του προϋπολογισμού ζεύξης γράφεται

$$W_R = W_T + G_t + G_r - L_T - L_R - L_p \quad (5.4.21)$$

Στο Σχ. 5.11 απεικονίζεται εποπτικά η έννοια του προϋπολογισμού ζεύξης.



Σχ. 5.11: Σχηματική απεικόνιση του προϋπολογισμού ζεύξης

Οι απώλειες L_T μεταξύ του πομπού και της κεραίας εκπομπής περιλαμβάνουν

- τις απώλειες της γραμμής μεταφοράς, π.χ. μια γραμμή 10 m με συντελεστή απόσβεσης 0,2 dB/m δημιουργεί απώλειες 2 dB
- τις ωμικές απώλειες στο στοιχείο προσαρμογής (ή και άλλο) που παρεμβάλλεται (αναφέρονται συνήθως με τον όρο insertion loss)
- τις απώλειες λόγω κακής προσαρμογής δηλ. ανακλάσεων (αναφέρονται συνήθως με τον όρο return loss), π.χ. αν δίνεται ο $SWR = 1,5$ στο τέρμα της γραμμής, τότε από την (1.4.16) προκύπτει ο συντελεστής ανάκλασης $|\rho_L| = 0,2$ και ο συντελεστής ανάκλασης ισχύος $|\rho_L|^2 = 0,04$ δηλ. διέρχεται το 96% της ισχύος που σημαίνει απώλειες $L = -10 \log(0,96) \cong 0,18$ dB (εξηγήστε γιατί)
- τυχόν άλλες απώλειες εκτός από τις παραπάνω, π.χ. απώλειες σε μονωτικό προστατευτικό περίβλημα της κεραίας (radome) αν υπάρχει

Αντίστοιχα ισχύουν για τις απώλειες L_R μεταξύ της κεραίας λήψης και του δέκτη.

Οι απώλειες διάδοσης L_P στην ιδανική απλή περίπτωση της εξίσωσης Friis δίνονται από τις απώλειες L_{FS} όπως παραπάνω. Όπως έχει προαναφερθεί, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε διάδοση στον ελεύθερο χώρο η οποία δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση της ατμόσφαιρας και της γης (που με τη σειρά της εμπεριέχει διάφορους παράγοντες όπως το υλικό της επιφάνειας που μπορεί να είναι έδαφος διαφόρων τύπων ή θάλασσα, τον βαθμό τραχύτητας αυτής, τυχόν βλάστηση, την καμπυλότητα της γης κτλ), την τυχόν παρουσία εμποδίων κ.α. Σε πραγματικές περιπτώσεις πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση των παραγόντων αυτών η οποία εξαρτάται από πολλές παραμέτρους όπως η συχνότητα, οι καιρικές συνθήκες, ακόμη και η ώρα ή η εποχή του χρόνου (και γενικότερα η ηλιακή

δραστηριότητα). Πρόκειται λοιπόν για το συνθετότερο μέρος του προϋπολογισμού της ζεύξης το οποίο δεν είναι πάντοτε γνωστό με ακρίβεια διότι υπεισέρχονται πολλές προσεγγίσεις ή / και φαινόμενα τυχαίου χαρακτήρα. Εντούτοις η γενική μορφή του προϋπολογισμού εξακολουθεί να είναι όπως η (5.4.21) με τη διευκρίνιση ότι η L_P πρέπει να αναλυθεί ως άθροισμα διαφορών όρων

$$L_P = L_{FS} + L_{XPI} + L_1 + L_2 + \dots$$

Εδώ ο όρος L_{XPI} συμβολίζει τις απώλειες πόλωσης* οι οποίες για την απλή γραμμική πόλωση της προηγούμενης παραγράφου είναι $L_{XPI} = -20 \log(\cos \psi_p)$ ενώ για κυκλική ή ελλειπτική πόλωση ισχύουν πιο περίπλοκες σχέσεις, και σε πρακτικές περιπτώσεις πρέπει να ληφθεί υπόψη και η στροφή της πόλωσης λόγω ατμοσφαιρικών φαινομένων. Οι άλλοι όροι αντιστοιχούν στους διάφορους παράγοντες που προαναφέραμε, π.χ. L_1 μπορεί να είναι οι απώλειες λόγω της επίδρασης του εδάφους, L_2 λόγω τροποσφαιρικής διάδοσης, L_3 λόγω βροχόπτωσης κτλ. Μεγάλο μέρος της θεωρίας και πρακτικής των ασύρματων ζεύξεων έχει ως αντικείμενο τον προσδιορισμό των επιπτώσεων των εν λόγω παραγόντων. Ανάλογα με τη συχνότητα και το είδος της ζεύξης ορισμένοι από τους παράγοντες αυτούς ενδέχεται να είναι αμελητέοι αλλά και αυτό είναι προς διερεύνηση.

Το αποτέλεσμα του προϋπολογισμού ζεύξης είναι η εκτίμηση της ισχύος W_R που θα φτάσει στον δέκτη, η οποία, όπως είναι προφανές, είναι κρίσιμης σημασίας για τη ζεύξη. Πολύ συχνά από την W_R αφαιρείται η ισχύς θορύβου στην είσοδο του δέκτη για να προκύψει (σε dB) η τιμή του σηματοθορυβικού λόγου από την οποία εξαρτάται (άμεσα ή έμμεσα) η επίδοση τόσο στις ψηφιακές όσο και στις αναλογικές ζεύξεις. Υπάρχει επίσης κατά κανόνα (κυρίως στις ψηφιακές ζεύξεις) μια τιμή «κατωφλίου» (threshold) του σηματοθορυβικού λόγου στην είσοδο του δέκτη, και άρα μια αντίστοιχη τιμή W_{th} της ισχύος εισόδου (που αποτελεί μέτρο της ευαισθησίας του δέκτη), από την οποία και κάτω η μετάδοση είναι τόσο αργή (μεγάλος ρυθμός σφαλμάτων) ή τόσο κακής ποιότητας ώστε η ζεύξη ουσιαστικά βρίσκεται εκτός λειτουργίας (outage). Συγκρίνοντας την W_R με την W_{th} προκύπτουν συμπεράσματα για το πόσο «ασφαλής» είναι η λειτουργία της ζεύξης.

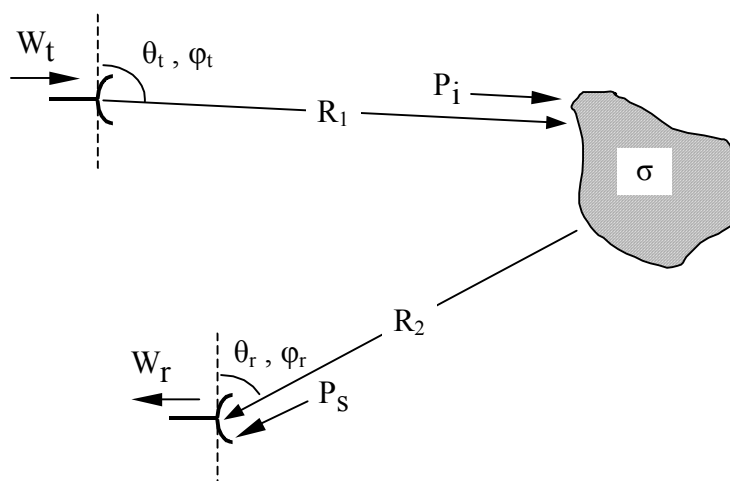
Εν κατακλείδι επισημαίνουμε ότι η μεθοδολογία του προϋπολογισμού ζεύξης αναδεικνύει (μεταξύ άλλων) τη μεγάλη σημασία των μονάδων dB σε τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές.

* Τα αρχικά XPI είναι συντομογραφία του όρου Cross Polarization Interference ο οποίος υπό την στενή έννοια χαρακτηρίζει τον βαθμό παρεμβολής από το ένα σήμα στο άλλο σε ζεύξεις διπλής πόλωσης (όπου κάθε πόλωση μεταφέρει ένα σήμα) λόγω στροφής της πόλωσης του κύματος (αποπόλωσης). Εδώ τον χρησιμοποιούμε υπό ευρύτερη έννοια διότι και οι απώλειες πόλωσης έχουν αντίστοιχη αιτία. Η αντίστροφη παράμετρος XPD (Cross Polarization Discrimination) χαρακτηρίζει την αντοχή σε τέτοιες παρεμβολές.

5.5.4. Η εξίσωση του ραντάρ

Η βασική εξίσωση που διέπει τη μετάδοση ισχύος από τον πομπό στον δέκτη ενός ραντάρ προκύπτει με κατάλληλη προσαρμογή από την εξίσωση Friis. Για το σκοπό αυτό ορίζεται η **ενεργός διατομή ραντάρ** (Radar Cross Section – RCS), αποκαλούμενη και ενεργός επιφάνεια ανάκλασης, η οποία χαρακτηρίζει την ισχύ που σκεδάζεται από τον στόχο.

Για τον ορισμό του μεγέθους αυτού θεωρούμε τον στόχο ο οποίος «φωτίζεται» από το κύμα που εκπέμπει η κεραία εκπομπής του ραντάρ, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.12, και έστω P_i η πυκνότητα ισχύος (δηλ. το μέτρο του διανύσματος Poynting, σε W/m^2) του κύματος αυτού πάνω στον στόχο. Μέρος της ισχύος αυτής σκεδάζεται από τον στόχο και επιστρέφει προς τον δέκτη του ραντάρ. Συμβολίζουμε αρχικά με P_s την πυκνότητα ισχύος του σκεδαζόμενου κύματος που φτάνει στον δέκτη και με r την απόσταση στόχου – δέκτη (στο Σχ. 5.12 συμβολίζεται R_2).



Σχ. 5.12: Σχηματική απεικόνιση της διάδοσης του κύματος κατά τη λειτουργία ενός ραντάρ, στη γενική περίπτωση με πομπό και δέκτη σε διαφορετικές θέσεις. Η απόσταση R_2 είναι η r που υπεισέρχεται στον ορισμό της ενεργού διατομής σ .

Η ενεργός διατομή ραντάρ του στόχου συμβολίζεται με σ και ορίζεται ως η επιφάνεια που, αν τοποθετηθεί στη θέση του στόχου, συλλέγει ηλεκτρομαγνητική ισχύ σP_i η οποία αν επανακτινοβοληθεί ισοτροπικά θα δημιουργήσει πάνω στον δέκτη την ίδια πυκνότητα ισχύος P_s που δημιουργεί και ο πραγματικός στόχος. Όπως είναι γνωστό (βλ. την (4.2.5)), μια ισοτροπική κεραία με ακτινοβολούμενη ισχύ σP_i δημιουργεί στο μακρινό πεδίο της (σε απόσταση R) πυκνότητα ισχύος $\frac{\sigma P_i}{4\pi r^2}$, και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό αυτή θα πρέπει να είναι ίση με την P_s , δηλ.

$$P_s = \frac{\sigma P_i}{4\pi r^2}$$

Επειδή ο δέκτης πρέπει να βρίσκεται στο μακρινό πεδίο, ο αυστηρός ορισμός της ενεργού διατομής ραντάρ διατυπώνεται για άπειρη απόσταση r

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[4\pi r^2 \frac{P_s}{P_i} \right] \quad (5.4.22)$$

ισχύει όμως με καλή προσέγγιση για οποιαδήποτε αρκετά μεγάλη τιμή της R . Σημειώνουμε ότι η πυκνότητα ισχύος P_s που δημιουργεί η υποθετική ισοτροπική κεραία μειώνεται (κατά τα γνωστά) αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης R από αυτή, και συνεπώς το όριο της (5.4.22) είναι πεπερασμένο (και όχι άπειρο).

Από φυσική άποψη, λοιπόν, η επιφάνεια της ενεργού διατομής ραντάρ εκφράζει το μέγεθος του στόχου που «φαίνεται» από το ραντάρ, δηλ. το πόσο «ορατός» είναι ο στόχος από το ραντάρ, όπως η γεωμετρική επιφάνεια διατομής θα έδειχνε πόσο ορατός είναι ο στόχος από το ανθρώπινο μάτι. Μεγάλη ενεργός διατομή σημαίνει εύκολα ανιχνεύσιμο στόχο.

Θεωρώντας απόσταση R_1 από τον πομπό του ραντάρ στον στόχο, η πυκνότητα ισχύος P_i που φτάνει στον στόχο είναι (βλ. την απόδειξη της εξ. Friis)

$$P_i = \frac{W_t G_t(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi R_1^2}$$

και σύμφωνα με τα προηγούμενα, μπορούμε να θεωρήσουμε αντί για τον στόχο μια υποθετική ισοτροπική κεραία η οποία εκπέμπει ισχύ

$$\sigma P_i = \frac{\sigma W_t G_t(\theta_t, \varphi_t)}{4\pi R_1^2}$$

Όμως μεταξύ της υποθετικής αυτής κεραίας και της (πραγματικής) κεραίας του δέκτη μπορεί να εφαρμοσθεί η εξίσωση Friis με απόσταση R_2 και την σP_i στη θέση της $W_t G_t$ και προκύπτει

$$W_r = \sigma W_t \left(\frac{\lambda}{4\pi R_1 R_2} \right)^2 \frac{G_t(\theta_t, \varphi_t) G_r(\theta_r, \varphi_r)}{4\pi} \cos^2 \psi_p \quad (5.4.23)$$

όπου ψ_p είναι η γωνία μεταξύ της πόλωσης της κεραίας λήψης και της πόλωσης του σκεδαζόμενου κύματος (η οποία ουσιαστικά εκφράζει την στροφή του επιπέδου πόλωσης του κύματος που προκαλεί ο στόχος).

Η (5.4.23) είναι η γενική μορφή της εξίσωσης του ραντάρ (Radar Range Equation). Εφόσον ο προσανατολισμός μεταξύ των κεραιών και του στόχου είναι ο βέλτιστος και οι πολώσεις ταυτίζονται, παίρνει τη μορφή

$$W_r = \sigma W_t \left(\frac{\lambda}{4\pi R_1 R_2} \right)^2 \frac{G_{mt} G_{mr}}{4\pi} \quad (5.4.24)$$

ενώ στην (συνήθη) περίπτωση που οι κεραίες εκπομπής και λήψης είναι στην ίδια θέση (ή χρησιμοποιείται η ίδια κεραία) θέτουμε $R_1 = R_2 = r$ και έχουμε

$$W_r = \sigma W_t \left(\frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \frac{G_{mt} G_{mr}}{4\pi r^4} \quad (5.4.25)$$

5.6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 5.1. Να αποδειχθεί με βάση το θεώρημα της αμοιβαιότητας η ισότητα των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων, $Z_{12} = Z_{21}$, η οποία όπως έχει αναφερθεί ισχύει πάντοτε στο ισοδύναμο δίθυρο δύο κεραιών σε αλληλεπίδραση (δηλ. ότι το ισοδύναμο δίθυρο είναι πάντοτε αμφίδρομο).

Απάντηση

Αναφερόμενοι σε ένα ζεύγος κεραιών σε αλληλεπίδραση όπως στο Σχ. 5.4 θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε διαδοχικά τις δύο καταστάσεις που προϋποθέτει το θεώρημα (στην κυκλωματική μορφή του), δηλ.:

Εφαρμογή της πηγής (a): Η κεραία #1 διεγείρεται (τροφοδοτείται) από την πηγή V_1^a και εκπέμπει και η #2 βραχυκυκλώνεται οπότε διαρρέεται από ρεύμα I_2^a .

Εφαρμογή της πηγής (b): Η κεραία #2 διεγείρεται (τροφοδοτείται) από την πηγή V_2^b και εκπέμπει και η #1 βραχυκυκλώνεται οπότε διαρρέεται από ρεύμα I_1^b .

Όπως έχει αναφερθεί, η γενική μορφή των εξισώσεων οποιουδήποτε διθύρου (χωρίς την παραδοχή της αμφιδρομικότητας) είναι

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Εφαρμόζοντας αυτές για την περίπτωση (a), δηλ. θέτοντας $V_1 = V_1^a$ και $V_2 = 0$ (αφού η κεραία #2 βραχυκυκλώνεται) παίρνουμε

$$V_1^a = Z_{11}I_1^a + Z_{12}I_2^a$$

$$Z_{21}I_1^a + Z_{22}I_2^a = 0 \Rightarrow I_1^a = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}I_2^a$$

και αντικαθιστώντας από την δεύτερη στην πρώτη έχουμε

$$V_1^a = \left(Z_{12} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} \right) I_2^a \Rightarrow \frac{V_1^a}{I_2^a} = Z_{12} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} \quad (1)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας τις γενικές εξισώσεις για την περίπτωση (b), δηλ. θέτοντας $V_1 = 0$ και $V_2 = V_2^b$ παίρνουμε

$$Z_{11}I_1^b + Z_{12}I_2^b = 0 \Rightarrow I_2^b = -\frac{Z_{11}}{Z_{12}}I_1^b$$

$$V_2^b = Z_{21}I_1^b + Z_{22}I_2^b$$

και αντικαθιστώντας από την πρώτη στην δεύτερη

$$V_2^b = \left(Z_{21} - \frac{Z_{22}Z_{11}}{Z_{12}} \right) I_1^b \Rightarrow \frac{V_2^b}{I_1^b} = Z_{21} - \frac{Z_{22}Z_{11}}{Z_{12}} \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της αμοιβαιότητας στην κυκλωματική του μορφή (5.2.2) διαπιστώνουμε ότι τα δεύτερα μέλη των (1) και (2) οφείλουν να είναι ίσα εκ ταυτότητας, δηλ. σε οποιαδήποτε περίπτωση αλληλεπίδρασης δύο κεραιών. Συνεπώς

$$Z_{12} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} = Z_{21} - \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}} \Rightarrow Z_{12} - Z_{21} = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{12}Z_{21}}(Z_{12} - Z_{21})$$

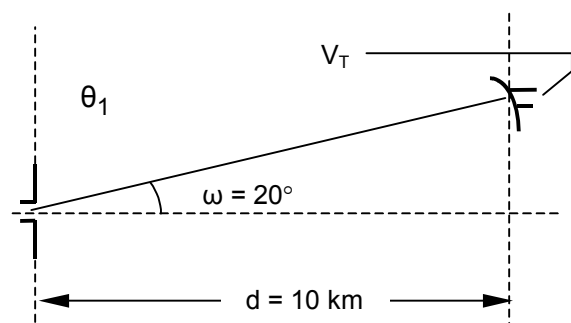
Η τελευταία όμως δεν μπορεί να ισχύει εκ ταυτότητας παρά μόνο στην περίπτωση που

$$Z_{12} - Z_{21} = 0 \Leftrightarrow Z_{12} = Z_{21}$$

επειδή σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να ισχύει $Z_{11}Z_{22} = Z_{12}Z_{21}$ εκ ταυτότητας, πράγμα που δεν μπορεί να συμβαίνει διότι το πρώτο μέλος εξαρτάται μόνο από τις κεραιές καθαυτές ενώ το δεύτερο και από την σχετική θέση τους (απόσταση, προσανατολισμό κτλ.). Για παράδειγμα, ακόμη και αν ίσχυε $Z_{11}Z_{22} = Z_{12}Z_{21}$ για μια ορισμένη θέση των δύο κεραιών, απομακρύνοντας (ή πλησιάζοντας) αυτές θα έπαυε να ισχύει διότι οι ίδιες σύνθετες αντιστάσεις Z_{11} , Z_{22} παραμένουν αμετάβλητες ενώ οι αμοιβαίες σύνθετες αντιστάσεις Z_{12} , Z_{21} αλλάζουν τιμή και μάλιστα μειώνονται (ή αυξάνονται) και οι δύο ώστε αποκλείεται η μεταβολή της μίας να αντισταθμίζει τη μεταβολή της άλλης.

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $Z_{12} = Z_{21}$, δηλ. η αποδεικτέα.

Παράδειγμα 5.2. Ένα κατακόρυφο δίπολο $\lambda/2$ μήκους 5 m, χωρίς απώλειες, τροφοδοτείται από τον πομπό με ισχύ $W_t = 20$ W. Η λήψη γίνεται από κάποια κεραιά με κατευθυντικότητα 16 dB και συντελεστή απωλειών 2,5%, τοποθετημένη σε οριζόντια απόσταση 10 km και υπερυψωμένη όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η κεραιά λήψης βλέπει την κεραιά εκπομπής υπό βέλτιστο προσανατολισμό (και την ίδια πόλωση) και με το σήμα εξόδου της τροφοδοτεί κάποιο φορτίο (δέκτη) με αντίσταση εισόδου 100 Ω, προς το οποίο είναι προσαρμοσμένη. Να βρεθεί

το μέτρο της τάσης V_T του σήματος στην έξοδο της κεραίας (δηλ. αυτού που δίνει η κεραία στον δέκτη).

Απάντηση

Αφού το μήκος του διπόλου $\lambda/2$ είναι 5 m, άρα το μήκος κύματος $\lambda = 10$ m και επομένως η συχνότητα λειτουργίας είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{10} = 30 \text{ MHz}$$

Η πυκνότητα ισχύος P_{av} του κύματος που δημιουργεί η κεραία εκπομπής πάνω στην κεραία λήψης δίνεται κατά τα γνωστά από το διάνυσμα Poynting και σύμφωνα με την (4.2.1) ισχύει

$$P_t = \frac{U(\theta, \varphi)}{r^2}$$

Η ένταση ακτινοβολίας του διπόλου $\lambda/2$ δίνεται από την (4.4.15)

$$U(\theta) = \frac{\zeta |I_m|^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}$$

Επειδή εδώ δεν δίνεται η τιμή του ρεύματος εισόδου του διπόλου, παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$U(\theta) = U_{\max} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} = \frac{W_{\text{rad}}}{4\pi} \left(4\pi \frac{U_{\max}}{W_{\text{rad}}}\right) \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} = \frac{W_{\text{rad}}}{4\pi} D_m \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}$$

όπου D_m η κατευθυντικότητα του διπόλου $\lambda/2$ η οποία είναι γνωστή και ίση με 1,64, ενώ η ακτινοβολούμενη ισχύς W_{rad} αυτού ισούται με την ισχύ W_t διότι δεν έχει απώλειες. Κατά συνέπεια η πυκνότητα ισχύος πάνω στην κεραία λήψης είναι

$$P_t = \frac{W_t}{4\pi r^2} D_m \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία υπό την οποία το δίπολο βλέπει την κεραία λήψης, σε σχέση με τον άξονα του διπόλου, είναι

$$\theta = 90^\circ - \omega = 70^\circ$$

ενώ η απόσταση μεταξύ των δύο κεραιών είναι

$$r = \frac{d}{\cos \omega} = \frac{d}{\cos(20^\circ)} \cong \frac{10 \text{ km}}{0,9397} \cong 10,642 \text{ km}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές προκύπτει

$$P_t \cong 0,0193 \mu\text{W/m}^2$$

Επειδή η κεραία λήψης είναι προσαρμοσμένη προς το φορτίο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της ενεργού επιφάνειας, σύμφωνα με τον οποίο η ωφέλιμη ισχύς W_T που αποδίδει η κεραία λήψης στον δέκτη δίνεται από την (5.4.1)

$$A_e(\theta, \varphi) = \frac{W_T}{P_t}$$

Εδώ δίνεται ότι η κεραία λήψης βλέπει την κεραία εκπομπής υπό βέλτιστο προσανατολισμό, πράγμα που σημαίνει ότι εμφανίζει την μέγιστη ενεργό επιφάνεια, η οποία σύμφωνα με την (5.4.11) προκύπτει από την μέγιστη κατευθυντικότητα ως εξής

$$A_{em} = \max\{A_e(\theta, \varphi)\} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_m$$

Κατά συνέπεια η ωφέλιμη ισχύς W_T στον δέκτη είναι

$$W_T = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_m P_t$$

Το κέρδος της κεραίας λήψης υπολογίζεται κατά τα γνωστά από την κατευθυντικότητα αυτής και τον συντελεστή απόδοσης ακτινοβολίας

$$G_m = \eta_r D_m = (1 - 0,025) \cdot 10^{16/10} \cong 38,82$$

Οπότε με αντικατάσταση προκύπτει

$$W_T = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_m P_t \cong 5,96 \mu W$$

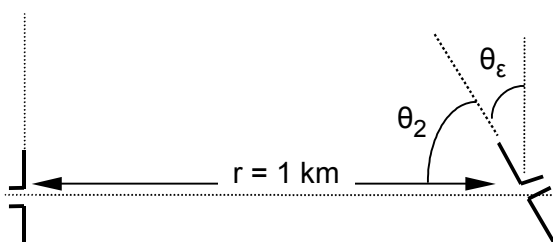
Λόγω της προσαρμογής, η σύνθετη αντίσταση της κεραίας λήψης και του δέκτη είναι ίσες με $R_A = R_T = 100 \Omega$. Με βάση το ισοδύναμο κύκλωμα κεραίας λήψης η ισχύς στον δέκτη δίνεται από την (5.4.3) ως εξής:

$$W_T = \frac{|V_T|^2}{8R_T} \Rightarrow |V_T| = \sqrt{8R_T W_T}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει το μέτρο $|V_T| \cong 69,05 \text{ mV}$.

Παράδειγμα 5.3. Ένα κατακόρυφο δίπολο Hertz (πολύ μικρού μήκους) εκπέμπει ισχύ W_t

$= 100 \text{ W}$ σε συχνότητα $f = 300 \text{ MHz}$. Η λήψη γίνεται από δεύτερο δίπολο όμοιο (αλλά όχι και παράλληλο) με το πρώτο, τοποθετημένο σε απόσταση 1 km και με το μέσον του στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο όπου βρίσκεται το μέσον του



πρώτου διπόλου.

Οι δύο αυτές κεραιές έχουν απώλειες 2%. Η κατευθυντικότητα του διπόλου Hertz είναι 1,761 dB και η ένταση ακτινοβολίας του δίνεται από τη σχέση

$$U(\theta) = U_{\max} \sin^2 \theta$$

όπου U_{\max} είναι η ένταση ακτινοβολίας στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας του διπόλου, και θ η γωνία ως προς τον άξονά του.

α) Εάν το δεύτερο δίπολο βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το πρώτο (δηλ. στο επίπεδο του χαρτιού) και έχει στραφεί κατά γωνία θ_ε από την κατακόρυφη θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα, να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία θ_ε ώστε η ισχύς W_r προς τον δέκτη να μην είναι μικρότερη από 1 μ W.

β) Εάν το δεύτερο δίπολο βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο με την ευθεία που το ενώνει με το πρώτο (δηλ. κάθετο στο επίπεδο του χαρτιού) και έχει εκτραπεί από την κατακόρυφη θέση κατά γωνία φ_ε (δεν φαίνεται στο σχήμα), να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία φ_ε ώστε η ισχύς W_r προς τον δέκτη να μην είναι μικρότερη από 1 μ W. (Προσέξτε τη γεωμετρική διαφορά μεταξύ της γωνίας φ_ε και της θ_ε του προηγούμενου ερωτήματος!)

Απάντηση

α) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση του Friis, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο προσανατολισμός των δύο κεραιών δεν είναι ο βέλτιστος (ενώ η πόλωση είναι η ίδια). Δεδομένου ότι το πρώτο δίπολο βλέπει το δεύτερο (και εκπέμπει προς αυτό) στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας ($\theta_t = 90^\circ$) αλλά το δεύτερο βλέπει το πρώτο (και λαμβάνει από αυτό) σε κατεύθυνση διαφορετική από αυτή της μέγιστης ακτινοβολίας ($\theta_r = \theta_2 = 90^\circ - \theta_\varepsilon$), έχουμε

$$\frac{W_r}{W_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_t G_r(\theta_2) \quad \text{όπου} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_\varepsilon$$

Για το κέρδος του διπόλου Hertz σε οποιαδήποτε κατεύθυνση θ ισχύει

$$G(\theta) = n \frac{U(\theta)}{U_0} = n \frac{U_{\max}}{U_0} \frac{U(\theta)}{U_{\max}} = n D_m \sin^2 \theta \quad (\text{αφού } D_m = \frac{U_{\max}}{U_0})$$

Από τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε ότι η κατευθυντικότητα του διπόλου Hertz είναι

$$D_m = 10^{1,761/10} = 1,5$$

και ο συντελεστής απόδοσης ακτινοβολίας

$$n = 100\% - 2\% = 98\% = 0,98$$

Κατά συνέπεια ισχύει

$$G_t = n D_m = 0,98 \cdot 1,5 = 1,47 \quad \text{και} \quad G_r(\theta) = n D_m \sin^2 \theta = 1,47 \sin^2 \theta$$

Επομένως $G_r(\theta_2) = G_r\left(\frac{\pi}{2} - \theta_\varepsilon\right) = 1,47 \cos^2 \theta_\varepsilon$ και άρα πρέπει

$$\frac{W_r}{W_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 (1,47)^2 \cos^2 \theta_\varepsilon \geq \frac{10^{-6}}{10^2} = 10^{-8}$$

Δεδομένου ότι $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 10^6} = 1 \text{ m}$ και $r = 1000 \text{ m}$, αντικαθιστώντας τις αριθμητικές

τιμές παίρνουμε

$$\frac{(1,47)^2 \cos^2 \theta_\varepsilon}{(4\pi)^2 \cdot 10^6} \geq 10^{-8} \Rightarrow \frac{1,47 \cos \theta_\varepsilon}{4\pi \cdot 10^3} \geq 10^{-4} \Rightarrow \cos \theta_\varepsilon \geq \frac{4\pi \cdot 10^{-1}}{1,47} \cong 0,855 \Rightarrow \theta_\varepsilon \leq 31,25^\circ$$

β) Στην περίπτωση αυτή έχουμε βέλτιστο προσανατολισμό αλλά διαφορά στην πόλωση κατά φ_ε . Επομένως:

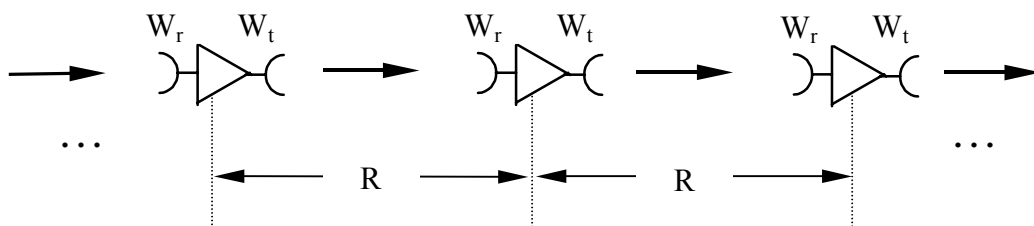
$$\frac{W_r}{W_t} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 G_t G_r \cos^2 \varphi_\varepsilon \geq 10^{-8} \Rightarrow \frac{(1,47)^2 \cos^2 \varphi_\varepsilon}{(4\pi)^2 \cdot 10^6} \geq 10^{-8}$$

Με αντίστοιχες πράξεις καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\varphi_\varepsilon \leq 31,25^\circ$$

Σημειώνουμε ότι η εύρεση του ίδιου αποτελέσματος για την φ_ε όπως για την θ_ε δεν είναι γενικό χαρακτηριστικό του προβλήματος αλλά οφείλεται στον ιδιαίτερο τύπο της κεραίας που θεωρούμε εδώ (δίπολο Hertz), στο οποίο η εξάρτηση του κέρδους από τη γωνία θ συμβαίνει να είναι $\cos^2 \theta$, ίδια με την εξάρτηση του συντελεστή απωλειών πόλωσης από τη γωνία ψ η οποία συμβαίνει να ταυτίζεται με την φ . Σε άλλη περίπτωση κεραίας η σχέση για το κέρδος δεν θα είχε τον παράγοντα $\cos^2 \theta$ αλλά κάποιον άλλο, οπότε θα προέκυπτε διαφορετικό αποτέλεσμα για την θ_ε .

Παράδειγμα 5.4. Μια ασύρματη ζεύξη στη συχνότητα των 300 MHz χρησιμοποιεί διαδοχικούς επαναλήπτες, δηλ. πομποδέκτες όπου το σήμα λαμβάνεται από την κεραία λήψης, ενισχύεται από έναν αναλογικό ενισχυτή και επανεκπέμπεται από την κεραία εκπομπής. (Αυτός είναι ο γενικός τρόπος να επιτευχθούν μεγάλα μήκη ζεύξης χωρίς να απαιτείται υπερβολικά υψηλή ισχύς του πομπού). Η διάταξη φαίνεται στο σχήμα.



Οι κεραίες των επαναληπτών είναι παραβολικά κάτοπτρα με κατευθυντικότητα 19 dB και συντελεστή απωλειών 4%. Καθένας από τους πομποδέκτες αυτούς παρέχει ισχύ εκπομπής 12,5 W, ενώ για να λειτουργεί σωστά πρέπει το σήμα στην είσοδό του να έχει ισχύ

τουλάχιστον 1,31 μW . Να προσδιορισθεί η μέγιστη δυνατή απόσταση R μεταξύ δύο διαδοχικών επαναληπτών.

Απάντηση

Το κέρδος καθεμίας από τις κεραιές εκπομπής και λήψης (εφόσον αυτές είναι ίδιες) δίνεται από

$$G_t = G_r = n_r D = (1 - 0,04) \cdot 10^{19/10} \cong 76,26$$

Το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας είναι $\lambda = 1 \text{ m}$.

Θεωρώντας ότι οι κεραιές εκπομπής και λήψης είναι τοποθετημένες υπό βέλτιστο προσανατολισμό προς άλληλες και με την ίδια πόλωση, για κάθε ζεύξη μεταξύ «γειτονικών» επαναληπτών η εξίσωση του Friis δίνει

$$W_r = W_t \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 G_t G_r$$

Πρέπει όμως (σύμφωνα με τα δεδομένα) η ισχύς στον δέκτη να ικανοποιεί την

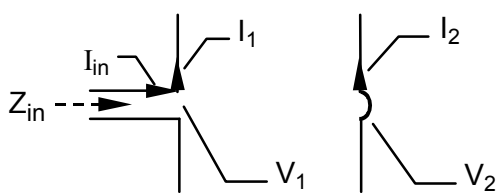
$$W_r \geq W_{\min} = 1,31 \mu\text{W}$$

Εισάγοντας στην εξίσωση του Friis παίρνουμε

$$W_t \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 G_t G_r \geq W_{\min} \Leftrightarrow R \leq \frac{\lambda}{4\pi} \left[\frac{W_t}{W_{\min}} G_t G_r \right]^{1/2}$$

Με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών προκύπτει η μέγιστη τιμή $R \leq 18,75 \text{ km}$.

Παράδειγμα 5.5. Δύο όμοιες κεραιές αλληλεπιδρούν. Η ίδια σύνθετη αντίσταση καθεμίας



από αυτές είναι $Z_{11} = Z_{22} = 30 - j40 \Omega$ ενώ η αμοιβαία σύνθετη αντίσταση μεταξύ αυτών είναι $Z_{12} = 20 + j40 \Omega$.

Η πρώτη από τις κεραιές αυτές τροφοδοτείται από τον πομπό ενώ η δεύτερη είναι βραχυκυκλωμένη. Να βρεθεί η συνολική αντίσταση ακτινοβολίας του ζεύγους των δύο κεραιών (θεωρώντας ότι δεν έχουν απώλειες).

Απάντηση

Πρέπει να υπολογισθεί η σύνθετη αντίσταση εισόδου Z_{in} του συστήματος των δύο κεραιών όπως «φαίνεται» στην είσοδο της κεραιάς #1, δηλ. η σύνθετη αντίσταση οδήγησης της κεραιάς #1, και στη συνέχεια να βρεθεί το πραγματικό μέρος αυτής, το οποίο ισούται με την αντίσταση ακτινοβολίας, εφόσον δεν υπάρχουν απώλειες.

Εφόσον η κεραία 2 είναι βραχυκυκλωμένη, για την τάση στην είσοδό της ισχύει $V_2 = 0$. Κατά συνέπεια οι εξισώσεις αλληλεπίδρασης των δύο κεραιών γράφονται

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{12}I_1 + Z_{11}I_2 = 0$$

Η πρώτη από αυτές δίνει (κατά τα γνωστά)

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{I_2}{I_1}$$

και η δεύτερη δίνει

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$$

οπότε με αντικατάσταση στην προηγούμενη παίρνουμε

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές, μετά τις πράξεις προκύπτει

$$Z_{in} = 70 - j40 \Omega$$

και άρα η συνολική αντίσταση ακτινοβολίας είναι

$$R_{r,1} = \text{Re}[Z_{in}] = 70 \Omega$$

δηλ. στην περίπτωσή μας είναι μεγαλύτερη από αυτή που θα παρουσίαζε η μία κεραία μεμονωμένη (δοκιμάστε και με άλλες τιμές ίδιας ή αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης για να διαπιστώσετε ότι μπορεί να συμβεί και το αντίθετο).

Παράδειγμα 5.6. Σε μια ασύρματη ζεύξη στη συχνότητα των 10 GHz το μήκος της ζεύξης (απόσταση κεραιών εκπομπής και λήψης) είναι 3 km και δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα:

Πομπός	Δέκτης
Ισχύς: 10 W	Σηματοθορυβικός λόγος (CNR) κατωφλίου: 20 dB
Γραμμή μεταφοράς: 15 m – 0,16 dB/m	Ισχύς θορύβου: $W_n = -80$ dBm
SWR στη γραμμή μεταφοράς: 1,2	Γραμμή μεταφοράς: 8 m – 0,2 dB/m
Απώλειες στο στοιχείο προσαρμογής (insertion loss): 0,6 dB	SWR στη γραμμή μεταφοράς: 1,5
Κέρδος κεραίας: 20 dB	Απώλειες στο στοιχείο προσαρμογής (insertion loss): 1,5 dB
	Κέρδος κεραίας: 18 dB

Δίνεται επίσης ότι οι συνολικές απώλειες στη ζεύξη λόγω διάφορων φαινομένων διάδοσης, πλην καιρικών φαινομένων, είναι 1 dB. Ως προς τα καιρικά φαινόμενα, έστω ότι από τα μετεωρολογικά αρχεία της περιοχής βρέθηκε μια τιμή (ύψος) βροχόπτωσης η οποία υπερβαίνεται για 0,1% του χρόνου και στη συνέχεια με κατάλληλο μοντέλο υπολογισμού προσδιορίστηκε ότι για αυτό το ύψος βροχόπτωσης προκαλούνται απώλειες 3 dB/km.

α) Να καταστρωθεί ο προϋπολογισμός της ζεύξης και να υπολογισθεί η ισχύς εισόδου στον δέκτη χωρίς βροχόπτωση και με βροχόπτωση. Στις δύο αυτές περιπτώσεις να εξαχθεί συμπέρασμα αν είναι εφικτή η λειτουργία της ζεύξης ή όχι.

β) Εφόσον είναι εφικτή η λειτουργία της ζεύξης, να βρεθεί πόσο μπορεί να αυξηθεί κατά μέγιστο η στάθμη θορύβου στον δέκτη (διατηρώντας τις άλλες παραμέτρους ως έχουν) χωρίς η ζεύξη να βρεθεί εκτός λειτουργίας. Το ίδιο και για το μήκος της ζεύξης.

Απάντηση

α) Κατ' αρχάς πρέπει όλες οι ποσότητες να εκφράζονται σε λογαριθμικές μονάδες. Για την ισχύ θα χρησιμοποιήσουμε μονάδες dBm και έτσι η ισχύς του πομπού είναι

$$W_T = 10 \text{ W} = 10.000 \text{ mW} \Rightarrow W_T = 10 \log(10^4) = 40 \text{ dBm}$$

οπότε και η ισχύς στον δέκτη θα προκύψει σε dBm.

Οι απώλειες στη γραμμή μεταφοράς του πομπού είναι $15 \cdot 0,16 = 2,4 \text{ dB}$.

Για τις απώλειες λόγω κακής προσαρμογής (ανακλάσεων) χρειαζόμαστε τον συντελεστή ανάκλασης ισχύος στο τέρμα της γραμμής που προκύπτει από τον SWR βάσει της (1.4.16)

$$|\rho_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{1,2-1}{1,2+1} = \frac{0,2}{2,2} \cong 0,091 \Rightarrow |\rho_L|^2 \cong 0,0083 \Rightarrow 1-|\rho_L|^2 \cong 0,9917$$

Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος της ισχύς εξόδου της γραμμής προς την προσπίπτουσα ισχύ που έφτασε στο τέρμα της (κατόπιν των απωλειών της γραμμής) είναι 0,9917 και λογαριθμίζοντας παίρνουμε τις σχετικές απώλειες

$$L = -10 \log(0,9917) \cong 0,04 \text{ dB}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή είναι πολύ μικρή και σε σύγκριση με τις υπόλοιπες απώλειες που συναντούμε θα μπορούσε και να αγνοηθεί. (Επίσης η τιμή αυτή μας δίνει μια εικόνα της φυσικής σημασίας μιας τιμής SWR = 1,2 που δείχνει ότι είναι πολύ καλή.)

Αντίστοιχα, οι απώλειες στη γραμμή μεταφοράς του δέκτη είναι $8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ dB}$ και οι απώλειες λόγω κακής προσαρμογής προκύπτουν ως εξής:

$$|\rho_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{0,5}{2,5} \cong 0,2 \Rightarrow |\rho_L|^2 \cong 0,04 \Rightarrow 1-|\rho_L|^2 \cong 0,96 \Rightarrow -10 \log(0,96) \cong 0,18 \text{ dB}$$

Επομένως οι απώλειες L_T μεταξύ του πομπού και της κεραίας εκπομπής είναι

$$L_T = 2,4 + 0,04 + 0,6 = 3,04 \text{ dB}$$

και οι απώλειες L_R μεταξύ της κεραίας λήψης και του δέκτη είναι

$$L_R = 1,6 + 0,18 + 1,5 = 3,28 \text{ dB}$$

Για τις απώλειες διάδοσης ελεύθερου χώρου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (5.4.18):

$$L_{FS} \cong 32,44 + 20 \log r_{(\text{km})} + 20 \log f_{(\text{MHz})} = 32,44 + 20 \log 3 + 20 \log 10000 \cong 121,98 \text{ dB}$$

Εφόσον υπάρχει βροχόπτωση με το συγκεκριμένο ύψος, οι απώλειες που προκαλεί είναι $3 \cdot 3 = 9$ dB. Προσθέτουμε και τις λοιπές απώλειες λόγω διάφορων φαινομένων διάδοσης και παίρνουμε για καθεμία από τις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις:

$$L_P = 121,98 + 1 = 122,98 \text{ dB} \quad \text{χωρίς βροχόπτωση}$$

$$L_P = 121,98 + 1 + 9 = 131,98 \text{ dB} \quad \text{με βροχόπτωση}$$

Μπορούμε πλέον να καταρτίσουμε τον προϋπολογισμό ζεύξης χρησιμοποιώντας την (5.4.21) για καθεμία από τις δύο εξεταζόμενες περιπτώσεις ως εξής:

Χωρίς βροχόπτωση

$$W_R = W_T + G_t + G_r - L_T - L_R - L_P = 40 + 20 + 18 - 3,04 - 3,28 - 122,98 \cong -51,3 \text{ dBm}$$

Στην περίπτωση αυτή ο σηματοθορυβικός λόγος στην είσοδο του δέκτη είναι

$$(CNR) = W_T - W_n = -51,3 + 80 = 28,7 \text{ dB}$$

Η τιμή αυτή υπερβαίνει την τιμή κατωφλίου των 20 dB, άρα η ζεύξη λειτουργεί κανονικά.

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή κατωφλίου της ισχύος του δέκτη

$$W_{th} = W_n + (CNR)_{th} = -80 + 20 = -60 \text{ dBm}$$

οπότε επειδή $W_R > W_{th}$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Με βροχόπτωση

$$W_R = W_T + G_t + G_r - L_T - L_R - L_P = 40 + 20 + 18 - 3,04 - 3,28 - 131,98 \cong -60,3 \text{ dBm}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $(CNR) = -60,3 + 80 = 19,7$ dB δηλ. ο σηματοθορυβικός λόγος στην είσοδο του δέκτη προκύπτει μικρότερος από την τιμή κατωφλίου των 20 dB και η ζεύξη τίθεται εκτός λειτουργίας. Πρέπει να προσεχθεί ότι το συμπέρασμα αυτό ισχύει για ένα ύψος βροχόπτωσης το οποίο υπερβαίνεται για το 0,1% του χρόνου, πράγμα που σημαίνει ότι η ζεύξη αναμένεται να βρίσκεται εκτός λειτουργίας τουλάχιστον για το 0,1% του συνολικού χρόνου. Η πληροφορία αυτή είναι πολύ σημαντική στην πράξη για μια τηλεπικοινωνιακή ζεύξη. Σε έναν πραγματικό υπολογισμό ζεύξης ο σχεδιαστής μάλλον θα εκτελούσε μια αντίστροφη διαδικασία για την επίδραση της βροχής, προσδιορίζοντας πρώτα το ύψος βροχής για το οποίο η τιμή του (CNR) στην είσοδο του δέκτη είναι ακριβώς ίση με την τιμή κατωφλίου των 20 dB, πράγμα που σημαίνει ότι όταν υπερβαίνεται η τιμή αυτή τότε η ζεύξη βρίσκεται εκτός λειτουργίας. Στη συνέχεια από στατιστικά μετεωρολογικά δεδομένα θα προσδιόριζε το ποσοστό του χρόνου για το οποίο υπερβαίνεται αυτό το ύψος βροχής, συμπεραίνοντας ότι αυτό είναι και το ποσοστό χρόνου εκτός λειτουργίας (outage time) της ζεύξης. Αν δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις / προδιαγραφές της ζεύξης τότε θα πρέπει να αλλάξει ο σχεδιασμός (π.χ. μεγαλύτερη ισχύς πομπού, μικρότερο μήκος ζεύξης, πιο κατευθυντική κεραία ή κεραίες) ώστε να μειωθεί το ποσοστό αυτό.

Τα παραπάνω θα μπορούσαν να γραφούν και σε πινακοποιημένη μορφή, ίσως πιο εύκολη και για τον συντάκτη και για τον αναγνώστη του προϋπολογισμού, π.χ. στην 1^η περίπτωση:

Ισχύς πομπού:	40	dBm
Κέρδος κεραίας εκπομπής:	20	dB
Απώλειες μεταξύ πομπού – κεραίας:	- 3,04	dB
Απώλειες διάδοσης:	- 122,98	dB
Απώλειες μεταξύ κεραίας – δέκτη:	- 3,28	dB
Κέρδος κεραίας λήψης:	18	dB
Σύνολο (Ισχύς στο δέκτη):	- 51,3	dBm

Κάθε γραμμή του πίνακα θα μπορούσε να αναλυθεί και σε περισσότερες εφόσον προκύπτει από περισσότερους όρους και κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστούν χωριστά (π.χ. οι απώλειες διάδοσης).

β) Θα το εξετάσουμε για την περίπτωση όπου δεν υπάρχει βροχόπτωση και (όπως διαπιστώσαμε στα προηγούμενα) η λειτουργία της ζεύξης είναι εφικτή. Για τη μελέτη αυτή είναι χρήσιμη η ποσότητα

$$W_R - W_{th} = -51,3 + 60 = 8,7 \text{ dB}$$

η οποία συνήθως ονομάζεται **περιθώριο ζεύξης** (link margin) και εκφράζει το ποσό κατά το οποίο μπορεί να «χειροτερεύσει» η ζεύξη χωρίς όμως να τεθεί εκτός λειτουργίας. Δηλ. είτε να μειωθεί το θετικό μέρος του προϋπολογισμού της ζεύξης (ισχύς εκπομπής, κέρδη κεραίων) είτε να αυξηθεί το αρνητικό μέρος (απώλειες) είτε να αυξηθεί ο θόρυβος στην είσοδο του δέκτη είτε κάποιος συνδυασμός των προηγούμενων.

Επομένως η στάθμη θορύβου στην είσοδο του δέκτη μπορεί (αν δεν αλλάξει καμμία άλλη παράμετρος) να αυξηθεί το πολύ κατά 8,7 dB. Εύκολα επιβεβαιώνεται παρατηρώντας ότι αν αυξηθεί η στάθμη θορύβου αυτή κατά 8,7 dB και γίνει $W_n = -80 + 8,7 = -71,3 \text{ dBm}$ τότε ο σηματοθορυβικός λόγος γίνεται $(CNR) = W_T - W_n = -51,3 + 71,3 = 20 \text{ dB}$ ήτοι ακριβώς η τιμή κατωφλίου. Δηλ. αν αυξηθεί περισσότερο ο θόρυβος τότε η ζεύξη τίθεται εκτός λειτουργίας.

Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη επιτρεπτή αύξηση των απωλειών ελεύθερου χώρου (χωρίς να αλλάξει καμμία άλλη παράμετρος) είναι επίσης 8,7 dB, δηλ. η μέγιστη τιμή τους είναι $L_{TFS} = 121,98 + 8,7 = 130,68 \text{ dB}$. Θεωρώντας ότι η συχνότητα παραμένει η ίδια (10 GHz), με τη βοήθεια της (5.4.18) έχουμε

$$32,44 + 20 \log r_{(km)} + 80 = 130,68 \text{ dB} \Leftrightarrow r_{(km)} \cong 8,16 \text{ km}$$

Σημειώνουμε ότι η αντίστοιχη μελέτη για την περίπτωση βροχόπτωσης θα έπρεπε να λάβει υπόψη συγχρόνως και την αύξηση των απωλειών ελεύθερου χώρου και των απωλειών βροχόπτωσης με την αύξηση του μήκους ζεύξης (και η παραπάνω εξίσωση θα έπρεπε να αντικατασταθεί από μια πιο περίπλοκη).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΕΣ

6.1. ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ

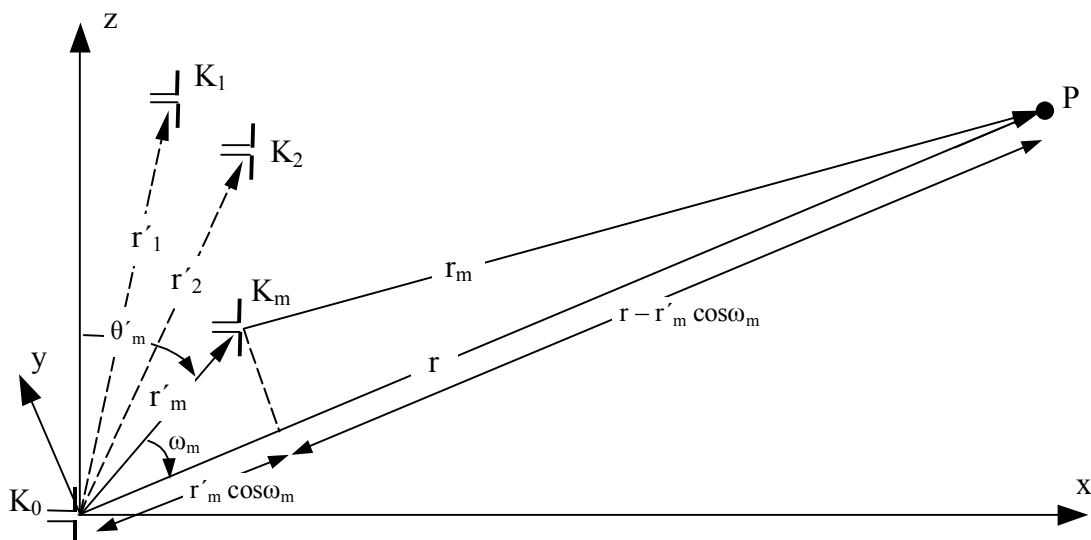
6.1.1. Γενικά

Ο συνδυασμός περισσότερων από μία κεραιών, που λειτουργούν συγχρόνως σε σχετικά μικρή απόσταση μεταξύ τους εκπέμποντας το ίδιο σήμα, μπορεί να οδηγήσει σε βελτιωμένα χαρακτηριστικά εκπομπής και λήψης (κυρίως κατευθυντικότητα), ή και νέες ιδιότητες σε σχέση με αυτές των επιμέρους μεμονωμένων κεραιών. Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας κατάλληλα τις συνδυαζόμενες κεραιές, τη γεωμετρία της διάταξης (σχετικές θέσεις των κεραιών μεταξύ τους) και την τροφοδοσία τους. Μια τέτοια διάταξη κεραιών ονομάζεται **στοιχειοκεραία** ή συστοιχία κεραιών (antenna array ή απλώς array). Συνήθως οι επιμέρους κεραιές (στοιχεία) της διάταξης είναι όμοιες μεταξύ τους και με τον ίδιο προσανατολισμό.

Οι εφαρμογές των στοιχειοκεραιών στις τηλεπικοινωνίες, στα ραντάρ και αλλού, είναι πολλές και εντυπωσιακές. Βασίζονται κυρίως στις μεγάλες δυνατότητες διαμόρφωσης επιθυμητού διαγράμματος ακτινοβολίας, το οποίο μάλιστα σε κατάλληλες διατάξεις (phased arrays) μπορεί να κινείται χωρίς μηχανική κίνηση της κεραιάς, μεταβάλλοντας μόνο τις φάσεις των ρευμάτων τροφοδοσίας των στοιχείων της.

6.1.2. Το διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας

Θεωρούμε τη γεωμετρία στοιχειοκεραίας, όπως απεικονίζεται στο Σχ. 6.1 που ακολουθεί.



Σχ. 6.1: Γενική γεωμετρία στοιχειοκεραίας

Στο σχήμα φαίνεται στοιχειοκεραία αποτελούμενη από κάποιο πλήθος επιμέρους κεραιών (στοιχείων), έστω M τον αριθμό, οι οποίες χαρακτηρίζονται με τους αριθμούς $0, 1, 2, \dots$,

$m, \dots, M-1$ και είναι τοποθετημένες σε διάφορα σημεία $K_0, K_1, \dots, K_m, \dots, K_{M-1}$ του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Μας ενδιαφέρει το ακτινοβολούμενο κύμα σε τυχόν σημείο παρατήρησης P με συντεταγμένες $P(r, \theta, \varphi)$ το οποίο βρίσκεται στο μακρινό πεδίο ($r \rightarrow +\infty$). Οι θέσεις των στοιχείων της στοιχειοκεραίας χαρακτηρίζονται επίσης από τις σφαιρικές συντεταγμένες τους $K_m (r'_m, \theta'_m, \varphi'_m)$. Προσέξτε τη διαφορά στον συμβολισμό, με άτονες συντεταγμένες για το σημείο παρατήρησης και τονούμενες για τις θέσεις των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. (Το σημείο παρατήρησης είναι μεταβλητό ενώ οι θέσεις των στοιχείων σταθερές). Η αρχή των συντεταγμένων μπορεί να ληφθεί σε οποιοδήποτε σημείο κοντά στην στοιχειοκεραία και κατά κανόνα επιλέγεται έτσι ώστε να διευκολύνει τους υπολογισμούς (ενδεικτικά αλλά όχι υποχρεωτικά μπορεί να είναι στη θέση K_0 του πρώτου στοιχείου). Με ω_m συμβολίζεται η γωνία που σχηματίζεται στο χώρο μεταξύ των διανυσμάτων θέσης του σημείου K_m και του σημείου παρατήρησης P . Σημειώνεται ότι για τη γωνία αυτή ισχύει* η τριγωνομετρική σχέση

$$\cos \omega_m = \cos \theta \cos \theta'_m + \sin \theta \sin \theta'_m \cos(\varphi - \varphi'_m) \quad (6.1.1)$$

Η μελέτη των ιδιοτήτων εκπομπής (και επομένως και λήψης) των στοιχειοκεραιών βασίζεται στην αρχή της υπέρθεσης (επαλληλίας). Πιο συγκεκριμένα, το συνολικό πεδίο που δημιουργείται από την στοιχειοκεραία ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργούνται από τα επιμέρους στοιχεία της:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_m + \dots + \vec{E}_{M-1} = \sum_{m=0}^{M-1} \vec{E}_m \quad (6.1.2)$$

Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία της διάταξης είναι όμοια μεταξύ τους και με τον ίδιο προσανατολισμό. Τα ρεύματα τροφοδοσίας αυτών I_0, \dots, I_{M-1} μπορεί να διαφέρουν. Αν θεωρήσουμε το ρεύμα I_0 του πρώτου στοιχείου ως ρεύμα αναφοράς (πράγμα που μπορεί να γίνει πάντοτε, δεδομένου ότι και η εκλογή του στοιχείου που θα θεωρηθεί πρώτο είναι στη διακριτική μας ευχέρεια), τότε όλα τα ρεύματα μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$I_0 = C_0 I_0, \quad I_1 = C_1 I_0, \quad \dots, \quad I_m = C_m I_0, \quad \dots, \quad I_{M-1} = C_{M-1} I_0$$

όπου C_m είναι μιγαδικοί συντελεστές που χαρακτηρίζουν την τροφοδοσία κάθε στοιχείου (ρευματικοί συντελεστές). Προφανώς ο πρώτος συντελεστής $C_0 = 1$ και αναφέρεται με τον συμβολισμό C_0 απλώς για λόγους ομοιομορφίας.

* Η (6.1) μπορεί να αποδειχθεί παρατηρώντας ότι εξ ορισμού ισχύει $\vec{r} \cdot \vec{r}'_m = r r'_m \cos \omega_m$. Στη συνέχεια λαμβάνουμε το ίδιο εσωτερικό γινόμενο με καρτεσιανές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις $\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + r \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}$, $\vec{r}'_m = r'_m \sin \theta'_m \cos \varphi'_m \hat{x} + r'_m \sin \theta'_m \sin \varphi'_m \hat{y} + r'_m \cos \theta'_m \hat{z}$ και εξισώνουμε το αποτέλεσμα με $r r'_m \cos \omega_m$.

Τότε το πεδίο του οποιουδήποτε στοιχείου m στο μακρινό πεδίο, λόγω του ίδιου προσανατολισμού των κεραιών, έχει την ίδια (ακριβώς ή με καλή προσέγγιση) διεύθυνση με το πεδίο του στοιχείου αναφοράς, ενώ διαφέρει από αυτό

- ως προς την τιμή κατά τον συντελεστή C_m , δηλ. η τιμή του σε σχέση με την τιμή του πεδίου του στοιχείου αναφοράς είναι πολλαπλασιασμένη με τον C_m
- και ως προς την φάση λόγω της διαφορετικής θέσης των κεραιών, δηλ. παρουσιάζει μια διαφορά φάσης σε σχέση με το πεδίο του στοιχείου αναφοράς ανάλογη προς τη διαφορά των αποστάσεων του στοιχείου m και του στοιχείου αναφοράς από το σημείο παρατήρησης

Εφόσον το σημείο παρατήρησης είναι στο μακρινό πεδίο, δηλ. η τιμή της απόστασης r είναι πολύ μεγαλύτερη από όλες τις r'_m , τότε θεωρώντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στη θέση του στοιχείου αναφοράς (βλ. το Σχ. 6.1), η διαφορά μεταξύ της απόστασης του στοιχείου m από το σημείο παρατήρησης και της απόστασης του στοιχείου αναφοράς από το σημείο παρατήρησης είναι κατά προσέγγιση ίση με την προβολή του διανύσματος θέσης \vec{r}'_m πάνω στο διάνυσμα θέσης \vec{r} , δηλ. ίση με $r'_m \cos\omega_m$. Κατά συνέπεια, η διαφορά φάσης των πεδίων \vec{E}_m (του στοιχείου m) και \vec{E}_0 (του στοιχείου αναφοράς) που οφείλεται σε αυτή τη διαφορά αποστάσεων είναι κατά προσέγγιση ίση με $kr'_m \cos\omega_m$ και αντιστοιχεί στον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $e^{jkr'_m \cos\omega_m}$. Επομένως η σχέση που συνδέει το πεδίο του στοιχείου m και το πεδίο του στοιχείου αναφοράς είναι η

$$\vec{E}_m = C_m e^{jkr'_m \cos\omega_m} \vec{E}_0 \quad (6.1.3)$$

Εισάγοντας την (6.1.3) στην (6.1.2) προκύπτει το συνολικό πεδίο της στοιχειοκεραίας:

$$\vec{E} = \left[\sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jkr'_m \cos\omega_m} \right] \vec{E}_0 = S(\theta, \varphi) \vec{E}_0 \quad (6.1.4)$$

Η έκφραση $S(\theta, \varphi)$ που υπεισέρχεται στην (6.1.4) λέγεται **παράγοντας διάταξης** της στοιχειοκεραίας και δίνεται από την

$$S(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jkr'_m \cos\omega_m} \quad (6.1.5)$$

Η εξάρτηση από το σημείο παρατήρησης είναι της μορφής (θ, φ) διότι, όπως δείχνει και η (6.1.1), ο παράγοντας διάταξης είναι συνάρτηση των γωνιών θ και φ αλλά όχι της απόστασης r , εξαρτάται λοιπόν μόνο από την κατεύθυνση.

Όπως είναι γνωστό από την (4.1.3), η πυκνότητα ισχύος (ανά μονάδα επιφάνειας) που εκπέμπει η κεραία στο μακρινό πεδίο είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου, και κατά συνέπεια το ίδιο ισχύει και για την ένταση ακτινοβολίας,

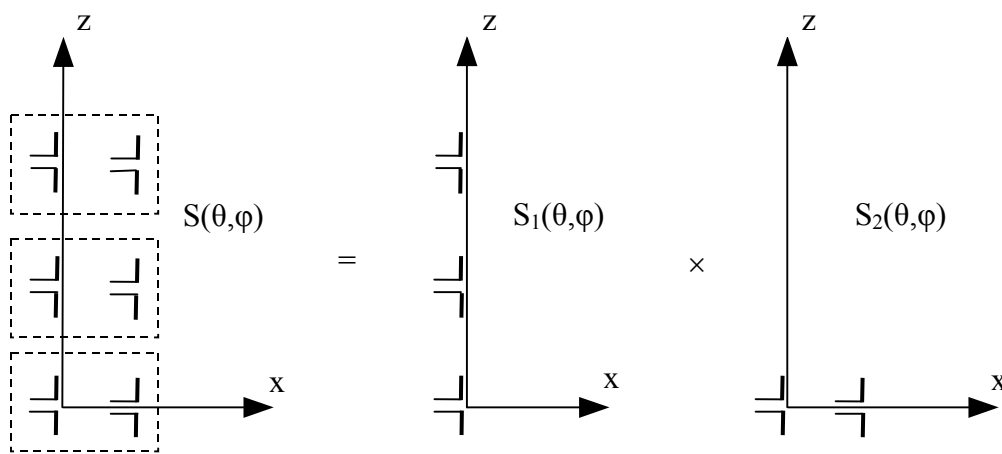
όπως δείχνει ο ορισμός της (4.2.1). Επομένως, λαμβάνοντας το τετράγωνο του μέτρου των δύο μελών της (6.1.4), συμπεραίνουμε ότι η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας συνδέεται με την ένταση ακτινοβολίας του στοιχείου αναφοράς αυτής μέσω της

$$U(\theta, \varphi) = |S(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta, \varphi) \quad (6.1.6)$$

όπου $U_0(\theta, \varphi)$ η ένταση ακτινοβολίας του στοιχείου αναφοράς.

Στην (6.1.6) ο παράγοντας $|S(\theta, \varphi)|^2$ μπορεί να θεωρηθεί κατά κάποιον τρόπο ως «ανηγμένο διάγραμμα ακτινοβολίας» της στοιχειοκεραίας ως γεωμετρικής διάταξης και συνδυασμού ρευμάτων τροφοδοσίας, ανεξάρτητα από το είδος των στοιχείων της. Στην πράξη ο παράγοντας αυτός απεικονίζεται σε πολικό διάγραμμα, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και τα διαγράμματα ακτινοβολίας.

Με βάση την (6.1.6) προκύπτει η λεγόμενη **αρχή του πολλαπλασιασμού** των παραγόντων διάταξης και των διαγραμμάτων ακτινοβολίας, η οποία εφαρμόζεται σε στοιχειοκεραίες που έχουν ως στοιχεία άλλες στοιχειοκεραίες. Με τον τρόπο αυτό ένα σχετικά πολύπλοκο πρόβλημα υπολογισμού παράγοντα διάταξης αναλύεται σε δύο (ή και περισσότερα) απλούστερα. Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 6.2, όπου απεικονίζεται μια στοιχειοκεραία 6 στοιχείων σε δύο διαστάσεις.



Σχ. 6.2: Στοιχειοκεραία με στοιχεία στοιχειοκεραίες

Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχειοκεραία τριών στοιχείων κατά τον άξονα z (ας την ονομάσουμε στοιχειοκεραία #1), κάθε στοιχείο της οποίας είναι μια άλλη στοιχειοκεραία δύο στοιχείων κατά τον άξονα x (ας ονομασθεί στοιχειοκεραία #2). Εφαρμόζοντας την (6.1.6) στην στοιχειοκεραία #2 προκύπτει η ένταση ακτινοβολίας αυτής

$$U_2(\theta, \varphi) = |S_2(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta, \varphi)$$

όπου $U_0(\theta, \varphi)$ η ένταση ακτινοβολίας του στοιχείου αναφοράς (της μίας από τις 6 κεραίες του Σχ. 6.2). Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η στοιχειοκεραία #2 παίζει τον ρόλο του

στοιχείου αναφοράς της στοιχειοκεραίας #1, οπότε εφαρμόζοντας εκ νέου την (6.1.6) για την στοιχειοκεραία #1 παίρνουμε την ένταση ακτινοβολίας της συνολικής στοιχειοκεραίας

$$U(\theta, \varphi) = |S_1(\theta, \varphi)|^2 U_2(\theta, \varphi)$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις παίρνουμε τελικά

$$U(\theta, \varphi) = |S_1(\theta, \varphi)|^2 |S_2(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta, \varphi) \quad (6.1.7)$$

η οποία εκφράζει την προαναφερόμενη αρχή του πολλαπλασιασμού. Είναι προφανές ότι η αρχή αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί σε κάθε περίπτωση στοιχειοκεραίας με στοιχεία άλλες στοιχειοκεραίες, και είναι επίσης προφανές ότι τα δύο επιμέρους προβλήματα υπολογισμού καθενός των $S_1(\theta, \varphi)$ και $S_2(\theta, \varphi)$ είναι σαφώς απλούστερα από το σύνθετο πρόβλημα του «συνολικού» παράγοντα διάταξης $S(\theta, \varphi)$.

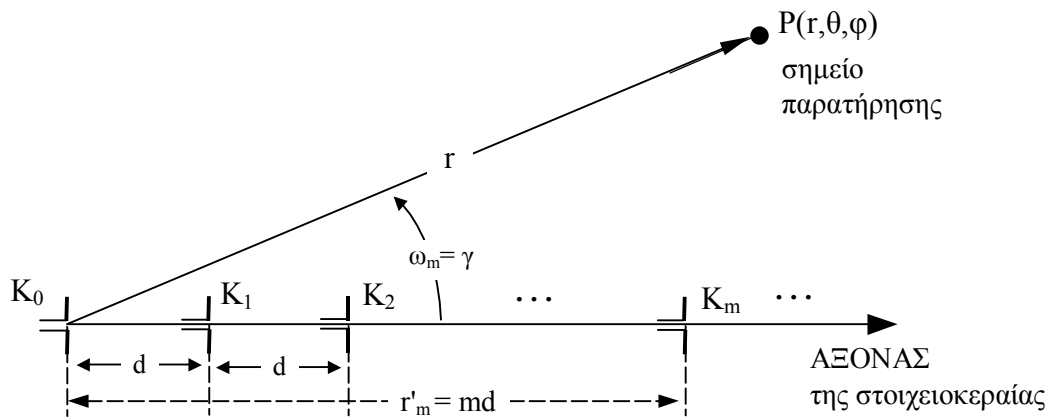
Ένα πολύ μεγάλο μέρος της θεωρίας των στοιχειοκεραιών βασίζεται στην (6.1.6), είτε για τον υπολογισμό του $S(\theta, \varphi)$ σε διάφορες περιπτώσεις (ανάλυση στοιχειοκεραιών), είτε για το αντίστροφο πρόβλημα της εύρεσης κατάλληλης στοιχειοκεραίας με τις επιθυμητές ιδιότητες, δηλ. του προσδιορισμού των κατάλληλων θέσεων K_m (r'_m , θ'_m , φ'_m) και ρευματικών συντελεστών C_m των στοιχείων για την επίτευξη του επιθυμητού $S(\theta, \varphi)$ (σύνθεση στοιχειοκεραιών).

6.2. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΕΣ

6.2.1. Γενικά

Γραμμικές στοιχειοκεραίες ονομάζονται εκείνες που έχουν όλα τα στοιχεία τους πάνω σε μια ευθεία (άξονα της στοιχειοκεραίας), με σταθερή απόσταση d (βήμα της στοιχειοκεραίας) μεταξύ διαδοχικών στοιχείων*. Πρόκειται για σχετικά απλή αλλά πολύ χρήσιμη περίπτωση στοιχειοκεραίας. Η γεωμετρία μιας γραμμικής στοιχειοκεραίας παρουσιάζεται στο Σχ. 6.3 που ακολουθεί. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, η θέση του πρώτου στοιχείου της στοιχειοκεραίας (που είναι και το στοιχείο αναφοράς) λαμβάνεται ως αρχή των συντεταγμένων.

* Μπορούμε να απαιτήσουμε απλώς η απόσταση μεταξύ διαδοχικών στοιχείων να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο κάποιου «βασικού βήματος» d , οπότε αναγόμαστε στην ίδια περίπτωση θεωρώντας υποθετικά ενδιάμεσα στοιχεία με ρευματικούς συντελεστές 0.



Σχ. 6.3: Γραμμική στοιχειοκεραία

Τότε, για κάθε στοιχείο K_m , η γωνία ω_m ισούται με τη γωνία γ που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του (οποιουδήποτε) σημείου παρατήρησης P με τον άξονα της στοιχειοκεραίας, ενώ η απόσταση r'_m είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του βήματος d (συγκρίνετε το Σχ. 6.3 με το Σχ. 6.1):

$$r'_m = md \quad , \quad \omega_m = \gamma \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (6.2.1)$$

όπου M το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, η (6.1.5) γράφεται στη μορφή

$$S(\theta, \varphi) = S(\gamma) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jkmd \cos \gamma} = \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jm\psi} = \sum_{m=0}^{M-1} C_m z^m = S(\psi) \quad (6.2.2)$$

όπου ορίστηκε μια «βοηθητική μεταβλητή» $\psi = kd \cos \gamma$ και $z = e^{j\psi}$. Η (6.2.2) δείχνει ότι ο παράγοντας διάταξης $S(\theta, \varphi)$ της γραμμικής στοιχειοκεραίας είναι περιοδική συνάρτηση της βοηθητικής μεταβλητής ψ με περίοδο 2π (αποδείξτε το).

Περαιτέρω, σε πολλές περιπτώσεις υπάρχει και σταθερή διαφορά φάσης μεταξύ των ρευμάτων διαδοχικών στοιχείων της στοιχειοκεραίας, οπότε οι ρευματικοί συντελεστές των στοιχείων της στοιχειοκεραίας μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$C_m = A_m e^{jm\delta} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (6.2.3)$$

όπου δ η διαφορά φάσης μεταξύ των ρευμάτων διαδοχικών στοιχείων και A_m κάποιοι νέοι συντελεστές (λέγονται επίσης ρευματικοί συντελεστές), οι οποίοι συχνά είναι πραγματικοί αλλά μπορούν να είναι και μιγαδικοί*. Τότε η (6.2.2) παίρνει τη μορφή

* Αν οι A_m θεωρηθούν μιγαδικοί τότε η (6.2.4) είναι ισοδύναμη με την (6.2.2) και από θεωρητική άποψη δεν προσφέρει τίποτε νέο. Από πρακτική άποψη όμως έχει σημασία επειδή, όπως θα δούμε, η διαφορά φάσης δ παρέχει τη δυνατότητα στροφής του διαγράμματος ακτινοβολίας χωρίς μηχανική κίνηση της κεραίας (ανίχνευση ή σάρωση φάσης – phase scan) η οποία είναι πολύ μεγάλης πρακτικής χρησιμότητας.

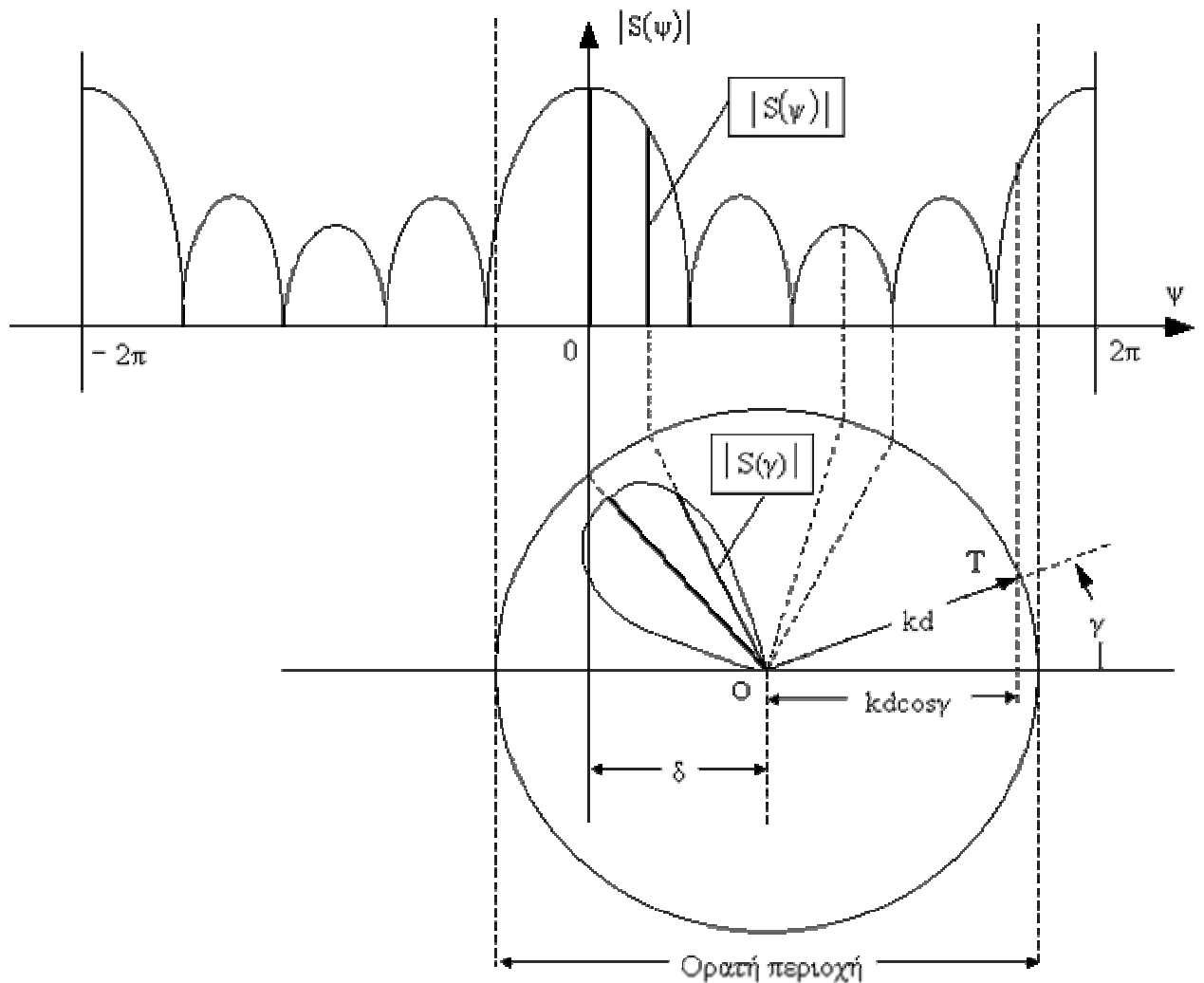
$$S(\theta, \varphi) = S(\gamma) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{jm(kd \cos \gamma + \delta)} = \sum_{m=0}^{M-1} A_m e^{jm\psi} = \sum_{m=0}^{M-1} A_m z^m = S(\psi) \quad (6.2.4)$$

όπου

$$\psi = kd \cos \gamma + \delta \quad (6.2.5)$$

και $z = e^{j\psi}$. Ισχύει και πάλι η παρατήρηση ότι ο παράγοντας διάταξης $S(\theta, \varphi) = S(\psi)$ είναι περιοδική συνάρτηση του ψ με περίοδο 2π .

Η εισαγωγή της βοηθητικής μεταβλητής ψ διευκολύνει τη μελέτη της γραμμικής στοιχειοκεραίας, από αλγεβρικής πλευράς αλλά και από πλευράς φυσικής εποπτείας. Αν υπολογισθεί ο παράγοντας διάταξης στη μορφή $|S(\psi)|$, τότε η μορφή $|S(\gamma)|$ μπορεί να βρεθεί με τη γραφική μέθοδο που δείχνεται στο Σχ. 6.4.



Σχ. 6.4: Σχέση μεταξύ των μορφών $S(\psi)$ και $S(\gamma)$ για γραμμική στοιχειοκεραία

Στο παραπάνω σχήμα, το μέτρο του παράγοντα διάταξης $|S(\psi)|$ σχεδιάζεται σε καρτεσιανό διάγραμμα. Επιθυμητή όμως είναι η μορφή $|S(\gamma)|$, συναρτήσει της πραγματικής γωνίας γ (ενώ η ψ είναι μια βοηθητική μεταβλητή χωρίς γεωμετρική έννοια), σχεδιασμένη σε

πολικό διάγραμμα όπως είναι το σύνηθες για όλα τα διαγράμματα ακτινοβολίας. Η μετατροπή μπορεί να γίνει γράφοντας έναν βοηθητικό κύκλο ακτίνας kd με κέντρο σε απόσταση δ προς τα δεξιά του κατακόρυφου άξονα όπως στο σχήμα (μπορούμε να σκεπτόμαστε ότι ο κύκλος δημιουργείται από ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μήκους kd). Ξεκινώντας από το κάθε σημείο του διαγράμματος $|S(\psi)|$ και φέρνοντας κατακόρυφη ευθεία, παρατηρούμε ότι το σημείο τομής αυτής με τον κύκλο, έστω T , προσδιορίζει τη γωνία γ με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Πραγματικά, η προβολή του T πάνω στην οριζόντια ευθεία απέχει από τον κατακόρυφο άξονα απόσταση $kd\cos\gamma + \delta = \psi$. Στη συνέχεια πάνω στην ημιευθεία OT , όπου O το κέντρο του κύκλου, και αρχίζοντας από το O , παίρνουμε τμήμα ίσο με την τιμή του $|S(\psi)|$, άρα και με την αντίστοιχη τιμή του $|S(\gamma)|$. Το πέρας του τμήματος αυτού είναι το σημείο του πολικού διαγράμματος $|S(\gamma)|$ που αντιστοιχεί στο σημείο του καρτεσιανού διαγράμματος $|S(\psi)|$ από το οποίο ξεκινήσαμε. Επαναλαμβάνοντας (ιδεατά) για όλα τα σημεία του διαγράμματος ολοκληρώνεται η μετατροπή (βλ. στο σχήμα το παράδειγμα δύο σημείων του κύριου λοβού).

Όπως είδαμε, η $|S(\psi)|$ είναι μια συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2π και προφανώς μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα με επαναλαμβανόμενη μορφή. Όμως η περιοχή τιμών του ψ που πραγματικά μας χρειάζεται καθορίζεται από την περιοχή μεταβολής της γωνίας γ και από τις παραμέτρους k (ο κυματαριθμός που αντιστοιχεί στη συχνότητα λειτουργίας), d (το βήμα της στοιχειοκεραίας) και δ (η διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών στοιχείων). Πιο συγκεκριμένα, επειδή η γωνία γ μεταβάλλεται από 0 ως π (βλ. το Σχ. 6.3), για την παράμετρο ψ ισχύει

$$0 \leq \gamma \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos\gamma \leq 1 \Rightarrow \delta - kd \leq kd \cos\gamma + \delta \leq \delta + kd \Rightarrow \delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$$

Η περιοχή $\delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$ λέγεται ορατή περιοχή και περιλαμβάνει τις τιμές της βοηθητικής μεταβλητής ψ που αντιστοιχούν σε όλες τις τιμές της φυσικής γωνίας γ . Από το Σχ. 6.4 διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ορατή περιοχή αντιστοιχεί στη διάμετρο του κύκλου ακτίνας kd που χρησιμοποιήσαμε. Η φυσική της σημασία είναι ότι δίνει το μέρος εκείνο του (βοηθητικού) διαγράμματος $|S(\psi)|$ το οποίο παίζει ρόλο στη διαμόρφωση του (πραγματικού) διαγράμματος $|S(\gamma)|$. Αν η ορατή περιοχή είναι μικρότερη από 2π , το υπόλοιπο τμήμα του διαγράμματος της μαθηματικής συνάρτησης $|S(\psi)|$ που είναι εκτός της ορατής περιοχής δεν επηρεάζει το πραγματικό διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας: θα μπορούσε π.χ. να υπάρχει ένας λοβός μεγαλύτερος από τους άλλους, ο οποίος όμως δεν αντιστοιχεί στον κύριο λοβό της στοιχειοκεραίας (για την ακρίβεια, δεν

αντιστοιχεί σε κανέναν λοβό). Αν πάλι είναι μεγαλύτερη από 2π , κάποιο τμήμα του διαγράμματος $|S(\psi)|$ θα επανεμφανισθεί και άλλη φορά στο διάγραμμα $|S(\gamma)|$, π.χ. αν η ορατή περιοχή είναι αρκετά μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει και τον μεγαλύτερο λοβό της $|S(\psi)|$ και τον όμοιό του μετά από διάστημα 2π , τότε ο παράγοντας διάταξης $|S(\gamma)|$ θα εμφανίζει δύο ισομεγέθεις κύριους λοβούς.

6.2.2. Ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες

Ομοιόμορφες λέγονται οι γραμμικές στοιχειοκεραίες που όλα τα στοιχεία τους έχουν ίσους ρευματικούς συντελεστές $A_0 = \dots = A_m = \dots = A_{M-1} = A$, δηλ. τροφοδοτούνται από ρεύματα ίσου πλάτους τα οποία διαφέρουν ανά δύο μόνο κατά την (σταθερή) διαφορά φάσης δ , όπως στην (6.2.3). Στην περίπτωση αυτή η έκφραση για τον παράγοντα διάταξης της στοιχειοκεραίας απλοποιείται αισθητά, διότι η (6.2.4) γράφεται στη μορφή

$$S(\psi) = A \sum_{m=0}^{M-1} e^{jm\psi} = A \sum_{m=0}^{M-1} z^m = A \frac{z^M - 1}{z - 1} = A \frac{e^{jM\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} \quad (6.2.6)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο γνωστός τύπος για το άθροισμα των M πρώτων όρων γεωμετρικής σειράς με λόγο $z = e^{j\psi}$. Περαιτέρω, η (6.2.6) μπορεί να γίνει

$$S(\psi) = A \frac{e^{jM\psi/2}}{e^{j\psi/2}} \frac{e^{jM\psi/2} - e^{-jM\psi/2}}{e^{j\psi/2} - e^{-j\psi/2}} = A e^{j(M-1)\psi/2} \frac{\sin(M\psi/2)}{\sin(\psi/2)} \quad (6.2.7)$$

οπότε το μέτρο του παράγοντα διάταξης είναι

$$|S(\psi)| = AM \frac{|\sin(M\psi/2)|}{M|\sin(\psi/2)|} \quad (6.2.8)$$

(ο συντελεστής A μπορεί χωρίς βλάβη της γενικότητας να ληφθεί θετικός).

Στην (6.2.8) παρατηρούμε ότι το κλάσμα του δεξιού μέλους παρουσιάζει στη θέση $\psi = 0$ τιμή ίση με 1. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί είτε εφαρμόζοντας τον κανόνα L' Hospital στο όριο $\psi \rightarrow 0$, είτε παρατηρώντας ότι στην περιοχή αυτή (για μικρές τιμές του ψ , δηλ. $\psi \cong 0$) για τα ημίτονα στον αριθμητή και τον παρονομαστή ισχύει ο προσεγγιστικός τύπος $\sin x \cong x$, και κατά συνέπεια μπορούν να αντικατασταθούν με τις προσεγγιστικές τιμές τους: $\sin(M\psi/2) \cong M\psi/2$ και $\sin(\psi/2) \cong \psi/2$, οπότε το κλάσμα εξισώνεται με 1. Λόγω περιοδικής συμπεριφοράς, το κλάσμα λαμβάνει επίσης την τιμή 1 και στη θέση $\psi = 2\pi$. Περαιτέρω, μπορεί να αποδειχθεί ότι η τιμή αυτή είναι η μέγιστη για όλο το διάστημα $0 \leq \psi \leq 2\pi$, ενώ η $|S(\psi)|$ παρουσιάζει επίσης μια σειρά από μικρότερα τοπικά μέγιστα ($M - 2$ τον αριθμό) στο διάστημα αυτό. Κατά συνέπεια, ο παράγοντας διάταξης $|S(\psi)|$ εμφανίζει τον κύριο λοβό του γύρω από τη θέση μεγίστου $\psi = 0$, καθώς και $M - 2$ το πλήθος δευτερεύοντες

λοβούς σε άλλες θέσεις. Το πλήθος των δευτερευόντων λοβών μπορεί να βρεθεί και από τη μελέτη των μηδενισμών της συνάρτησης $|S(\psi)|$, οι οποίοι προκύπτουν εύκολα από τη συνθήκη

$$\sin\left(\frac{M\psi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{M\psi}{2} = n\pi$$

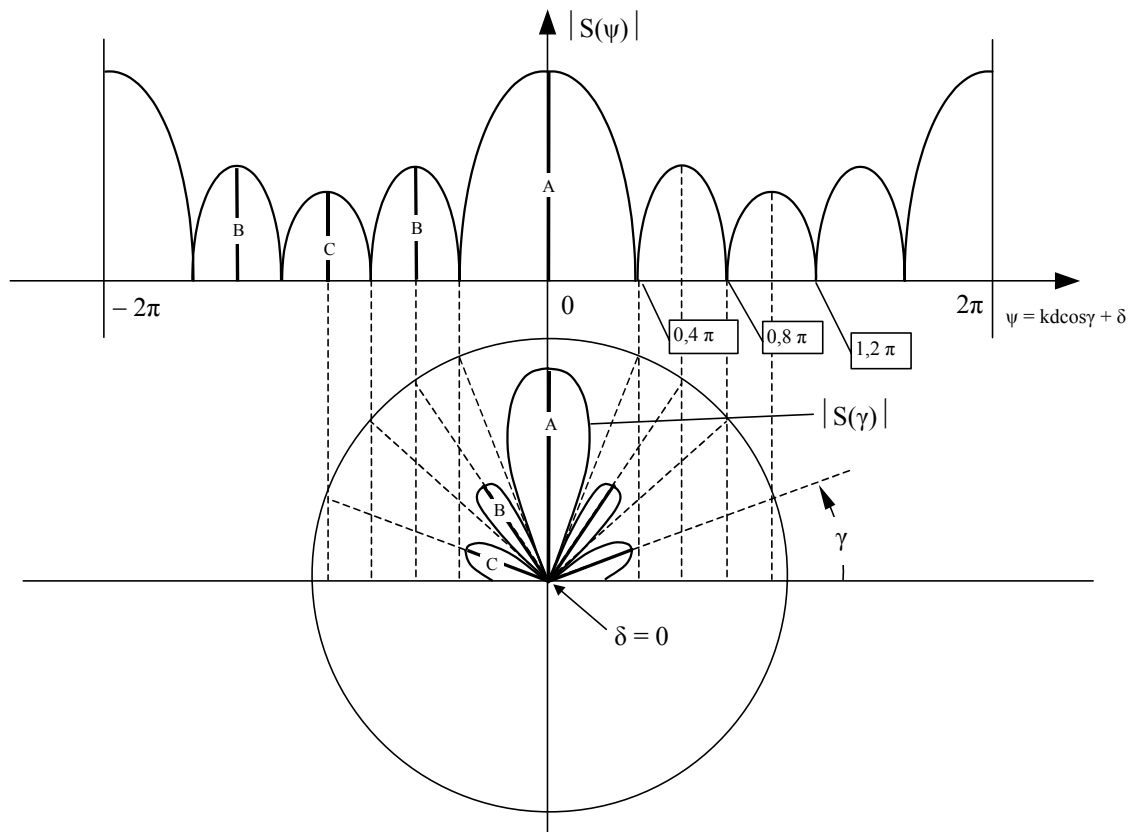
Στο διάστημα $0 \leq \psi \leq 2\pi$ πρέπει να ληφθούν μόνο οι ακέραιοι $n = 1, \dots, M-1$ διότι μετά την τιμή M (που αντιστοιχεί σε $\psi = 2\pi$) η συνάρτηση επαναλαμβάνεται περιοδικά, άρα ουσιαστικά πρόκειται για τους ίδιους μηδενισμούς, ενώ οι ακέραιοι $n = 0, M$ εξαιρούνται διότι δίνουν $\psi = 0, \pi$ και (όπως είδαμε) εκεί δεν υπάρχουν μηδενισμοί αλλά μέγιστα. Επομένως στο διάστημα $0 \leq \psi \leq 2\pi$ υπάρχουν συνολικά $M-1$ μηδενισμοί στις θέσεις

$$\psi_{0(n)} = \frac{2n\pi}{M}, \quad n = 1, \dots, M-1 \quad (6.2.9)$$

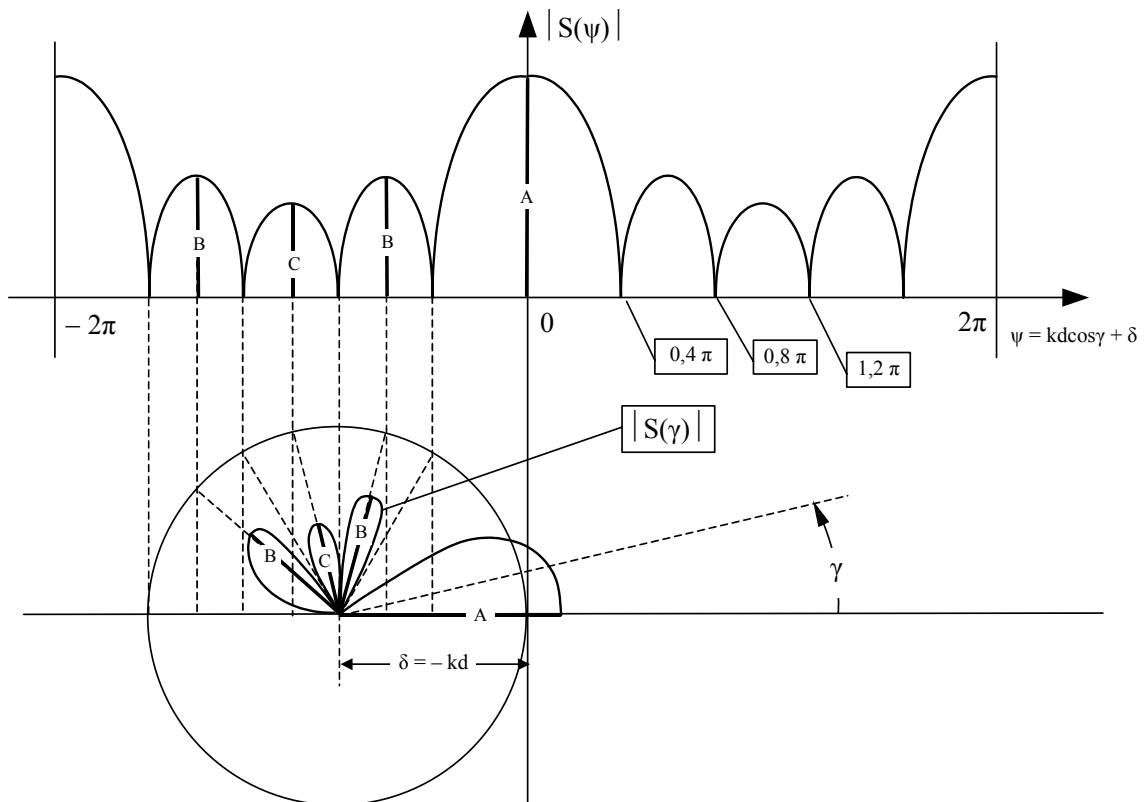
και άρα μεταξύ αυτών εμφανίζονται $M-2$ δευτερεύοντες λοβοί.

Συμπερασματικά, ο παράγοντας διάταξης $|S(\psi)|$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του στις θέσεις $\psi = 0$ και $\psi = 2\pi$, ενώ ενδιάμεσα στο διάστημα $0 \leq \psi \leq 2\pi$ παρουσιάζει $M-2$ το πλήθος δευτερεύοντες λοβούς με ισάριθμα τοπικά μέγιστα. Η μέγιστη τιμή είναι ίση με AM , δηλ. ανάλογη προς το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας (όσο περισσότερα στοιχεία τόσο ισχυρότερη ακτινοβολία) και προς το ρεύμα τροφοδοσίας καθενός από αυτά, ενώ τα τοπικά μέγιστα έχουν μικρότερες τιμές. Ο παράγοντας διάταξης $|S(\gamma)|$ προσδιορίζεται με τη μέθοδο μετατροπής που περιγράφηκε στα προηγούμενα, ενώ η θέση και το πλήθος των λοβών αυτού εξαρτάται από τη θέση και το εύρος της ορατής περιοχής.

Στα σχήματα 6.5 που ακολουθούν παρουσιάζονται ενδεικτικά δυο περιπτώσεις του παράγοντα διάταξης $|S(\gamma)|$ για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με $M = 5$ στοιχεία και το ίδιο A και άρα το ίδιο $|S(\psi)|$. Αλλάζει η διαφορά φάσης δ και επομένως η ορατή περιοχή.



Σχ. 6.5α: Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με $\delta = 0$ (μετωπική ή ευρύπλευρη)



Σχ. 6.5β: Ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με $\delta = -kd$ (αξονική ή ακροπυροδοτική)

Από τα παραπάνω σχήματα είναι προφανές ότι μεταβάλλοντας την ορατή περιοχή μεταβάλλεται πλήρως η θέση, το πλήθος αλλά και το άνοιγμα των λοβών στον παράγοντα

διάταξης $|S(\gamma)|$. Το μέγεθος $2kd$ της ορατής περιοχής εξαρτάται από το βήμα d της στοιχειοκεραίας, δηλ. την απόσταση διαδοχικών στοιχείων, ή / και από τη συχνότητα λειτουργίας της (μέσω της παραμέτρου k), ενώ η θέση της ορατής περιοχής εξαρτάται από τη διαφορά φάσης δ μεταξύ ρευμάτων διαδοχικών στοιχείων.

Ειδικότερα στην περίπτωση $\delta = 0$, όπως φαίνεται από το Σχ. 6.5(α), η μέγιστη τιμή του $|S(\gamma)|$ εμφανίζεται στη θέση $\gamma = \pi/2$, δηλ. κάθετα στον άξονα της στοιχειοκεραίας. Για τον λόγο αυτό, η στοιχειοκεραία με $\delta = 0$ (δηλ. με όλα τα στοιχεία της τροφοδοτούμενα από συμφασικά ρεύματα) ονομάζεται **μετωπική** ή **ευρύπλευρη** (broadside array). Εύκολα επιβεβαιώνουμε από το σχήμα ότι η ακτινοβολία θα είναι μετωπική (δηλ. το μέγιστο εμφανίζεται στην κάθετη διεύθυνση) ανεξάρτητα από το μέγεθος $2kd$ της ορατής περιοχής (δηλ. την διάμετρο του βοηθητικού κύκλου). Ο λόγος είναι ότι αν οι πηγές του κύματος (τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας) είναι συμφασικές, τότε η συμβολή των κυμάτων τους στην κάθετη διεύθυνση είναι πάντοτε ενισχυτική, ανεξάρτητα από την απόσταση d μεταξύ διαδοχικών πηγών. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην κάθετη διεύθυνση για όλα τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι $\gamma = \omega_m = \pi/2$ δηλ. 90° (βλ. τα Σχ. 6.1 και 6.3 για τη γεωμετρία), άρα $\cos\omega_m = \cos\gamma = 0$ και κατά συνέπεια οι ποσότητες $r'_m \cos\omega_m = r'_m \cos\gamma = 0$ για όλα τα m (όλα τα στοιχεία). Επομένως από την (6.2.4) προκύπτει

$$S(\pi/2) = A_0 + A_1 + \dots + A_{M-1}$$

πράγμα που δείχνει ότι στην κάθετη διεύθυνση έχουμε ενισχυτική συμβολή (διότι τα ρεύματα A_m όλων των πηγών αθροίζονται και κανένα δεν αφαιρείται). Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι εφόσον τα ρεύματα των στοιχείων είναι συμφασικά, η ακτινοβολία θα είναι μετωπική και στη γενικότερη περίπτωση μη ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $kd \geq 2\pi$, δηλ. το εύρος $2kd$ της ορατής περιοχής φτάσει ή ξεπεράσει τα 4π , τότε στο διάγραμμα $|S(\gamma)|$ θα εμφανισθούν περισσότεροι μέγιστοι λοβοί και σε άλλες διευθύνσεις, λόγω επανεμφάνισης του κύριου λοβού του $|S(\psi)|$. Για παράδειγμα στην περίπτωση $kd = 2\pi$ θα υπάρχουν τρεις κύριοι λοβοί, ο ένας στη μετωπική διεύθυνση $\gamma = \pi/2$ και οι άλλοι δύο στις διευθύνσεις $\gamma = 0$ ($\psi = 2\pi$) και $\gamma = \pi$ ($\psi = -2\pi$).

Από την άλλη πλευρά, το Σχ. 6.5(β) δείχνει την περίπτωση $\delta = -kd$ (οπότε ο βοηθητικός κύκλος εφάπτεται στον κατακόρυφο άξονα) με $kd < \pi$. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το μέγιστο του $|S(\gamma)|$ εμφανίζεται στη διεύθυνση $\gamma = 0$ δηλ. τη διεύθυνση του άξονα της στοιχειοκεραίας. Το ίδιο θα συμβεί και στην περίπτωση $\delta = kd$ (με $kd < \pi$ και πάλι), αλλά τότε ο βοηθητικός κύκλος εφάπτεται από δεξιά στον κατακόρυφο άξονα και το μέγιστο εμφανίζεται στη διεύθυνση $\gamma = \pi$. Αν ίσχυε $kd = \pi$, ο κύριος λοβός του $|S(\psi)|$ θα

εμφανιζόταν και δεύτερη φορά και θα είχαμε μέγιστα και στις δύο διευθύνσεις $\gamma = 0$ και $\gamma = \pi$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις το μέγιστο εμφανίζεται κατά τη διεύθυνση του άξονα της στοιχειοκεραίας και η στοιχειοκεραία ονομάζεται **αξονική** ή **ακροπυροδοτική** (end-fire array). Στην πρώτη περίπτωση ($kd < \pi$) η ακτινοβολία είναι **μονόπλευρη** (unilateral) ενώ στη δεύτερη ($kd = \pi$) είναι **αμφίπλευρη** (bilateral), όπως είδαμε.

Πέρα από τις δύο παραπάνω αξιοσημείωτες περιπτώσεις, παρατηρούμε γενικότερα ότι σε κάθε περίπτωση η διεύθυνση μεγίστου του $|S(\gamma)|$ της στοιχειοκεραίας καθορίζεται από τη θέση του βοηθητικού κύκλου, δηλ. από τη διαφορά φάσης δ μεταξύ διαδοχικών στοιχείων. Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές από το Σχ. 6.4, ενώ η διεύθυνση του μεγίστου μπορεί να προσδιορισθεί με βάση το γεγονός ότι (όπως προαναφέρθηκε) το μέγιστο του $|S(\psi)|$ είναι στη θέση $\psi = 0$. Με βάση την (6.2.5) έχουμε για τη διεύθυνση μεγίστου γ_{\max} τη συνθήκη

$$\psi = kd \cos \gamma_{\max} + \delta = 0 \Rightarrow \gamma_{\max} = \cos^{-1} \left(-\frac{\delta}{kd} \right) \quad (6.2.10)$$

υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι το μέγιστο εμφανίζεται μόνο μία φορά, δηλ. το μέγεθος $2kd$ της ορατής περιοχής δεν είναι υπερβολικά μεγάλο (όπως είδαμε παραπάνω).

Το γεγονός ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των στοιχείων προσδιορίζει τη διεύθυνση μεγίστου έχει εξαιρετικά μεγάλη πρακτική σημασία. Στην πράξη σημαίνει ότι μεταβάλλοντας τα ρεύματα τροφοδοσίας της στοιχειοκεραίας μπορούμε να στρέψουμε τον κύριο λοβό ακτινοβολίας της με καθαρά ηλεκτρονικό τρόπο, χωρίς μηχανική περιστροφή της κεραίας. Παραπάνω αυτό δείχθηκε για στοιχειοκεραίες σε μία διάσταση (γραμμικές), είναι όμως προφανές ότι η ίδια φυσική αρχή ισχύει και για πιο πολύπλοκες στοιχειοκεραίες δύο διαστάσεων, με τις οποίες επιτυγχάνεται στενότερος (και όχι κυκλικά συμμετρικός) κύριος λοβός και άρα λεπτομερέστερη σκόπευση σε συγκεκριμένη διεύθυνση του χώρου. Η μέθοδος ονομάζεται **ανίχνευση φάσης** ή **σάρωση φάσης** (phase scan) και σε αυτή βασίζεται η λειτουργία των στοιχειοκεραίων ανίχνευσης φάσης (phased arrays) οι οποίες έχουν πλήθος εφαρμογών σε ραντάρ και σε τηλεπικοινωνιακές ζεύξεις. Στην περίπτωση λήψης, είναι δυνατόν με κατάλληλη ψηφιακή επεξεργασία του εισερχόμενου σήματος να ρυθμίζεται δυναμικά η διαφορά φάσης μεταξύ των στοιχείων της κεραίας σε τρόπο ώστε οι λοβοί της να στρέφονται παρακολουθώντας το επιθυμητό σήμα και αποφεύγοντας τυχόν πηγές παρεμβολών, οπότε έχουμε τις λεγόμενες προσαρμοστικές στοιχειοκεραίες (adaptive arrays).

Το εύρος δέσμης πρώτου μηδενισμού του κύριου λοβού του $|S(\gamma)|$ μπορεί να προσδιορισθεί εύκολα με τη βοήθεια της (6.2.9). Παρατηρούμε (με τη βοήθεια και των σχημάτων που προηγήθηκαν) ότι οι πρώτες θέσεις μηδενισμών εκατέρωθεν του μεγίστου

του $|S(\gamma)|$ αντιστοιχούν στις πρώτες θέσεις μηδενισμών* εκατέρωθεν του $\psi = 0$ που είναι η θέση μεγίστου του $|S(\psi)|$. Οι πρώτοι αυτοί μηδενισμοί είναι στις θέσεις $\psi_{0(1)}$ και $\psi_{0(-1)}$ της (6.2.9), την οποία εφαρμόζουμε εδώ και για $n = -1$. Χρησιμοποιώντας την (6.2.5) παίρνουμε

$$\psi_{0(1)} = \frac{2\pi}{M} = kd \cos \gamma_{0(1)} + \delta \Rightarrow \gamma_{0(1)} = \cos^{-1} \left(\frac{2\pi - M\delta}{Mkd} \right) \quad (6.2.11\alpha)$$

$$\psi_{0(-1)} = -\frac{2\pi}{M} = kd \cos \gamma_{0(-1)} + \delta \Rightarrow \gamma_{0(-1)} = \cos^{-1} \left(-\frac{2\pi + M\delta}{Mkd} \right) \quad (6.2.11\beta)$$

από τις οποίες προκύπτει το εύρος δέσμης πρώτου μηδενισμού

$$\Delta_0 = \gamma_{0(-1)} - \gamma_{0(1)} = \cos^{-1} \left(-\frac{2\pi + M\delta}{Mkd} \right) - \cos^{-1} \left(\frac{2\pi - M\delta}{Mkd} \right) \quad (6.2.12)$$

όπου η γωνία $\gamma_{0(-1)}$ έχει τεθεί ως αφαιρετέος διότι (όπως είναι εμφανές και γεωμετρικά από τα σχήματα που προηγήθηκαν) είναι μεγαλύτερη από την $\gamma_{0(1)}$.

Στην περίπτωση μετωπικής στοιχειοκεραίας ισχύει $\delta = 0$ και $\gamma_{0(-1)} = \pi - \gamma_{0(1)}$ (λόγω συμμετρίας), οπότε η (6.2.12) απλοποιείται στη μορφή

$$\Delta_0 = \pi - 2 \cos^{-1} \left(\frac{2\pi}{Mkd} \right) = 2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{2\pi}{Mkd} \right) \right] = 2 \sin^{-1} \left(\frac{2\pi}{Mkd} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{Md} \right) \quad (6.2.13)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και το ότι, ως γνωστόν, $k = 2\pi/\lambda$.

Για στοιχειοκεραία μεγάλου πλήθους στοιχείων M , μπορεί στην (6.2.13) να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $\sin^{-1} y \cong y$ για μικρά y (η οποία απορρέει ευθέως από τη γνωστή προσέγγιση $\sin x \cong x$ για μικρά x), οπότε αυτή γίνεται προσεγγιστικά

$$\Delta_0 \cong \frac{2\lambda}{Md} \cong \frac{2\lambda}{L} \quad (6.2.14)$$

όπου L είναι το μήκος της στοιχειοκεραίας με $L = (M-1)d \cong Md$ (για μεγάλα M).

Στην περίπτωση αξονικής στοιχειοκεραίας τα παραπάνω δεν εφαρμόζονται με τον ίδιο τρόπο, διότι η μία από τις δύο πρώτες θέσεις μηδενισμών του $|S(\psi)|$ είναι εκτός της ορατής περιοχής. Στην περίπτωση του σχήματος 6.5(β) παραπάνω, αυτή είναι η $\psi_{0(1)}$ και άρα δεν υπάρχει η $\gamma_{0(1)}$. Από το σχήμα, λόγω του ότι παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία και η εικόνα του $|S(\gamma)|$ στο χώρο προκύπτει εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα της στοιχειοκεραίας, παρατηρούμε ότι το εύρος δέσμης πρώτου μηδενισμού του κύριου λοβού

* Για την ακρίβεια, αυτό ισχύει εφόσον η ορατή περιοχή είναι αρκετά μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει και τις δύο αυτές θέσεις μηδενισμών, πράγμα που ισχύει στις περισσότερες περιπτώσεις. Δεν ισχύει στην περίπτωση αξονικής (end-fire) στοιχειοκεραίας την οποία εξετάζουμε αμέσως μετά.

είναι διπλάσιο από τη γωνία $\gamma_{0(-)}$. Επειδή ισχύει $\delta = -kd$, έχουμε

$$\psi_{0(-)} = -\frac{2\pi}{M} = kd \cos \gamma_{0(-)} - kd \Rightarrow \frac{2\pi}{Mkd} = 1 - \cos \gamma_{0(-)} = 2 \sin^2 \left(\frac{\gamma_{0(-)}}{2} \right)$$

Επομένως

$$\sin^2 \left(\frac{\gamma_{0(-)}}{2} \right) = \frac{\pi}{Mkd} \Rightarrow \gamma_{0(-)} = 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{Mkd}} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2Md}} \right)$$

και άρα

$$\Delta_0 = 2\gamma_{0(-)} = 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{Mkd}} \right) = 4 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2Md}} \right) \quad (6.2.15)$$

ενώ για μεγάλο πλήθος στοιχείων M ισχύει η προσέγγιση

$$\Delta_0 \cong 4 \sqrt{\frac{\lambda}{2Md}} \cong 4 \sqrt{\frac{\lambda}{2L}} = 2 \sqrt{\frac{2\lambda}{L}} \quad (6.2.16)$$

Από τις προσεγγιστικές μορφές (6.2.14) και (6.2.16) γίνεται προφανές ότι καθώς αυξάνει το πλήθος στοιχείων M μειώνεται το εύρος δέσμης Δ_0 και επομένως αυξάνει η κατευθυντικότητα της στοιχειοκεραίας. Αυτό βέβαια είναι γενικότερος κανόνας που ισχύει όχι μόνο για μεγάλα αλλά και για μικρά M , όπως φαίνεται ήδη από τη μορφή του $|S(\psi)|$ και τις θέσεις μηδενισμών του.

Ο υπολογισμός του εύρους δέσμης μισής ισχύος $\Delta_{(-3dB)}$ του κύριου λοβού είναι πιο δύσκολος διότι απαιτεί τον προσδιορισμό της τιμής του ψ για την οποία ισχύει

$$|S(\psi)| = \frac{|S(\psi)|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{AM}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|\sin(M\psi/2)|}{M|\sin(\psi/2)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6.2.17)$$

Ο προσδιορισμός αυτός γίνεται με αριθμητικές μεθόδους. Στην περίπτωση μεγάλου πλήθους στοιχείων M ο κύριος λοβός έχει μικρό εύρος και αντιστοιχεί σε μικρές τιμές του ψ , οπότε με την προσέγγιση $\sin(\psi/2) \cong \psi/2$ (στην περιοχή του κύριου λοβού) έχουμε

$$|S(\psi)| \cong AM \left| \frac{\sin(M\psi/2)}{M\psi/2} \right| \quad (6.2.18)$$

δηλ. σχετίζεται με τη γνωστή συνάρτηση $\sin x/x$, που είναι απλούστερη. Με αριθμητική μέθοδο (και πολύ καλή προσέγγιση) μπορεί να βρεθεί η λύση*

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \cong \pm 1,391 \text{ και άρα } \frac{|\sin(M\psi/2)|}{|M\psi/2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow M \frac{\psi}{2} \cong \pm 1,391 \quad (6.2.19)$$

* Η αντίστοιχη λύση για την ακριβέστερη (6.2.17) δεν απέχει πολύ. Π.χ. για $M = 5$ είναι $M\psi/2 \cong \pm 1,416$, για $M = 10$ είναι $M\psi/2 \cong \pm 1,398$ και για $M = 50$ είναι $M\psi/2 \cong \pm 1,392$.

και από αυτή οι γωνίες μισής ισχύος $\gamma_{(-3\text{dB})}$ του κύριου λοβού του $|S(\gamma)|$ κατά προσέγγιση:

$$\frac{M}{2}(\text{kd} \cos \gamma_{(-3\text{dB})} + \delta) \cong \pm 1,391 \Rightarrow \gamma_{(-3\text{dB})} \cong \cos^{-1} \left[\frac{1}{\text{kd}} \left(\pm \frac{2,782}{M} - \delta \right) \right] \quad (6.2.20)$$

Το εύρος δέσμης μισής ισχύος $\Delta_{(-3\text{dB})}$ προκύπτει με αφαίρεση των δύο αυτών γωνιών.

6.3. ΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ

6.3.1. Γενικά

Στα προηγούμενα παρουσιάστηκε η βασική μεθοδολογία προσδιορισμού των χαρακτηριστικών εκπομπής (άρα και λήψης) μιας στοιχειοκεραίας εφόσον γνωρίζουμε τα ρεύματα τροφοδοσίας των στοιχείων της. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται ως ανάλυση στοιχειοκεραίων, ενώ το αντίστροφο πρόβλημα είναι η σύνθεση στοιχειοκεραίων με επιθυμητά χαρακτηριστικά, δηλ. ο προσδιορισμός της γεωμετρίας των στοιχείων και των ρευμάτων τροφοδοσίας τους εφόσον γνωρίζουμε τον παράγοντα διάταξης ή κάποιες ιδιότητες αυτού (π.χ. την κατευθυντικότητα). Όπως είναι ευνόητο, το πρόβλημα της σύνθεσης στοιχειοκεραίων είναι ευρύτερο και πολύ συχνά δεν επιδέχεται μοναδική λύση, ενώ η επίλυσή του δεν μπορεί να συστηματοποιηθεί πλήρως και ως ένα βαθμό βασίζεται σε κανόνες που είναι γνωστοί από την προγενέστερη εμπειρία.

Σε κάθε περίπτωση, είτε τα ρεύματα τροφοδοσίας θεωρούνται δεδομένα εξ αρχής είτε έχουν βρεθεί από την επίλυση ενός προβλήματος σύνθεσης στοιχειοκεραίας, ανακύπτει το πρόβλημα πως θα επιτευχθούν στην πράξη τα ρεύματα αυτά, δηλ. το πρόβλημα της τροφοδότησης (feeding) ή διέγερσης (driving) της στοιχειοκεραίας. Το πρόβλημα ανάγεται ουσιαστικά στο ποιες τάσεις (δηλ. τι είδους πηγές) πρέπει να συνδεθούν στα στοιχεία της στοιχειοκεραίας ώστε να αναπτυχθούν τα κατάλληλα ρεύματα, και βέβαια η πρακτική πλευρά του είναι το με ποιον τρόπο θα δημιουργηθούν αυτές οι τάσεις.

6.3.2. Η μέθοδος των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων

Για υπολογισμούς τάσεων και ρευμάτων τροφοδοσίας των στοιχείων μιας στοιχειοκεραίας χρησιμοποιείται η έννοια της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης μεταξύ δύο κεραιών, η οποία είναι γνωστή από τα προηγούμενα (βλ. την παράγραφο 5.3.2) για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης δύο κεραιών. Εδώ όμως γενικεύεται για να αναφερθεί στην αλληλεπίδραση όχι μόνο δύο αλλά περισσότερων, M το πλήθος, κεραιών που αποτελούν τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας. Στην περίπτωση αυτή μπορούν και πάλι να ορισθούν

- η ίδια σύνθετη αντίσταση Z_{nn} κάθε (n -στου) στοιχείου, η οποία είναι ουσιαστικά η ίδια με την σύνθετη αντίσταση που θα είχε το στοιχείο αυτό απομονωμένο (χωρίς την παρουσία άλλων στοιχείων),

- η αμοιβαία σύνθετη αντίσταση Z_{nm} μεταξύ κάθε ζεύγους στοιχείων (n,m) της στοιχειοκεραίας, η οποία εκφράζει και πάλι την αλληλεπίδραση μεταξύ τους αλλά παρουσία και των άλλων στοιχείων. Για τον λόγο αυτό η τιμή της αμοιβαίας σύνθετης αντίστασης θεωρητικά διαφέρει από την τιμή που θα είχε για τα ίδια στοιχεία (n,m) στις ίδιες θέσεις αλλά χωρίς την παρουσία των υπόλοιπων στοιχείων της στοιχειοκεραίας, η διαφορά όμως είναι μικρή και στην πράξη συνήθως αγνοείται, ώστε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τιμή που είναι διαθέσιμη π.χ. από θεωρητικούς υπολογισμούς μόνο για δύο στοιχεία.

Με βάση τις σύνθετες αυτές αντιστάσεις μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις αλληλεπίδρασης των M κεραιών (στοιχείων) οι οποίες αποτελούν γενίκευση των εξ. (5.3.3) για περισσότερες από δύο κεραιές:

$$\begin{cases} V_0 = Z_{00}I_0 + Z_{01}I_1 + \dots + Z_{0(M-1)}I_{M-1} \\ V_1 = Z_{10}I_0 + Z_{11}I_1 + \dots + Z_{1(M-1)}I_{M-1} \\ \dots \\ V_{M-1} = Z_{(M-1)0}I_0 + Z_{(M-1)1}I_1 + \dots + Z_{(M-1)(M-1)}I_{M-1} \end{cases} \quad (6.3.1)$$

Το σύστημα αυτό των M εξισώσεων έχει γραφεί για τα στοιχεία 0, 1, 2, ..., m, ..., $M-1$ μιας στοιχειοκεραίας (σύμφωνα με τον συμβολισμό που εισήχθηκε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου) και προφανώς μπορεί να γραφεί και σε μορφή πινάκων. Λόγω του θεωρήματος της αμοιβαιότητας, ο πίνακας των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων των στοιχείων ανά δύο θα είναι συμμετρικός, δηλ. $Z_{nm} = Z_{mn}$ (εφόσον ο χώρος μεταξύ των κεραιών είναι ομογενής και ιστροπικός).

Η έννοια της σύνθετης αντίστασης οδήγησης (driving point impedance) που ορίστηκε στην παρ. 5.3.2 γενικεύεται και εδώ για κάθε στοιχείο (έστω m) της στοιχειοκεραίας

$$Z_{in,m} = \frac{V_m}{I_m} = Z_{m0} \frac{I_0}{I_m} + \dots + Z_{mm} + \dots + Z_{m(M-1)} \frac{I_{M-1}}{I_m} \quad (6.3.2)$$

Με βάση τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι το πρόβλημα του προσδιορισμού κατάλληλων τάσεων οι οποίες να δημιουργούν το επιθυμητό ρεύμα σε κάθε στοιχείο της στοιχειοκεραίας δεν είναι απλό ούτε στη θεωρία (λόγω της δυσκολίας υπολογισμού των αμοιβαίων σύνθετων αντιστάσεων Z_{nm}) ούτε στην πράξη. Θα λυνόταν βέβαια αν διαθέταμε κατάλληλες πηγές ρεύματος (αντί πηγές τάσης) για όλα τα στοιχεία. Μια απλή μέθοδος που είναι χρήσιμη στην περίπτωση συμφασικών ρευμάτων τροφοδοσίας (όπως στην μετωπική στοιχειοκεραία που είδαμε στα προηγούμενα) βασίζεται στις ιδιότητες ενός τμήματος γραμμής μεταφοράς με μήκος $\lambda/4$ και χωρίς απώλειες. Από τις θεμελιώδεις εξισώσεις γραμμής μεταφοράς και με τη γνωστή σύμβαση ότι $z = 0$ στη θέση τερματισμού, παίρνουμε για $z = -\lambda/4$

$$V(-\lambda/4) = V_{\pi} \left(e^{j\beta\lambda/4} + \rho_L e^{-j\beta\lambda/4} \right) = V_{\pi} \left(e^{j\pi/2} + \rho_L e^{-j\pi/2} \right) = jV_{\pi}(1 - \rho_L)$$

$$I(-\lambda/4) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} \left(e^{j\beta\lambda/4} - \rho_L e^{-j\beta\lambda/4} \right) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} \left(e^{j\pi/2} - \rho_L e^{-j\pi/2} \right) = j \frac{V_{\pi}}{Z_0} (1 + \rho_L)$$

και για $z = 0$

$$V(0) = V_{\pi} \left(e^{-j0} + \rho_L e^{j0} \right) = V_{\pi}(1 + \rho_L)$$

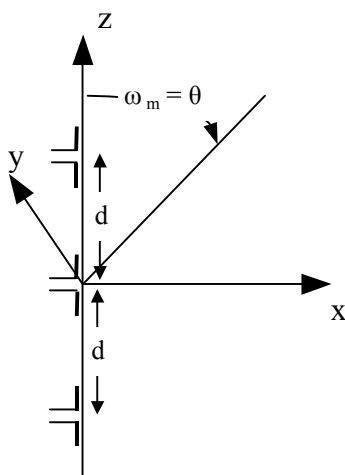
$$I(0) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} \left(e^{-j0} - \rho_L e^{j0} \right) = \frac{V_{\pi}}{Z_0} (1 - \rho_L)$$

και συνδυάζοντας τις παραπάνω προκύπτει

$$V(0) = -jZ_0 I(-\lambda/4) \quad , \quad I(0) = -j \frac{V(-\lambda/4)}{Z_0}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι το ρεύμα $I(0)$ στη θέση τερματισμού ($z = 0$) εξαρτάται μόνο από την τάση $V(-\lambda/4)$ στην είσοδο του τμήματος $\lambda/4$ και την χαρακτηριστική αντίσταση Z_0 της γραμμής, και όχι από την αντίσταση τερματισμού. Γι' αυτό και λέγεται ότι το τμήμα $\lambda/4$ λειτουργεί ως μετασχηματιστής πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος. Με βάση την ιδιότητα αυτή, τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας τροφοδοτούνται μέσω τμημάτων γραμμών μεταφοράς $\lambda/4$, στο άλλο άκρο των οποίων τίθεται η ίδια τάση. Το τμήμα $\lambda/4$ που τροφοδοτεί κάθε στοιχείο λαμβάνεται με κατάλληλη χαρακτηριστική αντίσταση (διαφορετική Z_0 για κάθε στοιχείο), η οποία ρυθμίζει το ρεύμα τροφοδοσίας του στοιχείου. Ο περιορισμός συμφασικών ρευμάτων τροφοδοσίας οφείλεται στο ότι οι χαρακτηριστικές αντιστάσεις των τμημάτων $\lambda/4$ οφείλουν (όπως είδαμε στη θεωρία των γραμμών μεταφοράς) να είναι πραγματικές.

6.4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ



Παράδειγμα 6.1.

Μια στοιχειοκεραία αποτελείται από 3 κατακόρυφα δίπολα Hertz τοποθετημένα κατά μήκος του άξονα z , με τα κέντρα τους πάνω στον άξονα αυτόν και σε απόσταση (βήμα) $d = \lambda/2$ μεταξύ τους ανά δύο. Τα ρεύματα τροφοδοσίας είναι ίσα.

α) Να βρεθεί ο παράγοντας διάταξης και η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας.

β) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) για την περίπτωση που τα στοιχεία είναι δίπολα $\lambda/2$.

γ) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) για την περίπτωση που το βήμα της στοιχειοκεραίας είναι $d = \lambda$.

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του παράγοντα διάταξης μέσω της γενικής σχέσης (6.1.5) αριθμούμε τα στοιχεία με 0, 1, 2 από πάνω προς τα κάτω (όπως έχει αναφερθεί, δεν είναι υποχρεωτικό το πρώτο στοιχείο με τον αριθμό 0 να είναι στην αρχή των αξόνων) και στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για τα τρία στοιχεία της συγκεκριμένης στοιχειοκεραίας:

- Οι ρευματικοί συντελεστές είναι $C_0 = C_1 = C_2 = 1$
- Οι αποστάσεις των στοιχείων από την αρχή είναι: $r'_0 = \lambda/2, r'_1 = 0, r'_2 = \lambda/2$
- Οι γωνίες (συντεταγμένες) θ'_m για τα στοιχεία 0 και 2 είναι: $\theta'_0 = 0, \theta'_2 = \pi$

Από την (6.1.1) προκύπτουν οι τιμές

$$\cos \omega_0 = \cos \theta \cos 0 + \sin \theta \sin 0 \cos(\varphi - \varphi'_0) = 1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'_0) = \cos \theta$$

και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\cos \omega_2 = -1 \cdot \cos \theta + 0 \cdot \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'_2) = -\cos \theta$$

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η τιμή των φ'_0, φ'_2 δεν είναι σαφώς ορισμένη αλλά αυτό δεν έχει σημασία: είναι αδιάφορη διότι ο παράγοντας $\cos(\varphi - \varphi'_m)$ πολλαπλασιάζεται με 0 δίνοντας σε κάθε περίπτωση 0. Επίσης στην περίπτωση του στοιχείου #1 δεν ορίζεται ούτε η θ'_1 ούτε η φ'_1 αλλά και οι δύο τους είναι αδιάφορες διότι εφαρμόζοντας την (6.1.5) ολόκληρη η ποσότητα $\cos \omega_1$ θα πολλαπλασιαστεί με r'_1 που είναι 0 και άρα το γινόμενο $r'_1 \cos \omega_1 = 0$. Αυτός είναι και ο λόγος που δεν αναφερθήκαμε στην ω_1 παραπάνω. Μπορούμε να διατυπώσουμε έναν γενικό κανόνα: προκειμένου για σημεία πάνω στον άξονα z, όπου οι γωνίες φ'_m ή / και θ'_m (στην αρχή των αξόνων) είναι απροσδιόριστες, οι τιμές των γωνιών αυτών κατά την εφαρμογή της (6.1.5) θα είναι πάντοτε αδιάφορες για το αποτέλεσμα (διότι θα πολλαπλασιάζονται με κάποιο μηδενικό) και επομένως δεν χρειάζεται να μας απασχολούν.

Με τη βοήθεια των παραπάνω τιμών μπορούμε να εφαρμόσουμε την (6.1.5) ως εξής:

$$S(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^2 C_m e^{jkr'_m \cos \omega_m} = 1 \cdot e^{j(k\lambda/2)\cos \omega_0} + 1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j(k\lambda/2)\cos \omega_2} = e^{j\pi \cos \theta} + 1 + e^{-j\pi \cos \theta}$$

Στη συνέχεια η $S(\theta, \varphi)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος για το άθροισμα γεωμετρικής προόδου, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} S(\theta, \varphi) &= e^{-j\pi \cos \theta} \left(1 + e^{j\pi \cos \theta} + e^{j2\pi \cos \theta} \right) = e^{-j\pi \cos \theta} \frac{e^{j3\pi \cos \theta} - 1}{e^{j\pi \cos \theta} - 1} = \\ &= e^{-j\pi \cos \theta} \frac{e^{j(3\pi/2)\cos \theta}}{e^{j(\pi/2)\cos \theta}} \frac{\sin[(3\pi/2)\cos \theta]}{\sin[(\pi/2)\cos \theta]} = \frac{\sin[(3\pi/2)\cos \theta]}{\sin[(\pi/2)\cos \theta]} = S(\theta) \end{aligned}$$

Προφανώς ο παράγοντας διάταξης παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία περί τον άξονα z, λόγω της αντίστοιχης συμμετρίας της στοιχειοκεραίας. Το μέτρο του παράγοντα διάταξης είναι

$$|S(\theta, \varphi)| = |S(\theta)| = \frac{|\sin[(3\pi/2)\cos\theta]|}{|\sin[(\pi/2)\cos\theta]|}$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα που θα έδινε η σχέση (5.2.8) για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία. Πραγματικά η στοιχειοκεραία που εξετάζουμε είναι περίπτωση τέτοιας κεραίας με $M = 3$ και $A = 1$. Άλλωστε η διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω είναι ακριβώς η διαδικασία με την οποία αποδείχθηκε η (5.2.8) στην ειδική περίπτωση $M = 3$. Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε εξ αρχής να είχαμε εφαρμόσει τη θεωρία των ομοιόμορφων γραμμικών στοιχειοκεραιών με το ίδιο αποτέλεσμα. Σημειώνουμε ότι και η έκφραση $S(\theta, \varphi)$ που βρέθηκε παραπάνω είναι ουσιαστικά ταυτόσημη με την (6.2.7) που ισχύει για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία, παρουσιάζοντας μόνο μια διαφορά φάσης π , η οποία εξηγείται από το γεγονός ότι εδώ λάβαμε την θέση του στοιχείου αναφοράς #0 όχι στην αρχή των αξόνων όπως στην παράγραφο (6.2.2) αλλά μετατοπισμένη κατά $\lambda/2$ σε σχέση με αυτή. (Ως άσκηση, υπολογίστε την $|S(\theta)|$ με τους τύπους της ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας, παρατηρώντας ότι στην παρούσα περίπτωση είναι $\gamma = \theta$.)

Για την ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας, εφαρμόζουμε την (6.1.6) χρησιμοποιώντας την (4.4.5) που δίνει την $U_0(\theta)$ του διπόλου Hertz και έχουμε:

$$U(\theta, \varphi) = U(\theta) = |S(\theta)|^2 U_0(\theta) = U_{\max} \left(\frac{\sin[(3\pi/2)\cos\theta]}{\sin[(\pi/2)\cos\theta]} \right)^2 \sin^2 \theta$$

Η ένταση ακτινοβολίας $U(\theta)$ της στοιχειοκεραίας είναι και πάλι κυλινδρικά συμμετρική περί τον άξονα z (ομοιοκατευθυντική) λόγω της συμμετρίας και της στοιχειοκεραίας και κάθε στοιχείου της (διπόλου). Αν δεν ίσχυαν και τα δύο δεν θα υπήρχε συμμετρία της $U(\theta)$. Μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι είναι και συμμετρική ως προς το επίπεδο $\theta = 90^\circ$ (δηλ. το επίπεδο xy) για αντίστοιχους λόγους.

Οι διευθύνσεις μηδενισμού της $U(\theta)$ προκύπτουν από τους μηδενισμούς του παράγοντα διάταξης $S(\theta)$ και τους μηδενισμούς της $U_0(\theta)$. Οι πρώτοι δίνονται από την συνθήκη

$$\sin[(3\pi/2)\cos\theta] = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}\cos\theta = n\pi \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2n}{3}$$

Επειδή προφανώς πρέπει $|\cos\theta| \leq 1$, αποδεκτές είναι μόνο οι τιμές $n = -1, 0, 1$. Οι λύσεις (διευθύνσεις μηδενισμού) που προκύπτουν είναι

$$n = 1: \quad \cos \theta_{0(1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_{0(1)} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48,2^\circ$$

$$n = -1: \quad \cos \theta_{0(-1)} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \theta_{0(-1)} = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \theta_{0(1)} \cong 131,8^\circ$$

ενώ η τιμή $n = 0$ δίνει $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$ ή 90° . Όμως για την τιμή αυτή μηδενίζεται και ο παρονομαστής $\sin[(\pi/2)\cos\theta]$ του $S(\theta)$, και με εφαρμογή του κανόνα L' Hospital προκύπτει ότι στο όριο $\theta \rightarrow \pi/2$ δεν έχουμε μηδενισμό.

Από την άλλη πλευρά, οι μηδενισμοί της $U_0(\theta)$ του διπόλου Hertz εμφανίζονται στις γνωστές θέσεις $\theta = 0$ και π . Συνολικά λοιπόν έχουμε 4 μηδενισμούς της έντασης ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας στις θέσεις

$$\theta = 0, 48,2^\circ, 131,8^\circ, 180^\circ$$

β) Για την περίπτωση διπόλων $\lambda/2$, ο παράγοντας διάταξης $S(\theta)$ είναι ακριβώς ο ίδιος, τον οποίο συνδυάζουμε με την $U_0(\theta)$ του διπόλου $\lambda/2$ και προκύπτει

$$U(\theta, \varphi) = U(\theta) = |S(\theta)|^2 U_0(\theta) = U_{\max} \frac{|\sin[(3\pi/2)\cos\theta]|}{|\sin[(\pi/2)\cos\theta]|} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos\theta]}{\sin^2\theta}$$

Οι μηδενισμοί είναι ακριβώς οι ίδιοι όπως και στο προηγούμενο ερώτημα (α) διότι οι μηδενισμοί της $U_0(\theta)$ του διπόλου $\lambda/2$ βρίσκονται και πάλι στις θέσεις $\theta = 0$ και π . (Αν τα στοιχεία ήταν δίπολα με μήκος $> \lambda$ θα προέκυπταν, κατά τα γνωστά, και άλλοι μηδενισμοί).

γ) Για την περίπτωση βήματος λ , επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία παρατηρώντας ότι οι ποσότητες C_m , r'_m , θ'_m και $\cos\omega_m$ παραμένουν ως έχουν. Το μόνο που μεταβάλλεται είναι η ποσότητα $(kr'_m \cos\omega_m)$, η οποία διπλασιάζεται. Εφαρμόζοντας λοιπόν την (6.1.5) παίρνουμε

$$S(\theta, \varphi) = S(\theta) = \dots = e^{j2\pi \cos\theta} + 1 + e^{-j2\pi \cos\theta} = \dots = \frac{\sin(3\pi \cos\theta)}{\sin(\pi \cos\theta)}$$

ενώ για την ένταση ακτινοβολίας πολλαπλασιάζουμε με την $U_0(\theta)$ του διπόλου Hertz όπως και πριν. Οι μηδενισμοί του παράγοντα διάταξης προκύπτουν πλέον από την

$$\sin(3\pi \cos\theta) = 0 \Leftrightarrow 3\pi \cos\theta = n\pi \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{n}{3}$$

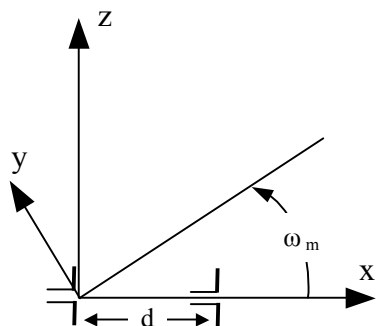
Τώρα οι επιτρεπτές τιμές είναι οι $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ και προκύπτουν περισσότερες διευθύνσεις μηδενισμού, ήτοι οι:

$$\theta_{0(1)} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70,5^\circ \quad \theta_{0(2)} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \cong 48,2^\circ$$

καθώς και τα παραπληρώματα αυτών. Η τιμή $\theta_{0(3)} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{3}\right)\cos^{-1}(1) = 0^\circ$ και η παραπληρωματική της 180° δεν είναι μηδενισμοί της $S(\theta)$ (όπως διαπιστώνουμε και πάλι με τη βοήθεια του κανόνα L' Hospital), είναι όμως μηδενισμοί της $U_0(\theta)$ του διπόλου Hertz.

Παράδειγμα 6.2.

Μια στοιχειοκεραία αποτελείται από 2 κατακόρυφα δίπολα τοποθετημένα κατά μήκος του



άξονα x, με τα κέντρα τους στις θέσεις (0,0,0) και (λ/2,0,0), τα οποία τροφοδοτούνται από ίσα ρεύματα.

α) Να βρεθεί ο παράγοντας διάταξης και η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας για την περίπτωση διπόλων Hertz και την περίπτωση διπόλων λ/2.

β) Να προσδιορισθούν οι διευθύνσεις των μηδενισμών στα επίπεδα xy, xz και yz για την περίπτωση διπόλων Hertz.

γ) Να βρεθεί ο παράγοντας διάταξης αν το βήμα της στοιχειοκεραίας γίνει $d = \lambda$.

δ) Να βρεθεί η ένταση ακτινοβολίας και οι διευθύνσεις μηδενισμών στα επίπεδα xy, xz και yz για την περίπτωση στοιχειοκεραίας 4 διπόλων Hertz στις θέσεις (0,0,0), (λ/2,0,0), (λ,0,0) και (3λ/2,0,0) τροφοδοτούμενων από ίσα ρεύματα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η απάντηση στο ερώτημα (γ).

Απάντηση

α) Αριθμούμε τα στοιχεία 0, 1 (το στοιχείο #0 είναι στην αρχή των αξόνων). Για την εφαρμογή της (6.1.5) έχουμε τα ακόλουθα:

- Ρευματικοί συντελεστές: $C_0 = C_1 = 1$
- Αποστάσεις των στοιχείων από την αρχή: $r'_0 = 0, r'_1 = \lambda/2$
- Γωνίες θ'_m : θ'_0 αδιάφορη, $\theta'_1 = \pi/2$
- Γωνίες ϕ'_m : ϕ'_0 αδιάφορη, $\phi'_1 = 0$

Τότε ισχύει

$$\cos \omega_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \theta + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \theta \cos(\phi - 0) = 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \cos \phi = \sin \theta \cos \phi$$

ενώ το $\cos \omega_0$ είναι αδιάφορο (επειδή $r'_0 = 0$). Επομένως η εφαρμογή της (6.1.5) δίνει

$$S(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^1 C_m e^{jk r'_m \cos \omega_m} = 1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{j(k\lambda/2)\cos \omega_1} = 1 + e^{j\pi \sin \theta \cos \phi}$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$S(\theta, \varphi) = e^{j\pi \sin \theta \cos \varphi / 2} \left(e^{-j\pi \sin \theta \cos \varphi / 2} + e^{j\pi \sin \theta \cos \varphi / 2} \right) = 2 e^{j\pi \sin \theta \cos \varphi / 2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi \right)$$

Άρα το μέτρο του παράγοντα διάταξης είναι

$$|S(\theta, \varphi)| = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi \right)$$

όπου στο δεύτερο μέλος η απόλυτη τιμή παραλείπεται διότι το όρισμα του $\cos(\dots)$ κυμαίνεται από 0 ως $\pm\pi/2$ και για τις τιμές αυτές το συνημίτονο είναι πάντοτε μη αρνητικό.

[Άσκηση: Επαναλάβετε τον υπολογισμό του $|S(\theta, \varphi)|$ με τους τύπους της ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωσή μας ισχύει $\gamma = \omega_1$ (βλ. το Σχ. 6.3) και άρα $\cos \gamma = \cos \omega_1 = \sin \theta \cos \varphi$. Δείξτε ότι η έκφραση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με αυτή που βρέθηκε παραπάνω.]

Κατά συνέπεια η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας προκύπτει, για την περίπτωση διπόλων Hertz, στη μορφή

$$U(\theta, \varphi) = |S(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta) = 4U_{\max} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi \right)$$

ενώ για δίπολα $\lambda/2$ είναι

$$U(\theta, \varphi) = |S(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta) = 4U_{\max} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi \right) \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta}$$

Και στις δύο περιπτώσεις είναι προφανές ότι δεν είναι ομοιοκατευθυντική, δηλ. δεν παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία (λόγω της μη συμμετρικής μορφής του $|S(\theta, \varphi)|$).

β) Το επίπεδο xy στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων αντιστοιχεί σε γωνία $\theta = \pi/2$ και άρα στο επίπεδο αυτό η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας δίνεται από την

$$U\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = 4U_{\max} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \varphi\right) = 4U_{\max} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)$$

Οι μηδενισμοί προκύπτουν από τη συνθήκη

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \cos \varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \varphi = 2n + 1$$

Προφανώς οι μόνες επιτρεπτές τιμές είναι οι $n = 0, -1$ οι οποίες δίνουν

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \qquad \cos \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi$$

Το επίπεδο xz αντιστοιχεί σε $\varphi = 0$ και πρέπει να λάβουμε την

$$U(\theta, 0) = 4U_{\max} \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \right)$$

Οι μηδενισμοί του διπόλου Hertz είναι γνωστοί ($\theta = 0, \pi$) ενώ λόγω του παράγοντα διάταξης προκύπτουν πρόσθετοι μηδενισμοί οι οποίοι δίνονται από την

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\sin\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = 2n + 1$$

Η μόνη επιτρεπτή τιμή είναι η $n = 0$, η οποία δίνει $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/2$. Η τιμή $n = -1$ απορρίπτεται διότι οδηγεί στην τιμή $\theta = -\pi/2$ η οποία δεν υπάρχει στο σφαιρικό σύστημα. Αντίστοιχα το επίπεδο yz αντιστοιχεί σε $\varphi = \pi/2$ και πρέπει να λάβουμε την

$$U\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = 4U_{\max} \sin^2\theta \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cdot 0\right) = 4U_{\max} \sin^2\theta$$

από την οποία είναι προφανές ότι στο επίπεδο αυτό δεν υπάρχουν άλλοι μηδενισμοί εκτός από τους γνωστούς του διπόλου Hertz ($\theta = 0, \pi$).

γ) Στην περίπτωση $d = \lambda$ παρατηρούμε ότι οι ποσότητες C_m , r'_m , θ'_m και $\cos\omega_m$ παραμένουν ως έχουν ενώ η ποσότητα $(kr'_m \cos\omega_m)$ διπλασιάζεται. Επομένως από την εφαρμογή της (6.1.5) παίρνουμε

$$S(\theta, \varphi) = 1 \cdot e^{j0} + 1 \cdot e^{jk\lambda \cos\omega_1} = 1 + e^{j2\pi \sin\theta \cos\varphi}$$

και με την ίδια διαδικασία όπως στο ερώτημα (α) προκύπτει

$$S(\theta, \varphi) = 2e^{j\pi \sin\theta \cos\varphi} \cos(\pi \sin\theta \cos\varphi) \Rightarrow |S(\theta, \varphi)| = 2|\cos(\pi \sin\theta \cos\varphi)|$$

όπου πλέον στο δεύτερο μέλος απαιτείται η απόλυτη τιμή διότι το όρισμα του $\cos(\dots)$ κυμαίνεται από 0 ως $\pm\pi$.

δ) Η στοιχειοκεραία των 4 στοιχείων μπορεί να θεωρηθεί ως μια στοιχειοκεραία του ερωτήματος (γ) που έχει ως στοιχεία δύο στοιχειοκεραίες του ερωτήματος (α). Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο αυτών περιπτώσεων, με βάση την αρχή του πολλαπλασιασμού των παραγόντων διάταξης όπως στην (6.1.7), παίρνουμε

$$|S(\theta, \varphi)| = |S_\gamma(\theta, \varphi)| |S_\alpha(\theta, \varphi)| = 4|\cos(\pi \sin\theta \cos\varphi)| \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cos\varphi\right)$$

Οι διευθύνσεις μηδενισμού της στοιχειοκεραίας αυτής περιλαμβάνουν:

- τους μηδενισμούς του διπόλου Hertz $\theta = 0, \pi$
- τους μηδενισμούς που βρέθηκαν στο ερώτημα (β) για τα επίπεδα xy , xz και yz
- τους πρόσθετους μηδενισμούς λόγω της $|S_\gamma(\theta, \varphi)|$ του ερωτήματος (γ)

Οι μηδενισμοί της $|S_\gamma(\theta, \varphi)|$ προκύπτουν με αντίστοιχο τρόπο όπως στα προηγούμενα.

Για το επίπεδο xy λαμβάνουμε την

$$\left|S\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right)\right| = 2|\cos(\pi \cos\varphi)|$$

οι μηδενισμοί της οποίας δίνονται από τη συνθήκη

$$\cos(\pi \cos \varphi) = 0 \Leftrightarrow \pi \cos \varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \varphi = n + \frac{1}{2}$$

Οι επιτρεπτές τιμές είναι $n = 0$ και -1 , από τις οποίες προκύπτει

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}, 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

δηλ. οι πρόσθετοι μηδενισμοί είναι στις θέσεις $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

Για το επίπεδο xz λαμβάνουμε την

$$|S(\theta, 0)| = 2|\cos(\pi \sin \theta)|$$

οι μηδενισμοί της οποίας δίνονται από τη συνθήκη

$$\cos(\pi \sin \theta) = 0 \Leftrightarrow \pi \sin \theta = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin \theta = n + \frac{1}{2}$$

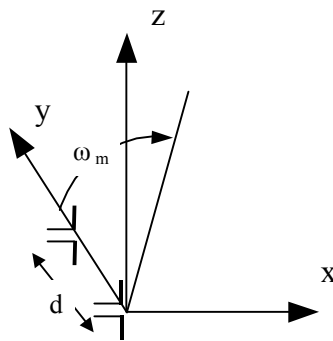
Η μόνη επιτρεπτή τιμή είναι η $n = 0$, η οποία δίνει $\sin \theta = 1/2 \Rightarrow \theta = \pi/6$ δηλ. 30° , ενώ η τιμή $n = -1$ απορρίπτεται διότι οδηγεί στην ανύπαρκτη τιμή $\theta = -\pi/6$.

Τέλος για το επίπεδο yz λαμβάνουμε την

$$\left| S\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) \right| = 2|\cos(\pi \sin \theta \cdot 0)| = 2\cos(0) = 1$$

και άρα στο επίπεδο αυτό δεν υπάρχουν πρόσθετοι μηδενισμοί της $|S_\gamma(\theta, \varphi)|$.

Παράδειγμα 6.3.



Να προσδιορισθεί ο παράγοντας διάταξης και η ένταση ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας από 2 κατακόρυφα δίπολα $\lambda/2$ τοποθετημένα κατά μήκος του άξονα y , στις θέσεις $(0,0,0)$ και $(\lambda/4,0,0)$ και με ρεύματα τροφοδοσίας ίσου μέτρου με διαφορά φάσης $-\pi/2$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι διευθύνσεις μηδενισμών στα επίπεδα xy και yz .

Απάντηση. Αριθμούμε τα στοιχεία 0, 1 (με το στοιχείο #0 στην αρχή των αξόνων) και παρατηρούμε ότι:

- Ρευματικοί συντελεστές: $C_0 = 1, C_1 = e^{-j\pi/2}$
- Αποστάσεις των στοιχείων από την αρχή: $r'_0 = 0, r'_1 = \lambda/4$
- Γωνίες θ'_m : θ'_0 αδιάφορη, $\theta'_1 = \pi/2$
- Γωνίες φ'_m : φ'_0 αδιάφορη, $\varphi'_1 = \pi/2$

οπότε

$$\cos \omega_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \theta + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \theta \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \sin \varphi = \sin \theta \sin \varphi$$

ενώ το $\cos \omega_0$ είναι αδιάφορο επειδή $r'_0 = 0$. Επομένως $kr'_1 \cos \omega_1 = k(\lambda/4) \sin \theta \sin \varphi = (\pi/2) \sin \theta \sin \varphi$ και η εφαρμογή της (6.1.5) δίνει

$$S(\theta, \varphi) = C_0 e^{jkr'_0 \cos \omega_0} + C_1 e^{jkr'_1 \cos \omega_1} = 1 + e^{-j\pi/2} e^{j(\pi/2) \sin \theta \sin \varphi} = 1 + e^{j(\pi/2)(\sin \theta \sin \varphi - 1)}$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$S(\theta, \varphi) = e^{j\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1)} \left[e^{-j\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1)} + e^{j\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1)} \right] = 2 e^{j\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1)} \cos \left[\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1) \right]$$

Άρα το μέτρο του παράγοντα διάταξης είναι

$$|S(\theta, \varphi)| = 2 \left| \cos \left[\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1) \right] \right|$$

και η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας, με τη βοήθεια της $U_0(\theta)$ του διπόλου $\lambda/2$:

$$U(\theta, \varphi) = |S(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta) = 4U_{\max} \cos^2 \left[\frac{\pi}{4}(\sin \theta \sin \varphi - 1) \right] \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta}$$

Οι μηδενισμοί της έντασης ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας περιλαμβάνουν τους γνωστούς μηδενισμούς του διπόλου $\lambda/2$ ($\theta = 0$ και π) και τους μηδενισμούς του παράγοντα διάταξης. Για το επίπεδο xy οι τελευταίοι προσδιορίζονται από την

$$\left| S\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \right| = 2 \left| \cos \left[\frac{\pi}{4}(\sin \varphi - 1) \right] \right|$$

η οποία παρουσιάζει μηδενισμούς στις διευθύνσεις που δίνονται από την

$$\cos \left[\frac{\pi}{4}(\sin \varphi - 1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\sin \varphi - 1) = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin \varphi - 1 = 4n + 2 \Leftrightarrow \sin \varphi = 4n + 3$$

Προφανώς η μόνη επιτρεπτή τιμή είναι η $n = -1$ η οποία δίνει

$$\sin \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

Για το επίπεδο yz οι μηδενισμοί του παράγοντα διάταξης προσδιορίζονται από την

$$\left| S\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) \right| = 2 \left| \cos \left[\frac{\pi}{4}(\sin \theta - 1) \right] \right|$$

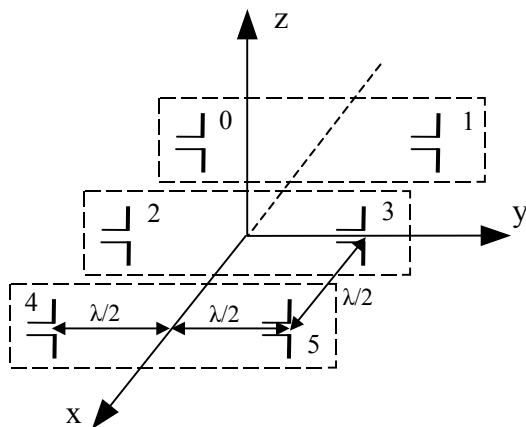
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι αυτή μηδενίζεται μόνο για την τιμή $\theta = 3\pi/2$, η οποία όμως δεν είναι αποδεκτή διότι στις σφαιρικές συντεταγμένες ισχύει $0 \leq \theta \leq \pi$.

Στο επίπεδο xz ο παράγοντας διάταξης λαμβάνει μια σταθερή τιμή $|S(\theta, 0)| = 2 \cos(\pi/4) = \sqrt{2}$ και κατά συνέπεια δεν προκύπτουν πρόσθετοι μηδενισμοί πέραν των γνωστών του διπόλου $\lambda/2$.

Σημειώνουμε ότι, εναλλακτικά, ο παράγοντας διάταξης μπορεί να βρεθεί με τη βοήθεια των σχέσεων της ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας. Ο προσδιορισμός του με τον τρόπο αυτό, καθώς και η απόδειξη ότι το αποτέλεσμα που θα προκύψει είναι ισοδύναμο με αυτό που βρέθηκε παραπάνω, αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Παράδειγμα 6.4.

Έστω στοιχειοκεραία που αποτελείται από 6 στοιχεία τοποθετημένα κατά μήκος του



άξονα x , με τα κέντρα τους στο επίπεδο xy (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τα ρεύματα τροφοδοσίας των στοιχείων (με την αρίθμηση του σχήματος) είναι $I_0 = I_1 = I \exp(-j\pi/4)$, $I_2 = I_3 = I$ και $I_4 = I_5 = I \exp(j\pi/4)$, όπου I κάποιο ρεύμα αναφοράς.

α) Να προσδιορισθεί το μέτρο του παράγοντα διάταξης της στοιχειοκεραίας, αναλύοντας αυτή σε απλούστερες και χρησιμοποιώντας την

αρχή του πολλαπλασιασμού των παραγόντων διάταξης.

β) Εάν τα στοιχεία της στοιχειοκεραίας είναι κατακόρυφα δίπολα $\lambda/2$, να προσδιορισθούν οι διευθύνσεις μηδενισμών της ακτινοβολίας στην επιφάνεια $\varphi = 60^\circ$, δηλ. οι διευθύνσεις μηδενισμών της συνάρτησης $U(\theta, 60^\circ)$.

Απάντηση

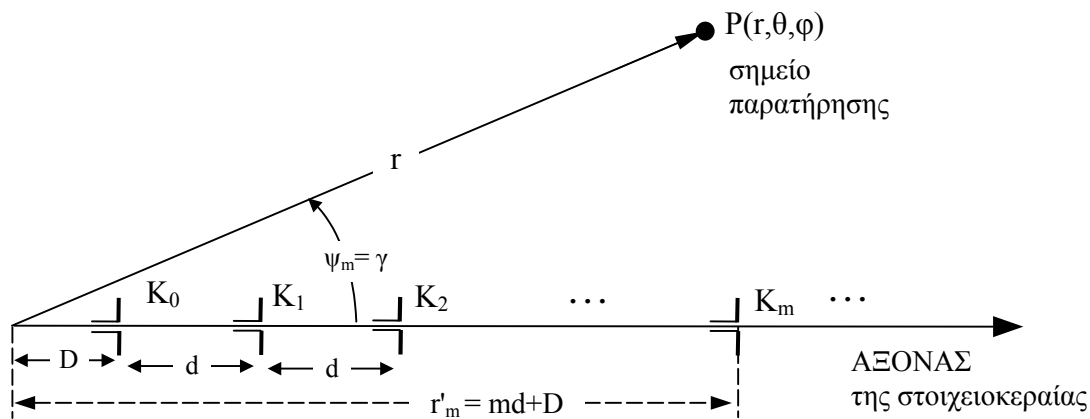
α) Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη στοιχειοκεραία μπορεί να θεωρηθεί ως μια στοιχειοκεραία τριών στοιχείων (αριθμούμενων #0, #1, #2) στις θέσεις $(0,0,0)$, $(\lambda/2,0,0)$ και $(-\lambda/2,0,0)$ με ρευματικούς συντελεστές $C_0 = 1$, $C_1 = e^{j\pi/4}$ και $C_2 = e^{j\pi/2}$, η οποία έχει ως στοιχεία τρεις (ίδιες) στοιχειοκεραίες δύο στοιχείων (#0 και #1) στις θέσεις $(-\lambda/2,0,0)$ και $(\lambda/2,0,0)$ με ρευματικούς συντελεστές $C_0 = C_1 = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι και οι δύο αυτές στοιχειοκεραίες είναι ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες με τις ακόλουθες παραμέτρους:

- Στοιχειοκεραία 1 (τριών στοιχείων) κατά τον άξονα x : πλήθος στοιχείων $M = 3$, βήμα $d = \lambda/2$ (άρα $kd = \pi$), διαφορά φάσης διαδοχικών στοιχείων $\delta = \pi/4$
- Στοιχειοκεραία 2 (δύο στοιχείων) κατά τον άξονα y : πλήθος στοιχείων $M = 2$, βήμα $d = \lambda$ (άρα $kd = 2\pi$), διαφορά φάσης διαδοχικών στοιχείων $\delta = 0$

Επισημαίνουμε ότι η κατάσταση δεν είναι ακριβώς η ίδια όπως στην παράγραφο 5.2 διότι εδώ το στοιχείο #0 (το στοιχείο αναφοράς) καθεμιάς από τις δύο στοιχειοκεραίες δεν

βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων αλλά σε απόσταση $\lambda/2$ από αυτή, ενώ οι τύποι της παραγράφου 6.2 (τόσο γενικά για γραμμικές στοιχειοκεραίες όσο και ειδικότερα για ομοιόμορφες γραμμικές στοιχειοκεραίες) έχουν προκύψει με την προϋπόθεση ότι το στοιχείο αναφοράς βρίσκεται στην αρχή των συντεταγμένων. Εντούτοις, η μόνη περίπτωση της διαφοροποίησης αυτής θα είναι μια διαφορά φάσης στον παράγοντα διάταξης $S(\gamma)$ η οποία δεν επηρεάζει το διάγραμμα ακτινοβολίας. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Αναφερόμαστε στο Σχ. 6.2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία της της παραγράφου 6.2 θεωρώντας το στοιχείο αναφοράς μετατοπισμένο σε κάποια απόσταση π.χ. D (θετική ή αρνητική) από την αρχή των συντεταγμένων. Η κατάσταση είναι όπως στο ακόλουθο σχήμα, όπου η γωνία γ είναι ουσιαστικά η ίδια είτε μετρηθεί από το στοιχείο αναφοράς είτε από την αρχή των συντεταγμένων διότι το σημείο P είναι σε πολύ μεγάλη απόσταση και η διαφορά είναι αμελητέα.



Τότε όλες οι συντεταγμένες r'_m των στοιχείων μεταβάλλονται κατά D ως εξής:

- Αν $D > 0$, το στοιχείο #0 και όλα τα υπόλοιπα είναι δεξιά από την αρχή. Τότε για όλα τα στοιχεία έχουμε $r'_m = md + D$, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν οι ίδιες.
- Αν $D < 0$, το στοιχείο #0 και ορισμένα από τα υπόλοιπα είναι αριστερά από την αρχή. Αυτά είναι τα στοιχεία για τα οποία ισχύει $md + D < 0$. Για τις συντεταγμένες των στοιχείων αυτών ισχύει $r'_m = -(md + D)$, διότι το r'_m πρέπει να είναι θετικό. Όμως για τα στοιχεία αυτά είναι και $\omega_m = \pi - \gamma$, οπότε $\cos\omega_m = -\cos\gamma$ και άρα η ποσότητα $r'_m \cos\omega_m = -(D+md)\cos\gamma = (md+D)\cos\gamma$. Για τα υπόλοιπα στοιχεία (που παραμένουν δεξιά της αρχής) έχουμε $r'_m = md + D > 0$ και $\omega_m = \gamma$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ισχύει $r'_m \cos\omega_m = (md+D)\cos\gamma$, οπότε εφαρμόζοντας την (6.1.5) παίρνουμε μια (ελαφρώς) διαφοροποιημένη έκφραση για τον παράγοντα διάταξης

$$S_D(\gamma) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jk(md+D)\cos\gamma} = e^{jkD\cos\gamma} \sum_{m=0}^{M-1} C_m e^{jkmd\cos\gamma} = e^{jkD\cos\gamma} S(\gamma)$$

όπου $S_D(\gamma)$ είναι ο νέος παράγοντας διάταξης (με μετατόπιση κατά D), ενώ $S(\gamma)$ είναι ο γνωστός παράγοντας διάταξης που δίνει η (6.2.2) με το στοιχείο #0 στην αρχή των συντεταγμένων. Κατά συνέπεια, η μετατόπιση κατά D επηρεάζει τον $S(\gamma)$ μόνο κατά έναν παράγοντα διαφοράς φάσης $e^{jkD\cos\gamma}$ και άρα το μέτρο του παραμένει ίδιο, $|S_D(\gamma)| = |S(\gamma)|$.

Εδώ μας ενδιαφέρει το μέτρο του παράγοντα διάταξης (από το οποίο εξαρτάται το διάγραμμα ακτινοβολίας). Επομένως μπορούμε για το μέτρο αυτό να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας από τους οποίους προκύπτει για τις δύο απλούστερες στοιχειοκεραίες

- Στοιχειοκεραία 1 (τριών στοιχείων): $|S_1(\gamma)| = \frac{\left| \sin \left[\frac{3}{2} \left(\pi \cos \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right|}{\left| \sin \left[\frac{1}{2} \left(\pi \cos \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right|} = \frac{\left| \sin \left[\frac{3\pi}{2} \left(\cos \gamma + \frac{1}{4} \right) \right] \right|}{\left| \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\cos \gamma + \frac{1}{4} \right) \right] \right|}$
- Στοιχειοκεραία 2 (δύο στοιχεία): $|S_2(\gamma)| = \frac{\left| \sin \left[\frac{2}{2} (2\pi \cos \gamma + 0) \right] \right|}{\left| \sin \left[\frac{1}{2} (2\pi \cos \gamma + 0) \right] \right|} = \frac{|\sin(2\pi \cos \gamma)|}{|\sin(\pi \cos \gamma)|}$

Ειδικότερα η έκφραση για την στοιχειοκεραία 2 μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, οπότε προκύπτει

$$|S_2(\gamma)| = \frac{2|\sin(\pi \cos \gamma)\cos(\pi \cos \gamma)|}{|\sin(\pi \cos \gamma)|} = 2|\cos(\pi \cos \gamma)|$$

Πρέπει όμως να προσέξουμε ότι η γωνία γ διαφέρει για τις δύο εν λόγω στοιχειοκεραίες. Η στοιχειοκεραία 1 έχει ως άξονα τον άξονα x, και άρα για τις συντεταγμένες των στοιχείων της ισχύει (αφού αυτά είναι πάνω στον άξονα x) $\theta'_m = \pi/2$ και $\varphi'_m = 0$. Επομένως από την (6.1.1) εφαρμοζόμενη για οποιοδήποτε στοιχείο παίρνουμε

$$\cos \gamma = \cos \omega_m = \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos(\varphi - 0) = \sin \theta \cos \varphi$$

Η στοιχειοκεραία 2 έχει τα στοιχεία της πάνω στον άξονα y, και άρα ισχύει $\theta'_m = \pi/2$ και $\varphi'_m = \pi/2$. Επομένως η (6.1.1) δίνει

$$\cos \gamma = \cos \omega_m = \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta \sin \varphi$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις εκφράσεις για τους παράγοντες διάταξης $S_1(\gamma)$ και $S_2(\gamma)$ παίρνουμε

$$|S_1(\gamma)| = \frac{\left| \sin \left[\frac{3\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right] \right|}{\left| \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right] \right|}$$

$$|S_2(\gamma)| = 2|\cos(\pi \sin \theta \sin \varphi)|$$

Με βάση την αρχή του πολλαπλασιασμού των παραγόντων διάταξης, το μέτρο του παράγοντα διάταξης της συνολικής στοιχειοκεραίας προκύπτει ως εξής:

$$|S(\gamma)| = |S_1(\gamma)||S_2(\gamma)| = 2 \frac{\left| \sin \left[\frac{3\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right] \cos(\pi \sin \theta \sin \varphi) \right|}{\left| \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right] \right|}$$

β) Για στοιχεία δίπολα $\lambda/2$, η ένταση ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας δίνεται από την

$$U(\theta, \varphi) = |S(\theta, \varphi)|^2 U_0(\theta) =$$

$$= 4U_{\max} \frac{\sin^2 \left[\frac{3\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right] \cos^2(\pi \sin \theta \sin \varphi)}{\sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{4} \right) \right]} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta}$$

η οποία για $\varphi = 60^\circ = \pi/3$ γίνεται

$$U\left(\theta, \frac{\pi}{3}\right) = 4U_{\max} \frac{\sin^2 \left[\frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \right) \right] \cos^2 \left(\pi \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \right) \right]} \frac{\cos^2[(\pi/2)\cos \theta]}{\sin^2 \theta}$$

Οι γνωστές διευθύνσεις μηδενισμού $\theta = 0, \pi$ του διπόλου $\lambda/2$ ισχύουν και εδώ. Οι πρόσθετες διευθύνσεις μηδενισμού λόγω του παράγοντα διάταξης προσδιορίζονται από

1) την συνθήκη

$$\sin \left[\frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \right) = n\pi \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}$$

για την οποία αποδεκτές τιμές του n είναι κατ' αρχήν οι $n = 0, 1$ αλλά η $n = 0$ απορρίπτεται διότι πρέπει $0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin \theta \leq 1$, οπότε απομένει μόνο η τιμή $n = 1$ η οποία δίνει

$$\sin \theta = \frac{5}{6} \Rightarrow \theta \cong 56,4^\circ, 123,6^\circ$$

2) την συνθήκη

$$\cos\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) = 0 \Leftrightarrow \pi\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}n + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

για την οποία αποδεκτή είναι μόνο η τιμή $n = 0$, από την οποία παίρνουμε

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta \cong 35,3^\circ, 144,7^\circ$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΩΝ

7.1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

7.1.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Όπως προαναφέρθηκε, το γενικό πρόβλημα της σύνθεσης στοιχειοκεραιών αναφέρεται στον προσδιορισμό της γεωμετρίας και των ρευμάτων τροφοδοσίας της στοιχειοκεραίας ούτως ώστε ο παράγοντας διάταξης να έχει κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά. Με την γενική αυτή μορφή, πρόκειται προφανώς για ευρύτατο πρόβλημα το οποίο δεν μπορεί να προσεγγισθεί με ενιαία τυποποιημένη μεθοδολογία. Στις κυριότερες θεωρητικές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί, θεωρείται δεδομένη η γενική γεωμετρία της στοιχειοκεραίας (κατά κανόνα γραμμική) και, μεταβάλλοντας το πλήθος στοιχείων, το βήμα και κυρίως την κατανομή των ρευμάτων τροφοδοσίας, επιδιώκεται η επίτευξη παράγοντα διάταξης που ικανοποιεί κάποιο κριτήριο. Στην ειδικότερη αυτή μορφή του, το πρόβλημα αναφέρεται και ως σχεδίαση στοιχειοκεραιών. Το κριτήριο εξαρτάται προφανώς από την εφαρμογή για την οποία προορίζεται η κεραία και μπορεί κατά περίπτωση να είναι

- η επιθυμητή (μεγάλη) κατευθυντικότητα
- το επιθυμητό (μικρό) εύρος δέσμης του κύριου λοβού
- το επιθυμητό (μικρό) μέγεθος ή / και πλήθος των πλευρικών λοβών

Όπως είναι ευνόητο, τα κριτήρια αυτά δεν είναι ταυτόσημα (δεν μπορεί μία κεραία να επιτυγχάνει οποιεσδήποτε επιθυμητές τιμές ως προς όλα συγχρόνως) και μάλιστα μπορούν να είναι ανταγωνιστικά μεταξύ τους, δηλ. η βελτίωση ως προς ένα από αυτά να επιφέρει χειροτέρευση ως προς κάποιο άλλο.

Εδώ θα αναφερθούν ορισμένες κλασικές μέθοδοι σχεδίασης στοιχειοκεραιών όπως

- η μέθοδος Schelkunoff
- η μέθοδος των πολυωνύμων Chebyshev
- η μέθοδος των αθροισμάτων Fourier

Από τις παραπάνω μεθόδους, η πρώτη είναι γενικά καταλληλότερη για την αύξηση της κατευθυντικότητας ή / και τη μείωση του εύρους κύριου λοβού και η δεύτερη για τη μείωση του ύψους των πλευρικών λοβών με δεδομένο αριθμό στοιχείων, ενώ η τρίτη έχει γενικό χαρακτήρα και αποσκοπεί στην προσέγγιση ενός επιθυμητού παράγοντα διάταξης, για την οποία όμως ενδέχεται να απαιτηθεί μεγάλος (και εν πάση περιπτώσει όχι δεδομένος) αριθμός στοιχείων. Επισημαίνεται ότι οι μέθοδοι αυτές εφαρμόζονται για τη σχεδίαση γραμμικών (μονοδιάστατων) στοιχειοκεραιών, από τις οποίες όμως (με τη βοήθεια του κανόνα πολλαπλασιασμού των παραγόντων διάταξης) είναι δυνατόν να

σχηματισθούν και συνθετότερες στοιχειοκεραίες δύο διαστάσεων, όπως έχει προαναφερθεί.

Σημειώνεται επίσης ότι οι δύο πρώτες από τις παραπάνω μεθόδους βασίζονται στην παράσταση του παράγοντα διάταξης υπό μορφή πολυωνύμου και ουσιαστικά αποτελούν μεθόδους εκλογής των (μιγαδικών) ριζών του πολυωνύμου αυτού, από τις οποίες φυσικά προσδιορίζεται και το ίδιο το πολυώνυμο και άρα ο παράγοντας διάταξης της σχεδιαζόμενης στοιχειοκεραίας. Για τον λόγο αυτό, θα εξετασθεί πρώτα ο παράγοντας διάταξης οποιασδήποτε γραμμικής στοιχειοκεραίας ως πολυώνυμο κατάλληλης μεταβλητής και θα παρουσιασθούν οι σχετικές ιδιότητες οι οποίες παρέχουν το υπόβαθρο των μεθόδων αυτών.

7.1.2. Η πολυωνυμική μορφή του παράγοντα διάταξης

Η θεμελιώδης παρατήρηση από την οποία ξεκινάμε είναι ότι, με βάση την (6.2.4) του προηγούμενου κεφαλαίου, ο παράγοντας διάταξης μιας γραμμικής στοιχειοκεραίας M στοιχείων με σταθερό βήμα d γράφεται υπό μορφή πολυωνύμου της μιγαδικής μεταβλητής $z = e^{j\psi} = e^{j(kd\cos\gamma+\delta)}$ η οποία έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα. Υπενθυμίζουμε ότι η (6.2.4) δίνει τον παράγοντα διάταξης στη μορφή ενός πολυωνύμου βαθμού $M-1$ με συντελεστές τους ρευματικούς συντελεστές των στοιχείων της στοιχειοκεραίας. Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, το πολυώνυμο αυτό έχει $M-1$ μιγαδικές ρίζες z_1, z_2, \dots, z_{M-1} και μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$S(z) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m z^m = A_{M-1} z^{M-1} + \dots + A_1 z + A_0 = A_{M-1} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{M-1}) \quad (7.1.1)$$

και άρα το μέτρο του παράγοντα διάταξης δίνεται από την

$$|S(\psi)| = |S(z)| = |A_{M-1}| |z - z_1| |z - z_2| \dots |z - z_{M-1}| \quad (7.1.2)$$

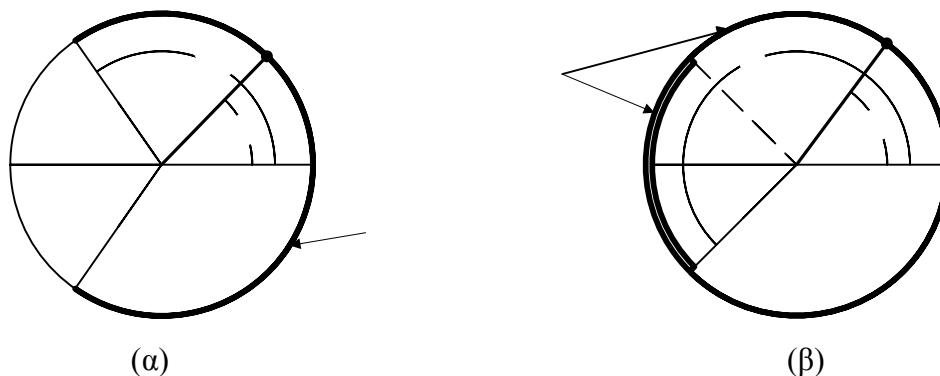
Επισημαίνουμε ότι αντίστοιχη έκφραση παίρνουμε και από την (6.2.2) με C_m αντί A_m .

Το γεγονός ότι η μεταβλητή z έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα σημαίνει ότι, καθώς η γωνία γ μεταβάλλεται στο διάστημα $0 \leq \gamma \leq \pi$, η ανεξάρτητη μεταβλητή z του παραπάνω πολυωνύμου $S(z)$ κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ του μιγαδικού επιπέδου, στον οποίο βρίσκονται και οι ρίζες του πολυωνύμου αυτού. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση

$$z = e^{j\psi} = e^{j(kd\cos\gamma+\delta)} \quad (7.1.3)$$

ορίζει μια αντιστοιχία μεταξύ της γωνίας γ , της πραγματικής μεταβλητής ψ και της μιγαδικής μεταβλητής z . Η αντιστοιχία μεταξύ γ και ψ είναι αμφιμονοσήμαντη δεδομένου ότι $0 \leq \gamma \leq \pi$ (βλ. σχετικά και το Σχ. 6.4), ενώ η αντιστοιχία μεταξύ ψ και z μπορεί να είναι αμφιμονοσήμαντη ή όχι ανάλογα με το εύρος της ορατής περιοχής $\delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$.

Στο μιγαδικό επίπεδο, η βοηθητική μεταβλητή ψ αποτελεί το όρισμα της μεταβλητής z , δηλ. (γεωμετρικά) τη γωνία υπό την οποία το σημείο z «βλέπει» τον θετικό ημιάξονα. Επομένως, η ορατή περιοχή (που είναι η περιοχή τιμών της μεταβλητής ψ) αντιπροσωπεύει το εύρος γωνιών που «διατρέχει» το σημείο z πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο έχει ληφθεί ενδεικτικά $\delta = 0$.



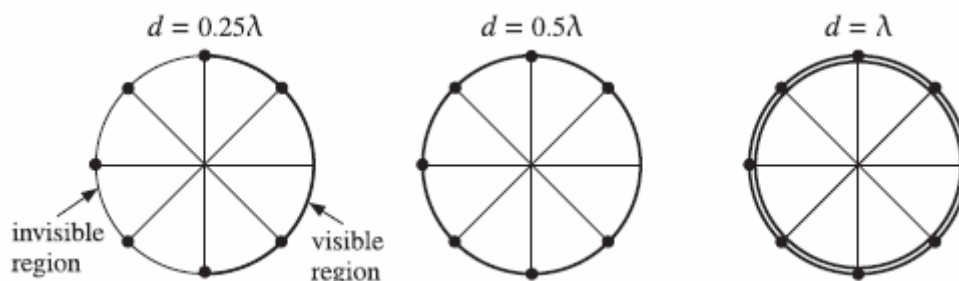
Σχ. 7.1: Τυχόν σημείο z και η ορατή περιοχή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο
 (α) για $kd < \pi$ (β) για $kd > \pi$

Κατά συνέπεια, αν η ορατή περιοχή έχει εύρος μικρότερο από 2π τότε η περιοχή τιμών του z αντιστοιχεί σε ένα μέρος του μοναδιαίου κύκλου και αν είναι ακριβώς στον πλήρη κύκλο, ενώ αν είναι μεγαλύτερη από 2π τότε η περιοχή τιμών του z «υπερκαλύπτει» τον μοναδιαίο κύκλο δηλ. το σημείο z περνάει από κάποια τμήματά του δύο φορές (ή και περισσότερες). Προφανώς στην πρώτη περίπτωση η αντιστοιχία μεταξύ ψ και z (άρα και η αντιστοιχία μεταξύ γ και z) είναι αμφιμονοσήμαντη, ενώ στην δεύτερη όχι, διότι υπάρχουν τιμές του z που αντιστοιχούν σε περισσότερες από μία τιμές ψ . Στο παραπάνω σχήμα σημειώνεται ειδικότερα το τμήμα της ορατής περιοχής που «διανύεται» δύο φορές από το σημείο z .

Η (7.1.2) δείχνει ειδικότερα ότι το μέτρο του παράγοντα διάταξης, το οποίο ως γνωστόν προσδιορίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας, δίνεται γεωμετρικά από το γινόμενο των αποστάσεων του εκάστοτε σημείου z από τις ρίζες του πολωνύμου πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Επομένως, οι ρίζες z_m του πολωνύμου αντιστοιχούν σε γωνίες (έστω γ_m) μηδενισμού της ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας (διότι μηδενίζεται ο παράγοντας διάταξης), και κατά συνέπεια μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών θα εμφανίζεται ένας λοβός του διαγράμματος ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας. Οι περιοχές του κύκλου κοντά στις ρίζες z_m αντιστοιχούν σε μικρές τιμές του μέτρου $|S(z)|$, άρα και του $|S(\gamma)|$, επειδή εκεί οι παράγοντες $|z - z_m|$ του γινομένου της (7.1.2) έχουν μικρές τιμές, ενώ οι περιοχές μακριά από τις ρίζες αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του μέτρου $|S(\gamma)|$ του παράγοντα διάταξης. Αυτό μπορεί ισοδύναμα να διατυπωθεί και ως εξής: Οι περιοχές

όπου οι ρίζες του πολωνύμου είναι αραιά τοποθετημένες αντιστοιχούν σε λοβούς μεγάλου μεγέθους, ενώ εκεί όπου είναι πυκνά τοποθετημένες υπάρχουν μικροί λοβοί. Προφανώς αυτό σημαίνει ότι ο κύριος λοβός αναμένεται να εμφανισθεί μεταξύ των δύο πιο απομακρυσμένων ριζών, ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί μεταξύ των άλλων ριζών του πολωνύμου. Όμως, από την άλλη πλευρά, όσο περισσότερο απομακρύνονται οι δύο ρίζες μεταξύ τους τόσο ανοίγει το εύρος του λοβού και αυτό τείνει να *μειώσει** την κατευθυντικότητα. Επιπροσθέτως, εκτός από το ύψος και το εύρος του κύριου λοβού πρέπει να ληφθεί υπόψη και το ύψος των πλευρικών λοβών το οποίο κατά γενικό κανόνα είναι επιθυμητό να μειώνεται, δεν είναι όμως αυτονόητο ότι αυτό θα συμβεί συγχρόνως με την αύξηση του κύριου λοβού. Όλα αυτά υπενθυμίζουν τον γενικό κανόνα που προαναφέρθηκε, ότι κατά την σχεδίαση στοιχειοκεραίας (όπως και κάθε άλλη πρακτική σχεδίαση) είναι αναπόφευκτο να γίνονται συμβιβασμοί, υπό την έννοια ότι δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη βελτίωση όλων των σχετικών παραμέτρων, και για τον λόγο αυτό άλλωστε υπάρχουν σε χρήση περισσότερες από μία μέθοδοι.

Οι παραπάνω συλλογισμοί μπορεί να διευκρινισθούν με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας $M = 8$ στοιχείων με $\delta = 0$ (δηλ. με όλα τα στοιχεία της τροφοδοτούμενα από συμφασικά ρεύματα, η οποία κατά τα προηγούμενα είναι μετωπική). Το Σχ. 7.2 που ακολουθεί δείχνει την τοποθέτηση των ριζών του πολωνύμου $S(z)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο για τρεις περιπτώσεις ορατής περιοχής.



Σχ. 7.2: Οι ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία με $M = 8$, $\delta = 0$ και $d = \lambda/4$, $\lambda/2$ και λ

Για τη στοιχειοκεραία αυτή, το πολωνύμο $S(z)$ δίνεται από την (6.2.6) στη μορφή

$$S(z) = A \sum_{m=0}^{7} z^m = A \frac{z^8 - 1}{z - 1}$$

και κατά συνέπεια οι ρίζες του πολωνύμου είναι οι μιγαδικές ρίζες 8^{ης} τάξης της μονάδας εκτός από την $z = 1$ διότι αυτή αναιρείται από την αντίστοιχη ρίζα του παρονομαστή. Οι

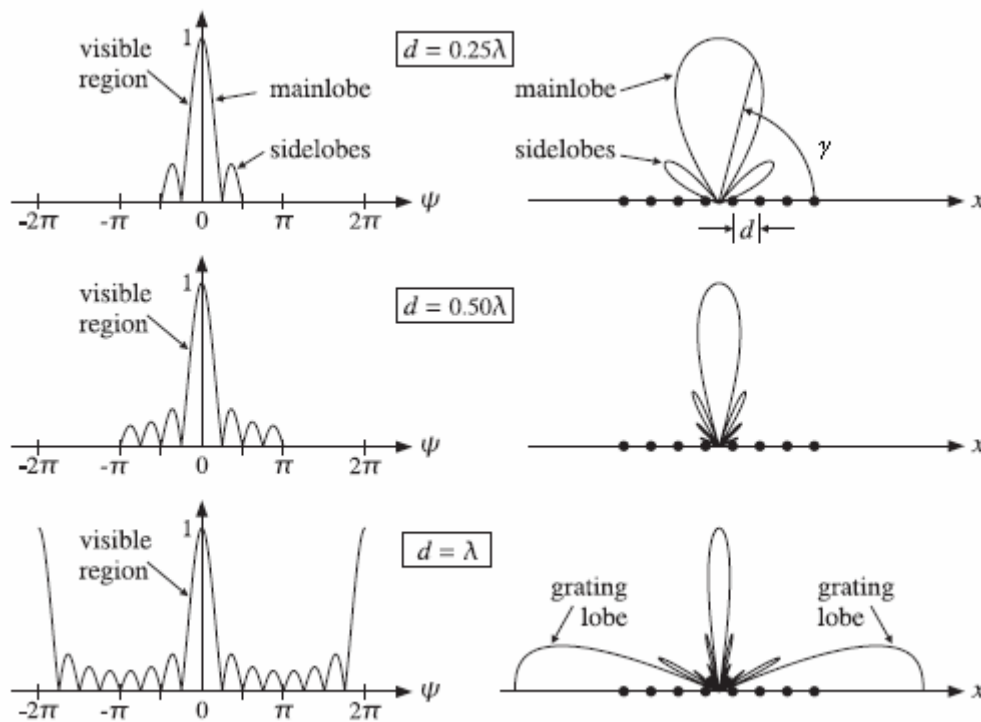
* Βλ. σχετικά και την προσεγγιστική σχέση (4.2.10) η οποία βέβαια ισχύει για κεραιές με μεγάλο κύριο λοβό και αμελητέους δευτερεύοντες, υποδεικνύει όμως έναν γενικό ποιοτικό κανόνα.

ρίζες αυτές δίνονται (κατά τα γνωστά) από την

$$z_m = e^{j\psi_m} = e^{jm2\pi/8} = e^{jm\pi/4} \quad m = 1, 2, \dots, 7 \quad (7.1.4)$$

όπως φαίνονται και γεωμετρικά στο Σχ. 7.2. Στην πρώτη περίπτωση ($d = \lambda/4 \Rightarrow kd = \pi/2$) η ορατή περιοχή είναι $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ και καταλαμβάνει ένα ημικύκλιο, στη δεύτερη (όπου $kd = \pi$) καταλαμβάνει ολόκληρο τον μοναδιαίο κύκλο και στην τρίτη περίπτωση ($kd = 2\pi$) καλύπτει τον μοναδιαίο κύκλο δύο φορές.

Από την άλλη πλευρά, ο παράγοντας διάταξης της συγκεκριμένης στοιχειοκεραίας (κανονικοποιημένος στη μέγιστη τιμή του), όπως προκύπτει αναλυτικά με τη μέθοδο της παραγρ. 6.2.2, φαίνεται στο Σχ. 7.3 που ακολουθεί.



Σχ. 7.3: Μέτρο του κανονικοποιημένου παράγοντα διάταξης (στο τετράγωνο) σε καρτεσιανή μορφή $(|S(\psi)|/AM)^2$ και πολική $(|S(\gamma)|/AM)^2$ για την ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία του Σχ. 7.2 ($M = 8$, $\delta = 0$ και $d = \lambda/4$, $\lambda/2$ και λ)

Από τα παραπάνω διαγράμματα επιβεβαιώνονται οι προηγούμενες γενικές παρατηρήσεις για τη συμπεριφορά του του μέτρου $|S(z)|$ σε σχέση με τη θέση των ριζών πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Ο κύριος λοβός βρίσκεται γύρω από το σημείο $z = 0$ (το οποίο αντιστοιχεί στο μέγιστο ή τα μέγιστα, που ουσιαστικά αντιπροσωπεύουν επανεμφάνιση του ίδιου μεγίστου), όπου δεν υπάρχει ρίζα και έχουμε την πιο «αραιή» τοποθέτηση των ριζών. Οι δευτερεύοντες λοβοί βρίσκονται σε περιοχές όπου η τοποθέτηση των ριζών είναι πυκνότερη, ενώ οι μηδενισμοί αντιστοιχούν προφανώς στις θέσεις των ριζών. Παρατηρούμε επίσης ότι όσο περισσότερες ρίζες βρίσκονται εντός της ορατής περιοχής,

τόσο περισσότεροι είναι οι λοβοί του διαγράμματος, οι οποίοι συγχρόνως γίνονται στενότεροι (μικρότερου εύρους).

Οι παρατηρήσεις αυτές αναδεικνύουν τον καθοριστικό ρόλο που παίζουν οι ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ στη συμπεριφορά της στοιχειοκεραίας. Η θεωρία σχεδίασης στοιχειοκεραίων που ακολουθεί αναφέρεται κατά μεγάλο μέρος της στην κατάλληλη τοποθέτηση των ριζών αυτών πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

7.1.3. Ειδικές περιπτώσεις: Διωνυμική και τριγωνική στοιχειοκεραία

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις ήδη υποδεικνύουν τον τρόπο σχεδιασμού ορισμένων ειδικών στοιχειοκεραίων με κάποια πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, προκειμένου να σχεδιασθεί στοιχειοκεραία χωρίς πλευρικούς λοβούς αρκεί να τοποθετηθούν όλες οι ρίζες του πολωνύμου εκτός της ορατής περιοχής (ή το πολύ να υπάρχουν δύο ρίζες ακριβώς στα άκρα αυτής). Προκειμένου για μετωπική στοιχειοκεραία όπου $\delta = 0$ και η ορατή περιοχή είναι $-kd \leq \psi \leq kd$ (συμμετρική περί το σημείο $z = 0$), προφανώς ο ασφαλέστερος τρόπος να επιτευχθεί αυτό (αρκεί το εύρος της ορατής περιοχής να είναι $kd \leq \pi$ δηλ. $d \leq \lambda/2$) είναι να τοποθετηθούν όλες οι $(M - 1)$ ρίζες του πολωνύμου στη θέση $z = -1$, δηλ. $z_1 = z_2 = \dots = z_{M-1} = -1$. Το ίδιο ισχύει προφανώς και για μη μετωπική στοιχειοκεραία ($\delta \neq 0$) αρκεί το σημείο $z = -1$ να είναι εκτός της ορατής περιοχής $\delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$. Τότε προκύπτει η λεγόμενη διωνυμική στοιχειοκεραία (binomial array), με παράγοντα διάταξης

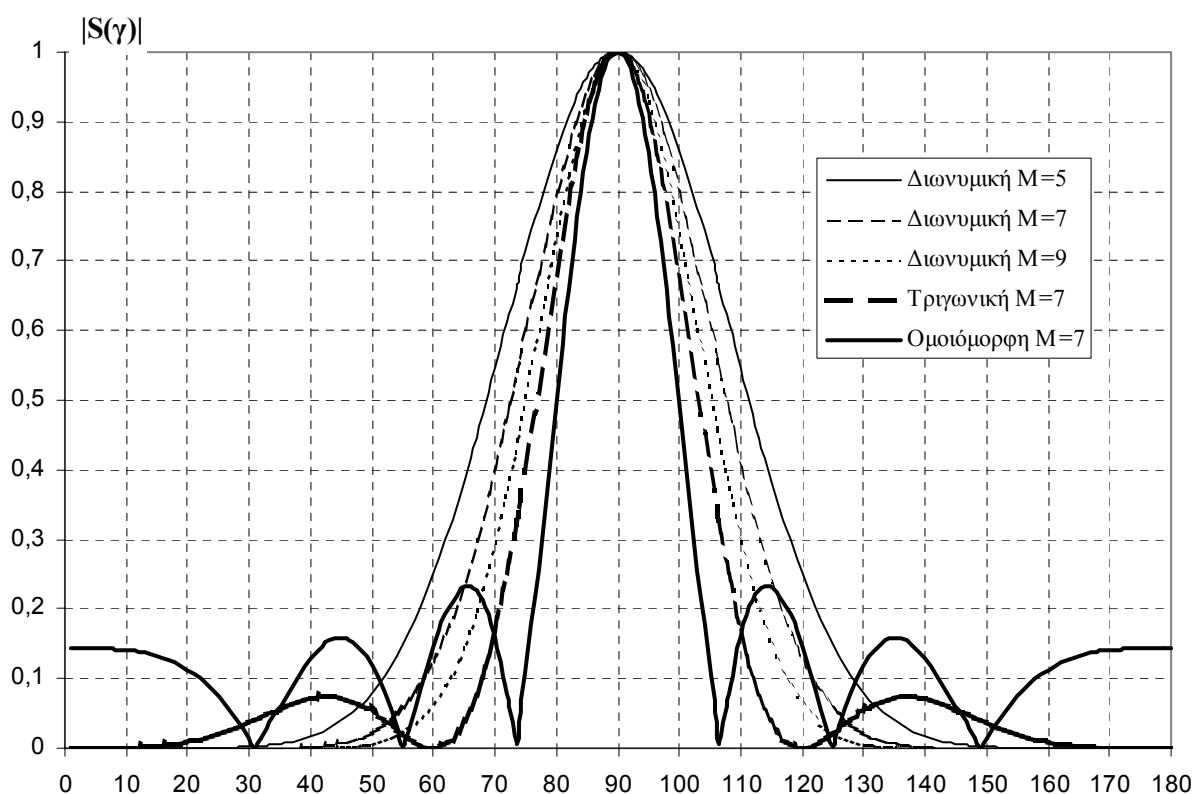
$$S(z) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m z^m = A(1+z)^{M-1} = A \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(M-1)!}{m!(M-1-m)!} z^m \quad (7.1.5)$$

όπου A κάποια σταθερά. Οι ρευματικοί συντελεστές της στοιχειοκεραίας αυτής δίνονται από τους γνωστούς διωνυμικούς συντελεστές (σε αυτό οφείλεται και η ονομασία της), προφανώς λοιπόν είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, και άρα η στοιχειοκεραία αυτή είναι ανομοιόμορφη, αλλά τα ρεύματα τροφοδοσίας είναι συμφασικά (αφού είναι όλοι πραγματικοί).

Όπως προαναφέρθηκε, ο παράγοντας διάταξης της διωνυμικής στοιχειοκεραίας έχει μόνο έναν λοβό, ο οποίος εκτείνεται σε όλη την περιοχή γωνιών $0 \leq \gamma \leq \pi$, πράγμα όμως που τείνει να μειώσει την κατευθυντικότητα (σύμφωνα και με προηγούμενα σχόλια, μπορούμε να θεωρούμε ότι αυτό είναι το «αντίτιμο» για την εξαφάνιση των πλευρικών λοβών). Για να βελτιωθεί η κατευθυντικότητα θα πρέπει να μειωθεί το εύρος δέσμης -3 dB του λοβού, πράγμα που σε κάποιο βαθμό επιτυγχάνεται αυξάνοντας τον αριθμό των στοιχείων της,

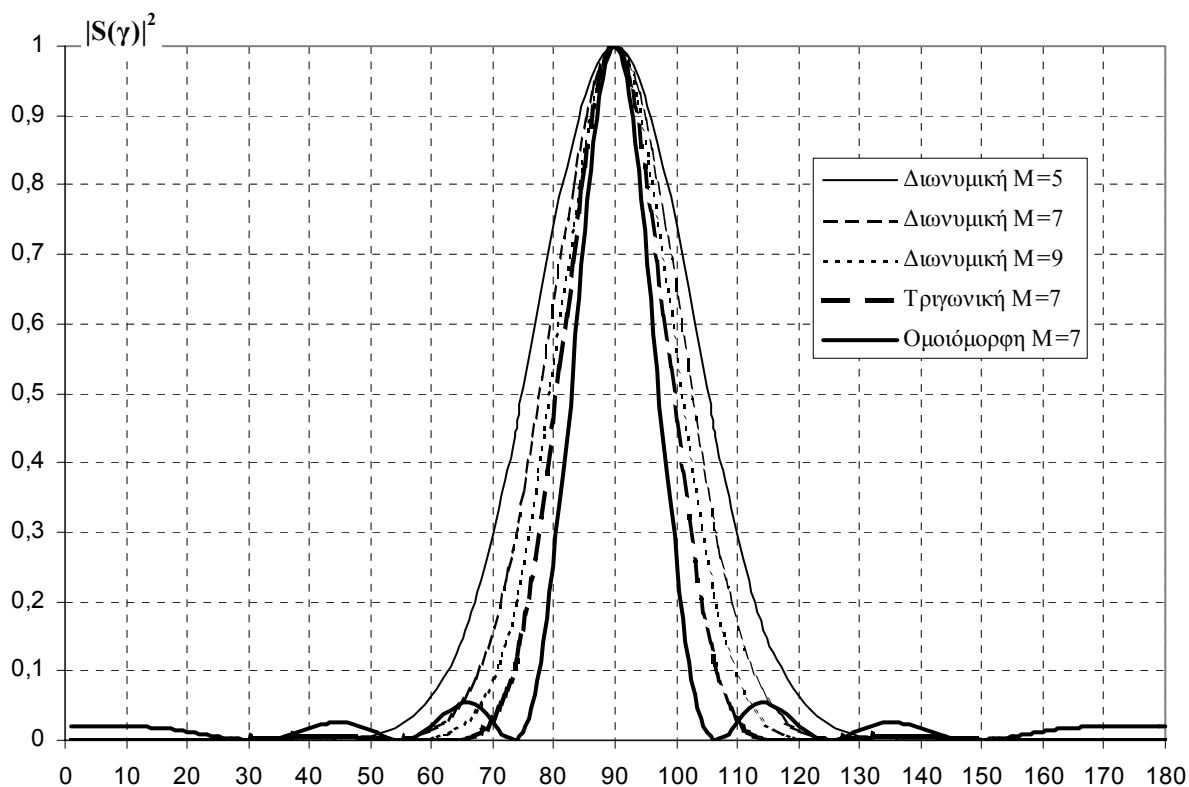
αλλά για μεγάλα πλήθη στοιχείων οι ρευματικοί συντελεστές παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις* και προκύπτουν δυσκολίες στην ορθή τροφοδοσία της κεραίας.

Ως ενδεικτικό παράδειγμα, στο Σχ. 7.4α και 7.4β που ακολουθούν απεικονίζονται οι κανονικοποιημένοι (σε σχέση με τη μέγιστη τιμή τους) παράγοντες διάταξης $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ για διωνυμικές στοιχειοκεραίες με $M = 7, 8$ και 9 στοιχεία, ενώ για σύγκριση φαίνεται και ο παράγοντας διάταξης για ομοιόμορφη στοιχειοκεραία 7 στοιχείων. Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε $kd = \pi$ και διαφορά φάσης $\delta = 0$. Από το σχήμα γίνεται εμφανές ότι η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία πλεονεκτεί ως προς την κατευθυντικότητα, ενώ το πλεονέκτημα της διωνυμικής στοιχειοκεραίας έγκειται στην απουσία πλευρικών λοβών.



Σχ. 7.4α: Ο κανονικοποιημένος παράγοντας διάταξης $|S(\gamma)|$ για ομοιόμορφη, διωνυμική και τριγωνική στοιχειοκεραία (με $\delta = 0$ και $d = \lambda/2$).

* Π.χ. για $M - 1 = 7$ οι διωνυμικοί συντελεστές είναι: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Για $M - 1 = 8$ είναι: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, δηλ. το μεγαλύτερο ρεύμα τροφοδοσίας είναι 70-πλάσιο από το μικρότερο.



Σχ. 7.4β: Ο κανονικοποιημένος παράγοντας διάταξης $|S(\gamma)|^2$ για τις στοιχειοκεραίες του Σχ. 7.4α.

Όπως παρατηρείται επίσης από το σχήμα, η κατευθυντικότητα της διωνυμικής στοιχειοκεραίας τείνει να αυξάνεται με την αύξηση του πλήθους των στοιχείων της.

Στα Σχ. 7.4α-β παρουσιάζεται επίσης μια ενδιαμέση περίπτωση στοιχειοκεραίας, η λεγόμενη στοιχειοκεραία **τριγωνικής κατανομής**, η οποία δίνεται από την

$$\begin{aligned}
 S(z) &= \left(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}\right)^2 = \\
 &= 1 + 2z + 3z^2 + \dots + (n-1)z^{n-2} + nz^{n-1} + (n-1)z^n + \dots + 2z^{2n-3} + z^{2n-2} \quad (7.1.6)
 \end{aligned}$$

όπου $M = 2n - 1$ (δηλ. εξ ορισμού το πλήθος των στοιχείων της είναι περιττό) και προφανώς στην αρχή μπορεί να τεθεί επίσης και οποιαδήποτε πολλαπλασιαστική σταθερά. Από το πρώτο τμήμα της (7.1.6) παρατηρούμε ότι η στοιχειοκεραία αυτή έχει τις ίδιες ρίζες με μια ομοιόμορφη στοιχειοκεραία με το μισό περίπου ($n = [M+1]/2$) πλήθος στοιχείων αλλά οι ρίζες αυτές είναι **διπλές** (δηλ. έχουν πολλαπλότητα 2). Όπως φαίνεται και από το Σχ. 7.4, η στοιχειοκεραία τριγωνικής κατανομής έχει ιδιότητες ανάμεσα σε αυτές της ομοιόμορφης και της διωνυμικής, τόσο ως προς την κατευθυντικότητα όσο και ως προς το ύψος πλευρικών λοβών, δηλ. έχει κατευθυντικότητα μεγαλύτερη από αυτή της διωνυμικής στοιχειοκεραίας και ύψος πλευρικών λοβών μικρότερο από της ομοιόμορφης.

7.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SCHELKUNOFF

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία παρουσιάζει μεγαλύτερη κατευθυντικότητα τόσο ως προς την διωνυμική όσο και ως προς την τριγωνική στοιχειοκεραία. Ως γενικότερος κανόνας μπορεί να αποδειχθεί ότι, για δεδομένο αριθμό στοιχείων M , η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία αποδίδει την μεγαλύτερη κατευθυντικότητα από όλες τις στοιχειοκεραίες με συμφασικούς ρευματικούς συντελεστές A_m (π.χ. όλα τα A_m θετικούς πραγματικούς αριθμούς, όπως είναι και οι προαναφερθείσες). Ο κανόνας αυτός βρέθηκε από τον Schelkunoff, ο οποίος περαιτέρω απέδειξε (προτείνοντας και την μέθοδο σχεδίασης που πήρε το όνομά του) ότι αν τα ρεύματα τροφοδοσίας δεν είναι συμφασικά (δηλ. οι συντελεστές A_m έχουν μιγαδικές τιμές και διαφορετικές φάσεις), τότε είναι δυνατόν να επιτευχθούν μεγαλύτερες κατευθυντικότητες από την ομοιόμορφη. Στοιχειοκεραίες με την ιδιότητα αυτή ονομάζονται υπερκατευθυντικές (superdirective ή supergain arrays).

Η μέθοδος του Schelkunoff βασίζεται στην τοποθέτηση των ριζών στον μοναδιαίο κύκλο σε τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται μικρό εύρος για τον κύριο λοβό, και άρα αυξημένη κατευθυντικότητα. Για να επιτευχθεί αυτό οι ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ τοποθετούνται όλες εντός της ορατής περιοχής (η οποία κατά κανόνα είναι μικρότερη από τον πλήρη κύκλο, δηλ. μικρότερη από 2π) και κατανέμονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Στη συνέχεια από την παραγοντική μορφή της (7.1.1) εκτελώντας τις πράξεις μπορούν να προσδιορισθούν οι συντελεστές του πολωνύμου, δηλ. οι ρευματικοί συντελεστές της στοιχειοκεραίας.

Για την ακρίβεια, ο Schelkunoff απέδειξε ότι με κατάλληλη τοποθέτηση των ριζών εντός της ορατής περιοχής, *όχι κατανάγκην σε ισαπέχουσες θέσεις*, είναι δυνατόν να επιτευχθεί οσοδήποτε μεγάλη κατευθυντικότητα (σε γενικές γραμμές χρειάζεται αύξηση του πλήθους M των στοιχείων, μείωση του βήματος d και άρα της ορατής περιοχής και τοποθέτηση των ριζών εντός αυτής σχετικά αραιά εκεί που θέλουμε μεγάλες τιμές του παράγοντα διάταξης και σχετικά πυκνά αλλού). Αυτή θεωρείται η γενικότερη μορφή της μεθόδου Schelkunoff, ωστόσο στην πράξη δεν είναι εφικτό να επιτευχθεί αυθαίρετα μεγάλη κατευθυντικότητα διότι τα απαιτούμενα ρεύματα τροφοδοσίας προκύπτουν από τη σχεδίαση με πολύ μεγάλες τιμές αλλά διαφορές φάσης πολύ κοντά στις 180° , οπότε σχεδόν αλληλοαναιρούνται*. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι τα επιμέρους στοιχεία της στοιχειοκεραίας εκπέμπουν

* Στη βιβλιογραφία αναφέρονται παραδείγματα (θεωρητικού) σχεδιασμού τέτοιων στοιχειοκεραιών, πολύ μεγάλης κατευθυντικότητας, για τις οποίες προκύπτουν απαιτούμενα επιμέρους ρεύματα τροφοδοσίας εκατομμυρίων A αλλά με «καθαρό» αλγεβρικό άθροισμά τους (ολικό ρεύμα της στοιχειοκεραίας) λίγα mA!

(το καθένα από μόνο του) ισχυρότατα κύματα, τα οποία στο μακρινό πεδίο (φροντίζουμε να) συμβάλλουν ενισχυτικά στην κατεύθυνση μεγίστου και γύρω από αυτή, και αναιρετικά αλλού. Όμως στο εγγύς πεδίο δημιουργούν ισχυρότατα στάσιμα (ή περίπου στάσιμα) κύματα που εμπεριέχουν την άεργη ισχύ της κεραίας η οποία είναι πολύ μεγάλη. Η κατάσταση αυτή θυμίζει ένα (παράλληλο) κύκλωμα συντονισμού RLC στο οποίο ο πυκνωτής και το πηνίο μπορούν να έχουν πολύ μεγάλα ρεύματα, τα οποία όμως παρουσιάζουν διαφορά φάσης 180° και αλληλοαναιρούνται, και άρα το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος είναι το (πολύ μικρότερο) ρεύμα του ωμικού στοιχείου R που προσδιορίζει και την ισχύ στο κύκλωμα, ενώ τα μεγάλα ρεύματα των L και C αντιπροσωπεύουν μόνο άεργη ισχύ. Κατά ανάλογο τρόπο, από κυκλωματική άποψη, τα μεγάλα και σχεδόν αλληλοαναιρούμενα ρεύματα τροφοδοσίας των επιμέρους στοιχείων μιας τέτοιας στοιχειοκεραίας είναι υπεύθυνα για την άεργη ισχύ, και δημιουργούν επίσης στην πράξη μεγάλες απώλειες (οι κεραίες δεν μπορούν να έχουν άπειρη αγωγιμότητα), ενώ το μικρό αλγεβρικό άθροισμα αυτών είναι το συνολικό ρεύμα της στοιχειοκεραίας και αντιστοιχεί στην ολική εκπεμπόμενη ισχύ αυτής. Συμπερασματικά, είναι θεωρητικά δυνατόν να επιτύχουμε «απεριόριστη» κατευθυντικότητα αλλά με πολύ μικρή εκπεμπόμενη ισχύ και πολύ μεγάλες απώλειες, και επίσης ανυπέρβλητες πρακτικές δυσκολίες στην τροφοδοσία της στοιχειοκεραίας.

Για τους λόγους αυτούς, η γενικότερη μορφή της μεθόδου Schelkunoff έχει περιορισμένη πρακτική αξία. Χρήσιμες στην πράξη είναι κυρίως οι στοιχειοκεραίες με ισαπέχουσες ρίζες του πολωνύμου $S(z)$, τις οποίες κατά κανόνα δηλώνει ο όρος στοιχειοκεραίες Schelkunoff που με αυτή τη σημασία θα χρησιμοποιηθεί και εδώ*.

Για την εφαρμογή της μεθόδου, πρώτα επιλέγεται (π.χ. με διαδοχικές δοκιμές ή με βάση δεδομένους πρακτικούς περιορισμούς) το πλήθος M των στοιχείων και το εύρος της ορατής περιοχής. Οι $(M-1)$ το πλήθος ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ τοποθετούνται, όπως προαναφέρθηκε, σε ισαπέχουσες θέσεις εντός της ορατής περιοχής, δηλ. σε θέσεις του μοναδιαίου κύκλου που διαδοχικά μεταξύ τους μεσολαβεί γωνία

$$\Delta\psi = \frac{2kd}{M}$$

αφού $2kd$ είναι το συνολικό εύρος της ορατής περιοχής (από $\delta - kd$ ως $\delta + kd$).

* Η μέθοδος Schelkunoff (με ελαφρά τροποποίηση) μπορεί να εφαρμοσθεί και στην πρακτική περίπτωση όπου απαιτείται μηδενισμός της ακτινοβολίας σε κάποιες διευθύνσεις δεδομένες εκ των προτέρων (π.χ. για να αποφευχθούν οι παρεμβολές σε συγκεκριμένα συστήματα που υπάρχουν εκεί). Τότε τοποθετούνται εξαρχής ισάριθμες ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ στις διευθύνσεις αυτές και οι υπόλοιπες ρίζες ισοκατανέμονται (κατά το δυνατόν) εντός της ορατής περιοχής.

Ως «εναρκτήριο» σημείο του μοναδιαίου κύκλου από το οποίο ξεκινά η τοποθέτηση των διαδοχικών ριζών (αλλά σε αυτό το ίδιο δεν τοποθετείται ρίζα) μπορεί να ληφθεί το σημείο που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας. Π.χ. για αξονική στοιχειοκεραία με μέγιστο στην κατεύθυνση $\gamma = 0$ λαμβάνουμε (κατά τα γνωστά) $kd = -\delta$, οπότε η ορατή περιοχή εκτείνεται από 0 ως $-2kd$ και καταλαμβάνει ένα τμήμα του κάτω ημικυκλίου του μοναδιαίου κύκλου με αρχή το σημείο $\psi = 0$. Στην κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας $\gamma = 0$ ισχύει $\psi = kd \cos\gamma + \delta = kd + \delta = 0$, δηλ. η κατεύθυνση αυτή αντιστοιχεί ακριβώς στο σημείο $\psi = 0$ που είναι το «εναρκτήριο» σημείο. Ξεκινώντας από αυτό λαμβάνουμε διαδοχικές γωνιακές αποστάσεις $\Delta\psi = 2kd / M$ οι οποίες προσδιορίζουν τις θέσεις των ριζών στον μοναδιαίο κύκλο.

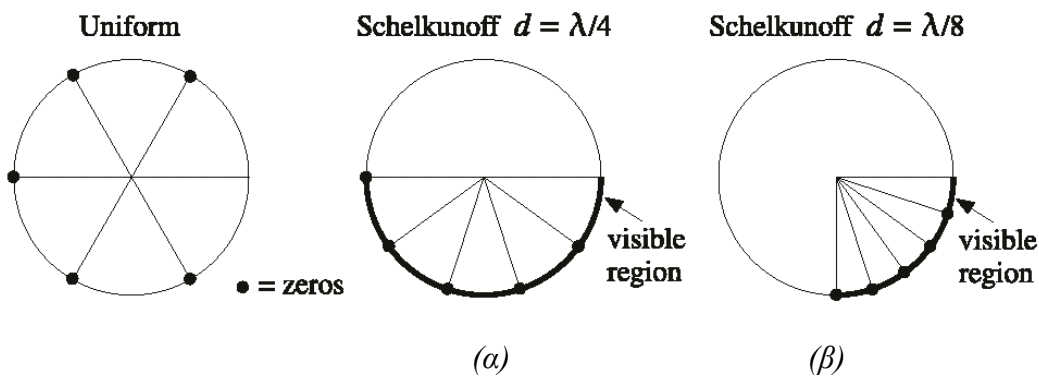
Για παράδειγμα, προκειμένου να σχεδιασθεί αξονική στοιχειοκεραία $M = 6$ στοιχείων με βήμα $d = \lambda/4$ (δηλ. $kd = \pi/2$) πρέπει οι 5 ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ να τοποθετηθούν στον μοναδιαίο κύκλο. Ξεκινάμε από το σημείο $\psi = 0$ (στο οποίο δεν τοποθετείται ρίζα διότι αντιστοιχεί σε μέγιστο και όχι σε μηδενισμό) και τοποθετούμε τις ρίζες διαδοχικά ανά γωνιακές αποστάσεις $\Delta\psi = 2kd / 5 = \pi/5$ (δηλ. ανά 36°). Έτσι προκύπτουν οι ρίζες

$$z_m = e^{j\psi_m} = e^{-jm\pi/5} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5$$

ενώ για βήμα $d = \lambda/8$ (δηλ. $kd = \pi/4$) έχουμε $\Delta\psi = \pi/10$ (δηλ. ανά 18°) και ρίζες

$$z_m = e^{j\psi_m} = e^{-jm\pi/10} \quad m = 1, 2, 3, 4, 5$$

Οι θέσεις των ριζών για τις δύο αυτές περιπτώσεις φαίνονται στο Σχ. 7.5 που ακολουθεί, όπου για σύγκριση φαίνονται και οι ρίζες αντίστοιχης ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας.



Σχ. 7.5: Οι ρίζες του πολωνύμου $S(z)$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο για σχεδίαση στοιχειοκεραίας κατά Schelkunoff με $M = 6$ και $\delta = -kd$
 (α) για $d = \lambda/4$ (β) για $d = \lambda/8$

Στην αντίστοιχη περίπτωση μετωπικής στοιχειοκεραίας ($\delta = 0$) η ορατή περιοχή εκτείνεται από $-kd$ ως kd , δηλ. από $-\pi/2$ ως $\pi/2$ (για $d = \lambda/4$) ή από $-\pi/4$ ως $\pi/4$ (για $d = \lambda/4$) και η κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας είναι $\gamma = \pi/2$, οπότε το «εναρκτήριο» σημείο προκύπτει από την $\psi = kd \cos\gamma + \delta = \delta = 0$. Ξεκινώντας από αυτό οι ρίζες τοποθετούνται

και πάλι ανά $\pi/5$ (δηλ. ανά 36°) και μπορούν να λάβουν τις θέσεις

$$z_m = e^{j\psi_m} = e^{\pm j\pi/10 + jm\pi/5} \text{ με } m = -2, -1, 0, 1, 2$$

όπου οι δύο περιπτώσεις (\pm) αντιστοιχούν σε τοποθέτηση της μίας ακραίας ρίζας είτε στη θέση $-\pi/2$ είτε στη θέση $\pi/2$. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν δύο ρίζες εκατέρωθεν του «εναρκτήριου» σημείου $\psi = 0$ οι οποίες ισαπέχουν από αυτό κατά γωνίες 18° . (Ως άσκηση σχεδιάστε τις ρίζες πάνω στον μοναδιαίο κύκλο).

Αφού προσδιορισθούν με τον τρόπο αυτό οι ρίζες, απομένει να προσδιορισθούν οι ρευματικοί συντελεστές των στοιχείων της στοιχειοκεραίας, δηλ. οι συντελεστές A_m του πολυωνύμου $S(z)$. Αυτό μπορεί να γίνει με πολύ απλό (μεθοδολογικά) τρόπο επειδή γνωρίζοντας τις ρίζες έχουμε διαθέσιμη την παραγοντική μορφή του πολυωνύμου, όπως στην (5.4.1), εκτός από τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή A_{M-1} :

$$S(z) = A_{M-1}(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{M-1}) \Leftrightarrow \frac{S(z)}{A_{M-1}} = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{M-1}) \quad (7.2.1)$$

Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό διωνύμων και συγκεντρώνοντας τους όρους κοινού βαθμού ως προς z , το πολυώνυμο έρχεται στη συνήθη μορφή

$$\frac{S(z)}{A_{M-1}} = z^{M-1} + \frac{A_{M-2}}{A_{M-1}} z^{M-2} + \dots + \frac{A_m}{A_{M-1}} z^m + \dots + \frac{A_1}{A_{M-1}} z + \frac{A_0}{A_{M-1}}$$

από την οποία προκύπτουν αμέσως οι κανονικοποιημένοι συντελεστές (A_m / A_{M-1}) που είναι απλώς οι συντελεστές των όρων z^m . Οι συντελεστές αυτοί προσδιορίζουν τον παράγοντα διάταξης $S(z)$, άρα και τον $S(\psi)$ και στη συνέχεια τον $S(\gamma)$, κανονικοποιημένους ως προς τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή A_{M-1} . Επομένως προσδιορίζουν πλήρως τη μορφή της συνάρτησης $|S(\psi)|$ ή $|S(\gamma)|$ (λοβούς, μηδενισμούς, εύρος δέσμης, κατευθυντικότητα κτλ.), επομένως και τη μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας. Από τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή A_{M-1} εξαρτάται μόνο το μέγεθος του παράγοντα διάταξης και του διαγράμματος ακτινοβολίας, δηλ. η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς της στοιχειοκεραίας. Με άλλα λόγια, εφόσον προσδιορισθούν οι κανονικοποιημένοι συντελεστές (A_m / A_{M-1}), έχει λυθεί πλήρως το πρόβλημα σχεδίασης της στοιχειοκεραίας το οποίο αναφέρεται σε μορφολογικά στοιχεία του διαγράμματος ακτινοβολίας αυτής (π.χ. επιθυμητή κατευθυντικότητα, εύρος δέσμης, στάθμη πλευρικών λοβών). Η συνολική ακτινοβολούμενη ισχύς της είναι μια ξεχωριστή απαίτηση η οποία μπορεί να ικανοποιηθεί απλώς πολλαπλασιάζοντας με τον κατάλληλο συντελεστή A_{M-1} .

Ενδεικτικά, για το παραπάνω παράδειγμα αξονικής στοιχειοκεραίας Schelkunoff με πλήθος στοιχείων $M = 6$ και βήμα $d = \lambda/4$, από τις προαναφερόμενες ρίζες η παραγοντική

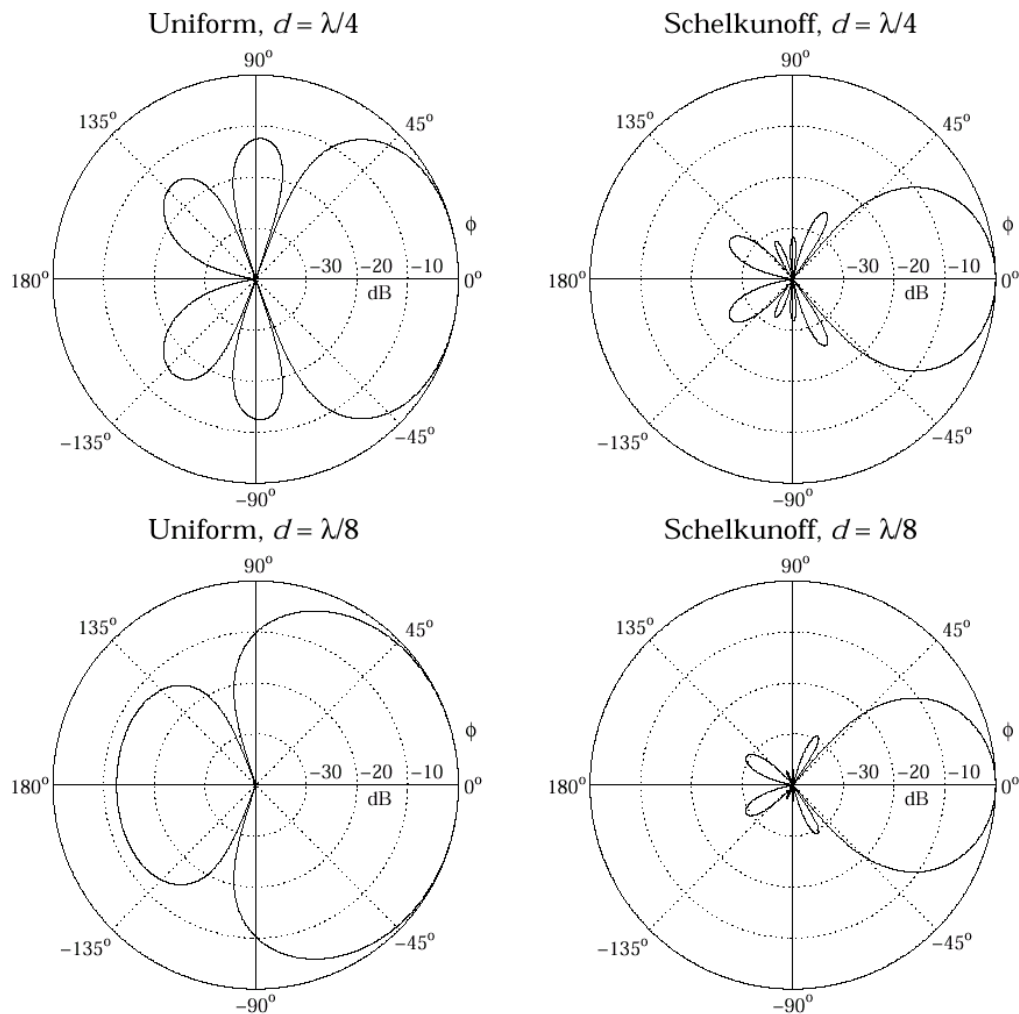
μορφή του κανονικοποιημένου παράγοντα διάταξης $S(z) / A_{M-1}$ είναι

$$S(z)/A_5 = (z - e^{-j\pi/5})(z - e^{-j2\pi/5})(z - e^{-j3\pi/5})(z - e^{-j4\pi/5})(z - e^{-j\pi}) = z^5 + \frac{A_4}{A_5}z^4 + \frac{A_3}{A_5}z^3 + \frac{A_2}{A_5}z^2 + \frac{A_1}{A_5}z + \frac{A_0}{A_5}$$

από όπου με εκτέλεση των γινομένων των 5 διωνύμων βρίσκονται οι κανονικοποιημένοι συντελεστές (A_4 / A_5) , (A_3 / A_5) , (A_2 / A_5) , (A_1 / A_5) , (A_0 / A_5) . Εντελώς αντίστοιχα για το παράδειγμα με βήμα $d = \lambda/8$ χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$S(z)/A_5 = (z - e^{-j\pi/10})(z - e^{-j2\pi/10})(z - e^{-j3\pi/10})(z - e^{-j4\pi/10})(z - e^{-j\pi/5})$$

Οι κανονικοποιημένοι παράγοντες διάταξης $|S(\gamma)|^2$ για τα δύο προηγούμενα παραδείγματα αξονικών στοιχειοκεραιών Schelkunoff απεικονίζονται σε πολική μορφή στο Σχ. 7.6.



Σχ. 7.6: Πολικά διαγράμματα του κανονικοποιημένου παράγοντα διάταξης $|S(\gamma)|^2$ για στοιχειοκεραίες Schelkunoff με $M = 6$, $\delta = -kd$ και $d = \lambda/4$, $d = \lambda/8$, καθώς και τις αντίστοιχες ομοίμορφες στοιχειοκεραίες

Όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα, η μέθοδος Schelkunoff οδηγεί σε μεγαλύτερη κατευθυντικότητα, μικρότερο εύρος δέσμης κύριου λοβού και χαμηλότερη στάθμη πλευρικών λοβών σε σύγκριση με την αντίστοιχη ομοιόμορφη στοιχειοκεραία. Το πλήθος των λοβών είναι (προφανώς) μεγαλύτερο στην στοιχειοκεραία Schelkunoff επειδή όλες οι ρίζες του παράγοντα διάταξης είναι εντός της ορατής περιοχής.

7.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ CHEBYSHEV

7.3.1. Γενικά

Όπως είδαμε, η μέθοδος Schelkunoff είναι κατεξοχήν κατάλληλη για την σχεδίαση στοιχειοκεραιών υψηλής κατευθυντικότητας, δεν δίνει όμως το βέλτιστο αποτέλεσμα ως προς τη στάθμη των πλευρικών λοβών. Ενδεικτικά στο προηγούμενο παράδειγμα της αξονικής στοιχειοκεραίας Schelkunoff με $d = \lambda/4$ μπορούμε να παρατηρήσουμε από το Σχ. 7.6 ότι ο δεύτερος λοβός (πρώτος πλευρικός) είναι και ο μεγαλύτερος από τους δευτερεύοντες (πλευρικούς) λοβούς και βρίσκεται μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης ρίζας του $S(z)$ του Σχ. 7.5α. Αν η δεύτερη ρίζα μετακινηθεί προς τα δεξιά στο Σχ. 7.5α (πλησιάζοντας την πρώτη), τότε ο δεύτερος λοβός μικραίνει (πράγμα επιθυμητό) και ο τρίτος μεγαλώνει (πράγμα που δεν δημιουργεί πρόβλημα διότι είναι πολύ μικρός), και κατά συνέπεια αυτό βελτιώνει τη συμπεριφορά των πλευρικών λοβών του διαγράμματος. Αντίστοιχα ο πέμπτος λοβός του διαγράμματος αυτού (επίσης μεγάλος) μπορεί να μειωθεί μετακινώντας την τέταρτη ρίζα (βλ. το Σχ. 7.5α) προς τα αριστερά, με «αντάλλαγμα» την αύξηση του τέταρτου λοβού που είναι πολύ μικρός. Η συλλογιστική αυτή δείχνει γενικά ότι η μέθοδος Schelkunoff επιδέχεται βελτίωση ως προς τη στάθμη των πλευρικών λοβών, και ειδικότερα ότι η βελτίωση αυτή συνίσταται στη μείωση των μεγάλων πλευρικών λοβών, η οποία αναγκαστικά επιφέρει και αύξηση των μικρών. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι οι δυνατότητες βελτίωσης εξαντλούνται, δηλ. επιτυγχάνεται η βέλτιστη κατάσταση, όταν τα ύψη (στάθμες) των πλευρικών λοβών εξισωθούν μεταξύ τους.

Με τη βοήθεια των πολυωνύμων Chebyshev είναι δυνατή η σχεδίαση στοιχειοκεραιών με δευτερεύοντες λοβούς ίσης στάθμης, και επομένως η μέθοδος προσφέρεται για τη βελτιστοποίηση της συμπεριφοράς στοιχειοκεραίας ως προς τη στάθμη των πλευρικών λοβών. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει (εναλλακτικά):

- ελαχιστοποίηση του εύρους δέσμης του κύριου λοβού για δεδομένη στάθμη πλευρικών λοβών*

* Για την ακρίβεια, αυτό που κατά την εφαρμογή της μεθόδου λαμβάνεται ως δεδομένο, ή εναλλακτικά μεγιστοποιείται, είναι ο λόγος του ύψους του κύριου λοβού προς το ύψος του μέγιστου πλευρικού.

- ή, ισοδύναμα, ελαχιστοποίηση της στάθμης των πλευρικών λοβών για δεδομένο εύρος δέσμης κύριου λοβού.

7.3.2. Ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev

Τα πολυώνυμα Chebyshev* $T_m(x)$ ορίζονται από τις

$$T_m(x) = \cos(m \cos^{-1}(x)) \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1 \quad (7.3.1\alpha)$$

$$T_m(x) = \cosh(m \cosh^{-1}(x)) \quad \text{για } x \geq 1 \quad (7.3.1\beta)$$

$$T_m(x) = (-1)^m \cosh(m \cosh^{-1}(-x)) \quad \text{για } x \leq -1 \quad (7.3.1\gamma)$$

όπου m είναι η τάξη (βαθμός) του πολυωνύμου. Από τις σχέσεις ορισμού (7.3.1α-γ) προκύπτει ότι τα δύο πρώτα πολυώνυμα Chebyshev $T_0(x)$, $T_1(x)$ είναι

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad (7.3.2)$$

Ισχύει η αναδρομική σχέση για τάξεις $m \geq 1$

$$T_{m+1}(x) = 2x T_m(x) - T_{m-1}(x) \quad (7.3.3)$$

η οποία μπορεί να αποδειχθεί** από τις (7.3.1α-γ) με τη βοήθεια απλών ιδιοτήτων των τριγωνομετρικών (αντίστοιχα των υπερβολικών) συναρτήσεων,

Με αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\theta$, ή $\theta = \cos^{-1}(x)$ (όπου $0 \leq \theta \leq \pi$), η (7.3.1α) γράφεται

$$T_m(x) = \cos(m\theta) \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1 \quad (7.3.4)$$

ενώ ομοίως, θέτοντας $x = \cosh y$ για $x \geq 1$ και $x = -\cosh y$ για $x \leq -1$, έχουμε

$$T_m(x) = \cosh(my) \quad \text{για } x \geq 1, \quad T_m(x) = (-1)^m \cosh(my) \quad \text{για } x \leq -1 \quad (7.3.5)$$

Το $\cos(m\theta)$ μπορεί πάντοτε να εκφρασθεί ως ανάπτυγμα δυνάμεων $\cos^m(\theta) = x^m$, δίνοντας την πολυωνυμική μορφή των $T_m(x)$ για $-1 \leq x \leq 1$. Τα αποτελέσματα για τα 7 πρώτα πολυώνυμα Chebyshev φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα.

Τριγωνομετρική μορφή ($-1 \leq x \leq 1$)	Πολυωνυμική μορφή
$\cos(0\theta) = 1$	$T_0(x) = 1$
$\cos(1\theta) = \cos\theta$	$T_1(x) = x$
$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$	$T_2(x) = 2x^2 - 1$

* Μια άλλη γραφή του ονόματος είναι Tschebyscheff, από την οποία φαίνεται ότι προήλθε και ο συμβολισμός T_m των εν λόγω πολυωνύμων.

** Για την απόδειξη παρατηρούμε ότι $\cos[(m+1)\theta] = \cos[(m-1)\theta]\cos(2\theta) - \sin[(m-1)\theta]\sin(2\theta) =$
 $= 2\cos[(m-1)\theta]\cos^2\theta - \cos[(m-1)\theta] - 2\sin[(m-1)\theta]\sin\theta\cos\theta =$
 $= 2\cos\theta\{\cos[(m-1)\theta]\cos\theta - \sin[(m-1)\theta]\sin\theta\} - \cos[(m-1)\theta] = 2\cos\theta\cos(m\theta) - \cos[(m-1)\theta]$

Δηλαδή ισχύει $\cos[(m+1)\theta] = 2\cos\theta\cos(m\theta) - \cos[(m-1)\theta]$ η οποία, βάσει της (7.2.5), ταυτίζεται με την (7.2.4) για $-1 \leq x \leq 1$. Για $|x| \geq 1$ χρησιμοποιούμε τις αντίστοιχες ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων.

Τριγωνομετρική μορφή ($-1 \leq x \leq 1$)	Πολυωνυμική μορφή
$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$	$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$	$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$	$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$\cos(6\theta) = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$	$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν για όλα τα x (δηλ. και εκτός του διαστήματος $-1 \leq x \leq 1$), όπως προκύπτει υπολογίζοντας βαθμηδόν τα πολυώνυμα από την αναδρομική σχέση (7.3.3).

Από τον ορισμό (7.3.1α-β) και τις σχέσεις (7.3.2)-(7.3.5) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev:

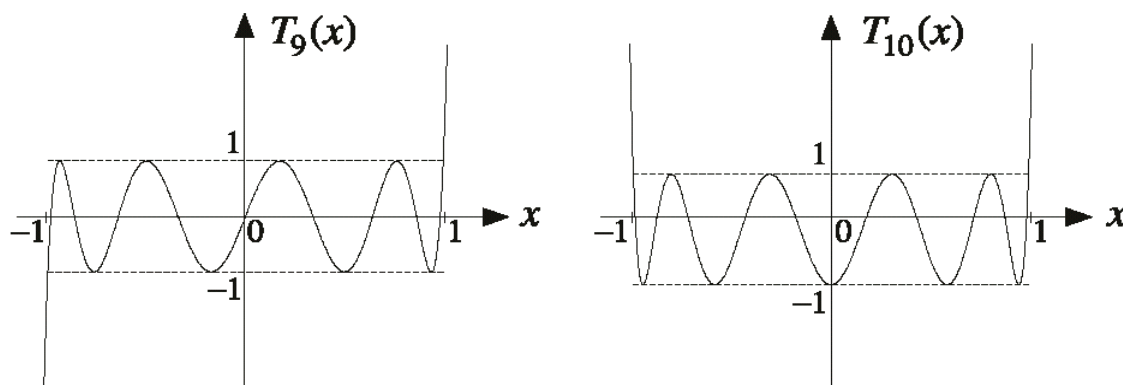
- Τα πολυώνυμα άρτιας τάξης $T_{2m}(x)$ είναι άρτιες συναρτήσεις του x και τα πολυώνυμα περιττής τάξης $T_{2m+1}(x)$ περιττές.
- Στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$ ισχύει για όλα τα πολυώνυμα $-1 \leq T_m(x) \leq 1$, δηλ. η τιμή τους κυμαίνεται μεταξύ -1 και 1 , ενώ όλες οι ρίζες αυτών (προφανώς m το πλήθος) βρίσκονται στο διάστημα αυτό*. Για $|x| \geq 1$ το πολυώνυμο $T_m(x)$ αυξάνεται ή μειώνεται μονοτονικά και (όπως είναι γνωστό για οποιοδήποτε πολυώνυμο) προσεγγίζει ασυμπτωτικά τον μεγιστοβάθμιο όρο του, δηλ. συμπεριφέρεται ανάλογα προς τη δύναμη x^m .

Ειδικότερα στις θέσεις $x = \pm 1$ ισχύει

$$T_m(1) = \cos(m \cdot 0) = 1 \quad , \quad T_m(-1) = \cos(m \pi) = (-1)^m \quad (7.3.6)$$

δηλ. όλα τα πολυώνυμα Chebyshev περνούν από το σημείο $(1,1)$, τα άρτιας τάξης από το σημείο $(-1,1)$ και τα περιττής τάξης από το σημείο $(-1,-1)$.

Οι ιδιότητες αυτές φαίνονται και στο Σχ. 7.7 που ακολουθεί.



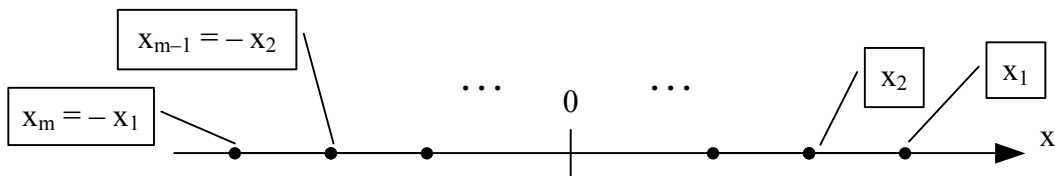
Σχ. 7.7: Τα πολυώνυμα Chebyshev $T_9(x)$ και $T_{10}(x)$

* Αυτό διαπιστώνεται αμέσως από την (7.2.6), αφού η συνάρτηση coshy = $(e^y + e^{-y})/2$ δεν μηδενίζεται.

Ιδιαίτερη σημασία (όπως θα δούμε) έχουν οι ρίζες x_n των πολωνύμων Chebyshev. Από την $T_m(x) = \cos(m\theta)$, όπου $x = \cos\theta$ και $0 \leq \theta \leq \pi$, παρατηρούμε ότι οι ρίζες θ_n και οι αντίστοιχες x_n προκύπτουν από τη συνθήκη $\cos(m\theta) = 0$, η οποία δίνει

$$\theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2m} \Rightarrow x_n = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2m}\right], \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (7.3.7)$$

Η (7.3.7) δίνει τις ρίζες σε φθίνουσα σειρά x_1, x_2, \dots, x_m όπου οι πρώτες μισές είναι θετικές και οι άλλες μισές αρνητικές*. Παρατηρούμε επίσης ότι $x_m = -x_1, x_{m-1} = -x_2, \dots$, δηλ. οι ρίζες είναι συμμετρικές περί το $x = 0$, όπως άλλωστε αναμενόταν λόγω της άρτιας ή περιττής συμπεριφοράς των $T_m(x)$. Το Σχ. 7.8 δείχνει τη διάταξη των ριζών.



Σχ. 7.8: Οι ρίζες του πολωνύμου Chebyshev $T_m(x)$

Με βάση τις παραπάνω ιδιότητες (και τα σχήματα) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συμπεριφορά ενός πολωνύμου Chebyshev προσομοιάζει προς έναν παράγοντα διάταξης $|S(\gamma)|$ του οποίου το μέγιστο αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο $x_0 > 1$, οι δευτερεύοντες λοβοί αντιστοιχούν στην περιοχή $-1 \leq x \leq 1$ και έχουν ίσα ύψη (στάθμες), ενώ οι μηδενισμοί αντιστοιχούν στις ρίζες του πολωνύμου. Οι παρατηρήσεις αυτές υποδεικνύουν ότι είναι δυνατή η χρήση πολωνύμων Chebyshev για τη σύνθεση στοιχειοκεραιών, εφόσον βρεθεί μια κατάλληλη αντιστοιχία μεταξύ της μαθηματικής μεταβλητής x του πολωνύμου και της μεταβλητής $\psi = kd \cos\gamma + \delta$ της στοιχειοκεραίας. Στην πραγματικότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά περίπτωση περισσότερες από μία αντιστοιχίσεις.

7.3.3. Η βασική αργή της μεθόδου

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, κατά την εφαρμογή της μεθόδου με ορισμένης τάξης πολωνύμου Chebyshev $T_m(x)$, προσεγγίζουμε τον παράγοντα διάταξης με ένα τμήμα του πολωνύμου $T_m(x)$ που αντιστοιχεί σε κάποιο διάστημα $x_{\min} \leq x \leq x_0$, όπου το κάτω όριο x_{\min} είναι μεταξύ -1 και 1 , ενώ το άνω όριο $x_0 > 1$. Με άλλα λόγια, θέτουμε

$$S(\psi) = T_m(x) \quad \text{για} \quad x_{\min} \leq x \leq x_0 \quad (7.3.8)$$

Για να είναι όμως αυτό εφικτό, δηλ. για να αντιπροσωπεύει η (7.3.8) έναν αληθινό παράγοντα διάταξης, απαιτείται να έχει ορισθεί μια κατάλληλη συνάρτηση (αντιστοιχία)

$$x = x(\psi)$$

* Για περιττή τάξη m του πολωνύμου η «μεσαία» ρίζα είναι $x_{(m+1)/2} = 0$.

η οποία αφενός να αντιστοιχίζει το διάστημα $\delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$ στο διάστημα $x_{\min} \leq x \leq x_0$ και αφετέρου να οδηγεί σε μια συνάρτηση $S(\psi) = S(z)$ πολυωνυμικής μορφής, διότι όπως έχει αποδειχθεί στα προηγούμενα ο παράγοντας διάταξης $S(\psi)$ μιας γραμμικής στοιχειοκεραίας είναι πάντοτε πολυώνυμο $S(z)$. Μέσω της αντιστοιχίας αυτής, καθώς η γωνία γ διατρέχει το διάστημα $0 \leq \gamma \leq \pi$, η μεταβλητή ψ διατρέχει την ορατή περιοχή και η μεταβλητή x το διάστημα $x_{\min} \leq x \leq x_0$. Έτσι, μέσω της διαδοχικής αντιστοίχισης

$$\gamma \rightarrow \psi \rightarrow x \quad , \quad \text{δηλ. } x = x(\psi) \text{ και } \psi = \psi(\gamma) = kd \cos \gamma + \delta$$

αναγόμεστε στον παράγοντα διάταξης $S(\gamma) = S(\psi) = T_m(x)$, δηλ. $S(\gamma) = T_m(x(\psi(\gamma)))$.

Σημειώνουμε ότι, ανάλογα με την αντιστοιχία μεταξύ x και ψ , είναι δυνατόν η μεταβλητή x να διατρέχει κάποιο τμήμα (ή και το σύνολο) του διαστήματος $x_{\min} \leq x \leq x_0$ δύο φορές, δηλ. να «κινείται» ως το x_0 και να «επιστρέφει προς τα πίσω», οπότε ο κύριος λοβός διαγράφεται συμμετρικά και ορισμένοι δευτερεύοντες λοβοί (ή και όλοι) εμφανίζονται και δεύτερη φορά στον $S(\psi)$ και τον $S(\gamma)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή $T_m(x_0) = R$ προφανώς αντιστοιχεί στο μέγιστο του κύριου λοβού, ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί αντιστοιχούν στην περιοχή $-1 \leq x \leq 1$, όπως προαναφέρθηκε, και άρα έχουν όλοι ύψος ίσο με τη μονάδα. Επομένως η παράμετρος R εκφράζει τον λόγο των μέγιστων τιμών του $|S(\gamma)|$ μεταξύ κύριου και πλευρικών λοβών*.

Στα επόμενα εξετάζεται η αντιστοιχία μεταξύ x και ψ . Ξεκινώντας από αυτή, προκύπτουν σε συγκεκριμένη βάση οι λεπτομέρειες εφαρμογής της μεθόδου.

7.3.4. Μετωπικές στοιχειοκεραίες: Η μέθοδος Dolph

Η μέθοδος των πολυωνύμων Chebyshev προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Dolph (γι' αυτό συχνά ονομάζεται και μέθοδος Dolph – Chebyshev) για τη σχεδίαση μετωπικής στοιχειοκεραίας ($\delta = 0$), χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία μεταξύ x και ψ

$$x = x_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = x_0 \cos\left(\frac{kd}{2} \cos \gamma\right) \quad (7.3.9)$$

Όπως είναι γνωστό για τη μετωπική στοιχειοκεραία, καθώς η γωνία γ μεταβάλλεται από 0 ως $\pi/2$ και από $\pi/2$ ως π , η μεταβλητή ψ μεταβάλλεται από kd ως 0 και από 0 ως $-kd$ (δηλ. διατρέχει την ορατή περιοχή από kd ως $-kd$). Τότε, βάσει της (7.3.9), η μεταβλητή x

* Πρέπει να προσέξουμε ότι στην πράξη ως μέτρο της στάθμης πλευρικών λοβών χρησιμοποιείται ο λόγος της έντασης ακτινοβολίας μεταξύ κύριου και μέγιστου πλευρικού. Επειδή η ένταση ακτινοβολίας είναι ανάλογη προς $|S(\gamma)|^2$, αυτό σημαίνει ότι στην πράξη η στάθμη πλευρικών λοβών (που μπορεί να δίνεται ως σχεδιαστική παράμετρος) υποδηλώνει το R^2 . Π.χ. στάθμη πλευρικών λοβών 10 dB κάτω από τον κύριο λοβό σημαίνει ότι $10 \log(R^2) = 10$, από όπου υπολογίζεται το R^2 και άρα το R .

μεταβάλλεται από $x_0 \cos(kd/2)$ ως x_0 και έπειτα από x_0 ως $x_0 \cos(kd/2)$ με αντίστροφη φορά, δηλ. συνολικά διατρέχει το διάστημα $x_0 \cos(kd/2) \leq x \leq x_0$ δύο φορές. Κατά συνέπεια, ο $S(\psi)$ που προκύπτει είναι συμμετρικός γύρω από τη θέση $\psi = 0$ και αντίστοιχα ο $S(\gamma)$ συμμετρικός γύρω από τη θέση $\gamma = \gamma_{\max} = \pi/2$ η οποία είναι και η θέση μεγίστου, αφού αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή $T_m(x_0)$. Συγκεκριμένα ισχύει $S(\pi - \gamma) = S(\gamma)$ διότι το «μισό» του $S(\gamma)$ με $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ είναι το τμήμα του $T_m(x)$ με $x_0 \cos(kd/2) \leq x \leq x_0$, ενώ το άλλο «μισό» του $S(\gamma)$ με $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$ είναι το ίδιο τμήμα του $T_m(x)$ με αντίθετη φορά. Αυτό φαίνεται και από τη μορφή του $S(\gamma)$ που προκύπτει εισάγοντας στην (7.3.8) την (7.3.9):

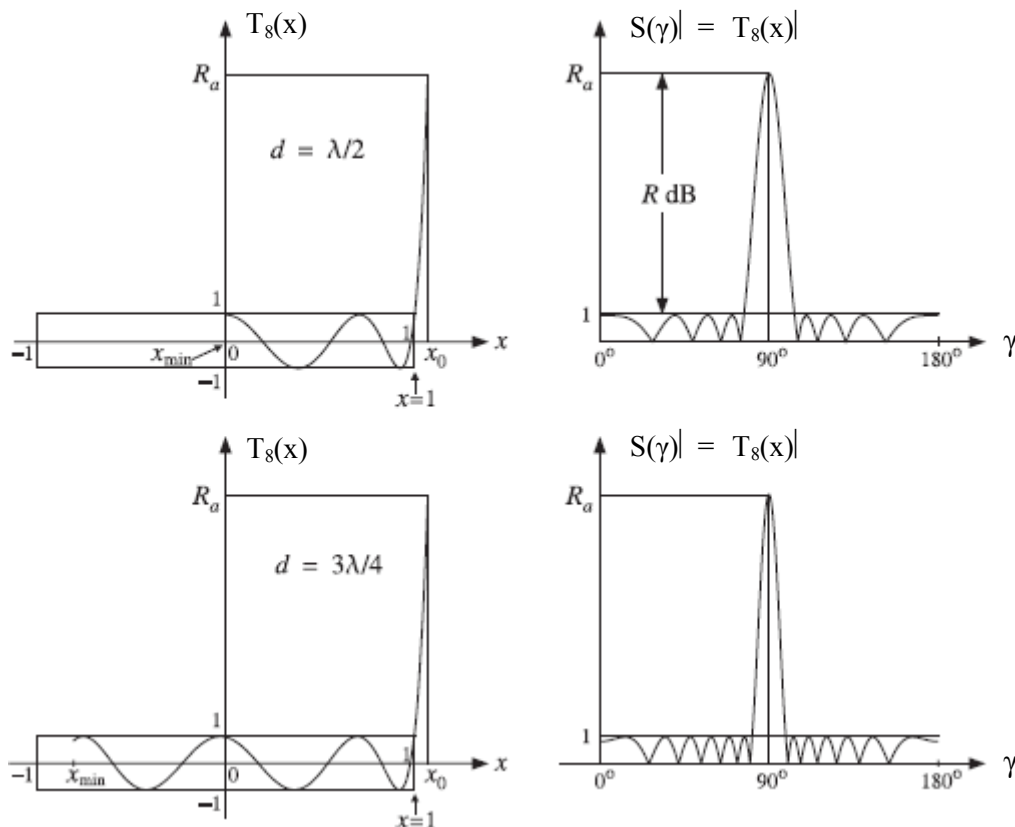
$$S(\gamma) = T_m \left(x_0 \cos \left(\frac{kd}{2} \cos \gamma \right) \right) \quad (7.3.10)$$

διότι προφανώς ισχύει

$$x_0 \cos \left(\frac{kd}{2} \cos(\pi - \gamma) \right) = x_0 \cos \left(-\frac{kd}{2} \cos \gamma \right) = x_0 \cos \left(\frac{kd}{2} \cos \gamma \right)$$

Το διάστημα που καλύπτει η μεταβλητή x είναι το $x_0 \cos(kd/2) \leq x \leq x_0$ δηλ. η παράμετρος x_{\min} της γενικής μεθόδου είναι η $x_0 \cos(kd/2)$. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι για $d = \lambda/2$, δηλ. $kd = \pi$, η ορατή περιοχή $-kd \leq \psi \leq kd$ γίνεται $-\pi \leq \psi \leq \pi$ (δηλ. καλύπτει ακριβώς τον μοναδιαίο κύκλο), η μεταβλητή ψ μεταβάλλεται από π ως 0 και από 0 ως $-\pi$, ενώ η μεταβλητή x μεταβάλλεται από 0 ως x_0 και έπειτα από x_0 ως 0 . Στην περίπτωση αυτή ο $S(\gamma)$ έχει μέγιστο στη θέση $\gamma_{\max} = \pi/2$ (που σύμφωνα με την (7.3.9) αντιστοιχεί σε $x = x_0$) και εμφανίζει από δύο φορές όσους δευτερεύοντες λοβούς έχει το πολυώνυμο $T_m(x)$ μεταξύ του σημείου $x = 0$ και της μέγιστης ρίζας x_m αυτού, οι οποίοι λόγω της συμμετρίας του $T_m(x)$ είναι οι μισοί δευτερεύοντες λοβοί του (βλ. ενδεικτικά το Σχ. 7.7), επομένως ο $S(\gamma)$ εμφανίζει ακριβώς τόσους δευτερεύοντες λοβούς όσους έχει το πολυώνυμο $T_m(x)$. Για $d = \lambda$, δηλ. $kd = 2\pi$, η ορατή περιοχή καλύπτει τον μοναδιαίο κύκλο δύο φορές και η μεταβλητή x μεταβάλλεται από $-x_0$ ως x_0 και έπειτα από x_0 ως $-x_0$, και επομένως ο $S(\gamma)$ έχει τρία ίσα μέγιστα στις θέσεις $x = x_0$ και $x = -x_0$ (τα οποία αντιστοιχούν σε $\gamma = 0, \pi/2$ και π , δηλ. η στοιχειοκεραία δεν παύει να είναι μετωπική αλλά γίνεται συγχρόνως και αξονική). Όλοι οι δευτερεύοντες λοβοί του $T_m(x)$ εμφανίζονται δύο φορές στον $S(\gamma)$, μία στην περιοχή $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ και μία στην περιοχή $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$, δηλ. σε καθένα από τα διαστήματα που εκτείνονται ανάμεσα στα τρία αυτά μέγιστα. Παρομοίως για ακόμη μεγαλύτερες τιμές του d οι δευτερεύοντες λοβοί επανεμφανίζονται ακόμη περισσότερες φορές και καθώς αυξάνει το d εμφανίζονται και άλλα μέγιστα. Ως γενικό συμπέρασμα σημειώνουμε ότι για $d \geq \lambda/2$ η ορατή περιοχή καλύπτει πλήρως τον μοναδιαίο κύκλο και όλοι οι δευτερεύοντες λοβοί του $T_m(x)$ εμφανίζονται στον $S(\gamma)$ τουλάχιστον μία φορά, ή

και περισσότερες. Αντίθετα για $d \leq \lambda/2$ δεν εμφανίζονται όλοι οι δευτερεύοντες λοβοί του $T_m(x)$ στον $S(\gamma)$. Θα επανέλθουμε και αργότερα στην αξιοσημείωτη αυτή παρατήρηση. Ενδεικτικά στο Σχ. 7.9 που ακολουθεί παρουσιάζεται το τελικό αποτέλεσμα της μεθόδου, δηλ. το μέτρο του παράγοντα διάταξης $|S(\gamma)|$, με χρήση του πολωνύμου 8^{ης} τάξης $T_8(x)$ (που όπως θα φανεί σε λίγο αντιστοιχεί σε στοιχειοκεραία $M = 9$ στοιχείων) για δύο περιπτώσεις μετωπικών στοιχειοκεραίων με βήμα $d = \lambda/2$ και $d = 3\lambda/4$. Από το σχήμα είναι εμφανές ότι ο $S(\gamma)$ προκύπτει με κατάλληλη «αναπαραγωγή» του τμήματος του $T_8(x)$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $x_{\min} \leq x \leq x_0$ σε δύο συμμετρικά «αντίγραφα» που καλύπτουν τις περιοχές γωνιών $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ και $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi$. Το μέτρο του παράγοντα διάταξης $|S(\gamma)|$ που σχεδιάζεται έχει προκύψει με «ανόρθωση» των αρνητικών τμημάτων αυτού (φαίνονται ανεστραμμένοι οι αρνητικοί λοβοί του πολωνύμου Chebyshev).



Σχ. 7.9: Μετωπικές στοιχειοκεραίες Dolph – Chebyshev με $M = 9$ και $d = \lambda/2$, $d = 3\lambda/4$

Για την εφαρμογή της μεθόδου η τιμή του x_0 υπολογίζεται από τη συνθήκη $T_m(x_0) = R$ με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x_0 = \cosh y_0$ όπως στην (7.3.5) (δεδομένου ότι $x_0 \geq 1$):

$$T_m(x_0) = \cosh(m y_0) = R \Rightarrow y_0 = \frac{1}{m} \cosh^{-1} R = \frac{1}{m} \ln\left(R + \sqrt{R^2 - 1}\right)$$

οπότε*

$$x_0 = \cosh\left(\frac{1}{m} \cosh^{-1} R\right) = \frac{1}{2} \left[\left(R + \sqrt{R^2 - 1}\right)^{1/m} + \left(R - \sqrt{R^2 - 1}\right)^{1/m} \right] \quad (7.3.11)$$

Οι ρίζες ψ_n του $S(\psi)$ προκύπτουν από τις ρίζες x_n του $T_m(x)$ με βάση την (7.3.7) σε συνδυασμό με την (7.3.9):

$$\psi_n = 2 \cos^{-1}\left(\frac{x_n}{x_0}\right) = 2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{x_0} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2m}\right]\right), \quad n = 1, 2, \dots, m \quad (7.3.12)$$

Από τη συμμετρία των ριζών $x_m = -x_1$, $x_{m-1} = -x_2$, ..., προκύπτει αντίστοιχη συμμετρία των ριζών ψ_n :

$$\psi_m = 2 \cos^{-1}\left(\frac{x_m}{x_0}\right) = 2 \cos^{-1}\left(\frac{-x_1}{x_0}\right) = 2 \left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \right] = 2\pi - 2 \cos^{-1}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = 2\pi - \psi_1$$

και ομοίως $\psi_{m-1} = 2\pi - \psi_2$, ... κ.ο.κ. Επειδή όμως η ορατή περιοχή εκτείνεται στο διάστημα $-kd \leq \psi \leq kd$, λαμβάνουμε $\psi_m = -\psi_1$, $\psi_{m-1} = -\psi_2$, ... Από τις ρίζες ψ_n προκύπτουν οι ρίζες $z_n = e^{j\psi_n}$ του $S(z)$ οι οποίες (λόγω της συμμετρίας αυτής) αποτελούν συζυγή ζεύγη:

$$z_m = e^{j\psi_m} = e^{-j\psi_1} = z_1^*, \quad z_{m-1} = e^{j\psi_{m-1}} = e^{-j\psi_2} = z_2^*, \quad \dots$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη θεωρία, γνωρίζοντας τις ρίζες z_n γνωρίζουμε και τον παράγοντα διάταξης στην πολυωνυμική μορφή $S(z)$ (εκτός από τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή A_{M-1}), αρκεί να εκτελέσουμε το γινόμενο διωνύμων όπως στην (7.2.1), οπότε λαμβάνουμε και τους κανονικοποιημένους ρευματικούς συντελεστές της στοιχειοκεραίας όπως ακριβώς και στη μέθοδο Schelkunoff. Ο βαθμός του πολυωνύμου $S(z)$ ισούται με το πλήθος m των ριζών z_n . Επειδή όμως από τη θεωρία των γραμμικών στοιχειοκεραιών είναι γνωστό ότι ο $S(z)$ είναι βαθμού $M-1$ (όπου M το πλήθος των στοιχείων της στοιχειοκεραίας), άρα ισχύει $m = M-1$. Αυτό σημαίνει ότι για να σχεδιάσουμε στοιχειοκεραία M στοιχείων χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο Chebyshev $T_{M-1}(x)$.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, τα σχεδιαστικά δεδομένα από τα οποία ξεκινάει η εφαρμογή της μεθόδου είναι οι παράμετροι d , M , R . Ισοδύναμα, αντί του R μπορεί να ληφθεί ως δεδομένο το εύρος δέσμης Δ_0 του κύριου λοβού της στοιχειοκεραίας, ο οποίος εκτείνεται μεταξύ των δύο μηδενισμών του $S(\gamma)$ που βρίσκονται πλησιέστερα στην θέση μεγίστου $\gamma = \pi/2$ (εκατέρωθεν αυτής). Ο ένας από τους μηδενισμούς αυτούς αντιστοιχεί στην μέγιστη ρίζα του $T_m(x)$ διότι αυτή είναι η τελευταία ρίζα που συναντάει η μεταβλητή

* Η (7.3.11) προκύπτει με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης $\cosh y = (e^y + e^{-y})/2$ και της πολύ εύκολα αποδεικνυόμενης $\left(R + \sqrt{R^2 - 1}\right)^{-1} = R - \sqrt{R^2 - 1}$.

x πριν συναντήσει το σημείο x_0 που, όπως είδαμε, αντιστοιχεί στο μέγιστο του παράγοντα διάταξης, δηλ. είναι ο μηδενισμός ο πλησιέστερος στη θέση μεγίστου. Η μέγιστη αυτή ρίζα είναι η x_1 (βλ. και το Σχ. 7.8) και η αντίστοιχη ρίζα του $S(\psi)$ είναι η ψ_1 , η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί στη ρίζα γ_1 του $S(\gamma)$. Λόγω της συμμετρίας $S(\pi - \gamma) = S(\gamma)$ που παρατηρήσαμε στα προηγούμενα, ο άλλος από τους μηδενισμούς που περιβάλλουν τον κύριο λοβό του $S(\gamma)$ βρίσκεται στη θέση $\pi - \gamma_1$.

Η γωνία γ_1 δίνεται από την

$$\psi_1 = kd \cos \gamma_1 \quad (7.3.13)$$

ενώ για την ψ_1 από την (7.3.12) έχουμε

$$\psi_1 = 2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \left(\frac{\pi}{2m} \right) \right] \Rightarrow x_0 \cos \left(\frac{\psi_1}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2m} \right) \quad (7.3.14)$$

Σημειώνουμε ότι το σημείο x_0 αντιστοιχεί στην τιμή $\psi = 0$ ενώ, όπως είδαμε, καθώς η μεταβλητή x κινείται από $x_0 \cos(kd/2)$ ως x_0 , η μεταβλητή ψ κινείται από kd ως 0 . Επομένως η τελευταία ρίζα που συναντάει η μεταβλητή x πριν φτάσει στο σημείο x_0 , δηλ. η x_1 , αντιστοιχεί στην τελευταία ρίζα του $S(\psi)$ που συναντάει η ψ στο διάστημα από kd ως 0 πριν φτάσει στο σημείο 0 , δηλαδή η ρίζα ψ_1 είναι θετική (η πρώτη θετική ρίζα του $S(\psi)$), πράγμα που δείχνει άλλωστε και η (7.3.14). Άρα από την (7.3.13) συμπεραίνουμε ότι $0 \leq \gamma_1 \leq \pi/2$, οπότε για την παραπληρωματική αυτής ισχύει $\pi/2 \leq \pi - \gamma_1 \leq \pi$. Επομένως το εύρος δέσμης Δ_0 , που είναι η γωνία μεταξύ των μηδενισμών γ_1 και $\pi - \gamma_1$, δίνεται από την $\Delta_0 = (\pi - \gamma_1) - \gamma_1 = \pi - 2\gamma_1$, και άρα χρησιμοποιώντας και την (7.3.13) προκύπτει

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta_0}{2} \Rightarrow \cos \gamma_1 = \sin \left(\frac{\Delta_0}{2} \right) \Rightarrow \psi_1 = kd \cos \gamma_1 = kd \sin \left(\frac{\Delta_0}{2} \right) \quad (7.3.15)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (7.3.14) και (7.3.15) παίρνουμε

$$x_0 = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2m} \right)}{\cos \left(\frac{\psi_1}{2} \right)} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2m} \right)}{\cos \left(\frac{kd}{2} \sin \left(\frac{\Delta_0}{2} \right) \right)} \quad (7.3.16)$$

Εφόσον λοιπόν δίνεται το εύρος δέσμης Δ_0 , από την (7.3.16) υπολογίζεται το x_0 (και το $R = T_m(x_0)$), και στη συνέχεια η μέθοδος προχωρεί όπως περιγράφηκε στα προηγούμενα.

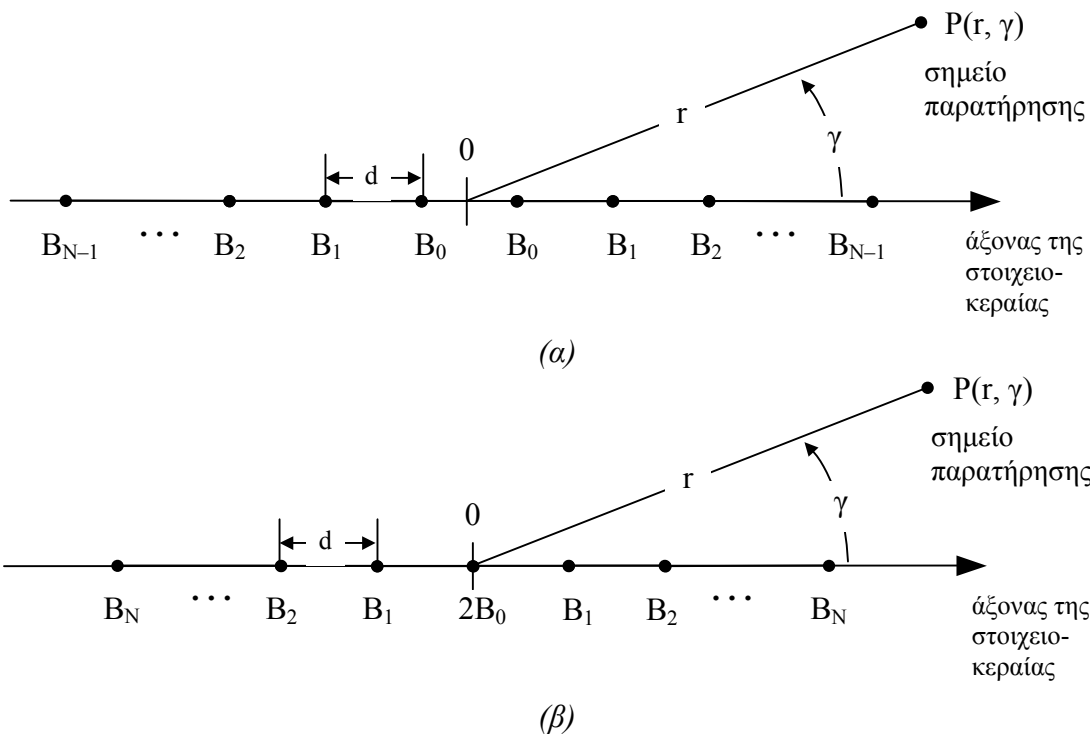
Ανακεφαλαιώνοντας, η μέθοδος Dolph – Chebyshev βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

- Ως αρχικά δεδομένα της μεθόδου δίνονται τα d , M , R , ή τα d , M , Δ_0 .
- Από το πλήθος των στοιχείων M προσδιορίζεται η τάξη $m = M-1$ του πολυωνύμου Chebyshev που θα χρησιμοποιηθεί.

- Υπολογίζεται το x_0 από την (7.3.11) αν δίνεται το R ή από την (7.3.16) αν δίνεται το εύρος δέσμης Δ_0 .
- Υπολογίζονται οι ρίζες ψ_n του $S(\psi)$ από την (7.3.12) και στη συνέχεια από αυτές οι ρίζες $z_n = e^{j\psi_n}$ του $S(z)$.
- Από τις ρίζες z_n υπολογίζονται οι κανονικοποιημένοι ρευματικοί συντελεστές (A_n / A_{M-1}) της στοιχειοκεραίας μέσω του γινομένου διωνύμων της (7.2.1).

Ο υπολογισμός των ρευματικών συντελεστών είναι προφανώς ο τελικός στόχος της μεθόδου αυτής (αλλά και κάθε άλλης μεθόδου σχεδίασης) αφού αν υπολογίσουμε τα απαιτούμενα ρεύματα τροφοδοσίας έχουμε προσδιορίσει πλήρως τη ζητούμενη στοιχειοκεραία. Όπως προαναφέρθηκε, αυτός μπορεί να γίνει από τις ρίζες z_n όπως και στη μέθοδο Schelkunoff. Αυτή η μέθοδος υπολογισμού είναι κατάλληλη για σχετικά μικρά πλήθη στοιχείων M , όμως για μεγαλύτερα πλήθη παρουσιάζει αλγεβρικές δυσκολίες. Για την περίπτωση αυτή υπάρχει μια εναλλακτική μέθοδος η οποία υποκαθιστά τα δύο τελευταία παραπάνω βήματα (δηλ. δεν απαιτεί τον υπολογισμό των ριζών ψ_n και z_n). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην παρατήρηση* ότι οι ρευματικοί συντελεστές A_n , δηλ. οι συντελεστές του πολυωνύμου $S(\gamma)$, παρουσιάζουν άρτια συμμετρία περί το μέσο της στοιχειοκεραίας, δηλ. ισχύει $A_m = A_0$, $A_{m-1} = A_1$, ... κ.ο.κ. Για να εκμεταλλευτούμε αυτή τη συμμετρία θεωρούμε την αρχή των συντεταγμένων στο μέσο της στοιχειοκεραίας (ενώ όπως θυμόμαστε από τη γενική θεωρία των γραμμικών στοιχειοκεραίων αυτή συνήθως τοποθετείται στο ένα άκρο της), οπότε είτε ταυτίζεται με το (μοναδικό) μεσαίο στοιχείο της στοιχειοκεραίας (για περιττό πλήθος στοιχείων $M = m+1$) είτε βρίσκεται στο μεσοδιάστημα μεταξύ των δύο μεσαίων στοιχείων της στοιχειοκεραίας (για άρτιο πλήθος στοιχείων $M = m+1$). Τότε οι ρευματικοί συντελεστές συμμετρικών στοιχείων ως προς την αρχή των συντεταγμένων είναι ίσοι και τους συμβολίζουμε πλέον με B_0, B_1, \dots, B_{N-1} όπου $M = 2N$ για M άρτιο ή με $2B_0, B_1, \dots, B_N$ όπου $M = 2N+1$ για M περιττό (δηλ. σε κάθε περίπτωση λόγω της συμμετρίας έχουμε τους μισούς άγνωστους συντελεστές από ό,τι αρχικά). Ειδικά στην περίπτωση περιττού M ο συντελεστής του μεσαίου στοιχείου συμβολίζεται με $2B_0$ για λόγους αλγεβρικής διευκόλυνσης. Η γεωμετρική εικόνα των συντελεστών φαίνεται στο Σχ. 7.10 που ακολουθεί.

* Η παρατήρηση αυτή αποδεικνύεται με βάση τη συμμετρία των πολυωνύμων $T_m(x)$, της ορατής περιοχής και γενικότερα όλων των χαρακτηριστικών της στοιχειοκεραίας στη μέθοδο Dolph – Chebyshev.



Σχ. 7.10: Οι ρευματικοί συντελεστές για στοιχειοκεραία συμμετρική ως προς το μέσο της (α) με $M = 2N$ άρτιο (β) με $M = 2N+1$ περιττό

Εφαρμόζοντας τη γενική θεωρία ανάλυσης στοιχειοκεραιών παίρνουμε χωρίς δυσκολία τον παράγοντα διάταξης $S(\gamma)$ στην περίπτωση άρτιου και περιττού M :

Για $M = 2N$ άρτιο

$$S_{2N}(\gamma) = B_0(e^{j(kd/2)\cos\gamma} + e^{-j(kd/2)\cos\gamma}) + B_1(e^{j(3kd/2)\cos\gamma} + e^{-j(3kd/2)\cos\gamma}) + \dots$$

και θέτοντας (ως συνήθως) $\psi = kd \cos\gamma$ παίρνουμε

$$S_{2N}(\psi) = 2B_0 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + 2B_1 \cos\left(\frac{3\psi}{2}\right) + \dots + 2B_{N-1} \cos\left(\frac{2N-1}{2}\psi\right) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} B_n \cos\left((2n+1)\frac{\psi}{2}\right) \quad (7.3.17)$$

Για $M = 2N+1$ περιττό (ομοίως)

$$S_{2N+1}(\psi) = 2B_0 + 2B_1 \cos(\psi) + \dots + 2B_N \cos(N\psi) = 2 \sum_{n=0}^N B_n \cos\left(\frac{2n\psi}{2}\right) \quad (7.3.18)$$

Από την (7.3.9) ισχύει $\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{x}{x_0}$ και εφαρμόζοντας την (7.3.4) παίρνουμε

$$M = 2N \text{ άρτιο: } S_{2N}(x) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} B_n T_{2n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (7.3.19)$$

$$M = 2N+1 \text{ περιττό: } S_{2N+1}(x) = 2 \sum_{n=0}^N B_n T_{2n}\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (7.3.20)$$

Παρατηρούμε όμως ότι εξ υποθέσεως (όπως δείχνει η (7.3.8) αφού αναφερόμαστε σε στοιχειοκεραίες Dolph – Chebyshev) ο παράγοντας διάταξης $S(\gamma)$ ή $S(\psi)$ ή αντίστοιχα ο

$S(x)$ για M στοιχεία είναι το πολυώνυμο Chebyshev τάξης $M-1$ δηλ. $T_{M-1}(x)$. Για την ακρίβεια, συμπεριλαμβάνοντας και την επίδραση ενός οποιουδήποτε πολλαπλασιαστικού παράγοντα* επί των ρευματικών συντελεστών, ο παράγοντας διάταξης $S(x)$ είναι ανάλογος προς το πολυώνυμο $T_{M-1}(x)$, δηλ.

$$S_{2N}(x) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} B_n T_{2n+1}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \beta T_{2N-1}(x) \quad (7.3.21)$$

$$S_{2N+1}(x) = 2 \sum_{n=0}^N B_n T_{2n}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \beta T_{2N}(x) \quad (7.3.22)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας β εκφράζει τον προαναφερόμενο πολλαπλασιαστικό παράγοντα και μπορεί να προσδιορισθεί από την συνολική εκπεμπόμενη ισχύ της στοιχειοκεραίας. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πολυωνύμων $T_n(x)$ στην (7.3.21) ή την (7.3.22), εκτελώντας τις πράξεις και εξισώνοντας τους συντελεστές όρων ίδιας τάξης (βαθμού) ως προς x προσδιορίζονται οι κανονικοποιημένοι ρευματικοί συντελεστές (B_n / B_{N-1}) ή (B_n / B_N), δηλ. ανηγμένοι στον μεγιστοβάθμιο συντελεστή ο οποίος βγαίνει κοινός παράγοντας.

7.3.5. Επέκταση: Η μέθοδος Riblet

Η μέθοδος Dolph που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα εφαρμόζεται, όπως είδαμε, για μετωπικές στοιχειοκεραίες. Ένας ακόμη περιορισμός της μεθόδου απορρέει από την προηγούμενη παρατήρηση ότι για $d \leq \lambda/2$ δεν εμφανίζονται όλοι οι δευτερεύοντες λοβοί του $T_m(x)$ στον $S(\gamma)$ που δίνει η μέθοδος αυτή. Αυτό διότι στην περίπτωση αυτή η ορατή περιοχή δεν καλύπτει πλήρως τον μοναδιαίο κύκλο, και κατά συνέπεια για ορισμένες ρίζες του $T_m(x)$ οι αντίστοιχες ρίζες του $S(\psi)$ [άρα και του $S(z)$] δεν εμφανίζονται στον $S(\gamma)$. Το γεγονός ότι υπάρχουν ρίζες εκτός της ορατής περιοχής σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της μεθόδου επιδέχεται βελτίωση, επειδή αυτές θα μπορούσαν να μετακινηθούν στην ορατή περιοχή και να οδηγήσουν σε μείωση του εύρους του κύριου λοβού, άρα σε αύξηση της κατευθυντικότητας (βλ. και τις αντίστοιχες παρατηρήσεις σχετικά με τη μέθοδο Schelkunoff). Συμπερασματικά, η μέθοδος Dolph δεν οδηγεί σε βέλτιστη λύση για $d \leq \lambda/2$. Η μέθοδος Riblet αποτελεί επέκταση της μεθόδου Dolph και επιτυγχάνει την υπέρβαση των δύο ανωτέρω περιορισμών, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική αντιστοιχία μεταξύ x

* Ένας τέτοιος παράγοντας, όπως έχει ήδη σχολιασθεί, αντιστοιχεί στην συνολική εκπεμπόμενη ισχύ της στοιχειοκεραίας η οποία μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί αφήνοντας ανεπηρέαστη τη μορφή του διαγράμματος ακτινοβολίας της. Όπως ακριβώς και στη μέθοδο Schelkunoff, από τα μορφολογικά στοιχεία του διαγράμματος ακτινοβολίας μπορούμε (και χρειαζόμαστε) να υπολογίσουμε τους κανονικοποιημένους ρευματικούς συντελεστές και όχι την τιμή τους σε απόλυτα μεγέθη.

και ψ και διαφορετικής τάξης πολυώνυμο Chebyshev για την σχεδίαση. Ουσιαστικά η μέθοδος αυτή συνίσταται στην επέκταση του διαστήματος $x_{\min} \leq x \leq x_0$ προς τα αριστερά, ούτως ώστε να «εκμεταλλεύεται» όλους τους δευτερεύοντες λοβούς του πολυωνύμου Chebyshev στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$ και όχι τους μισούς ή λιγότερους όπως η μέθοδος Dolph. Με τον τρόπο αυτό απαιτείται και μικρότερης τάξης πολυώνυμο Chebyshev.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος Riblet εφαρμόζεται μόνο για περιττό αριθμό στοιχείων $M = 2N+1$, αλλά ο περιορισμός αυτός δεν μειώνει τη χρησιμότητα της μεθόδου (προφανώς στην πράξη δεν ενοχλεί π.χ. ένα στοιχείο παραπάνω προκειμένου να έχουμε περιττό πλήθος). Σημειώνουμε επίσης ότι η μέθοδος οδηγεί σε στοιχειοκεραίες με συμμετρία ως προς το μέσον τους, και αυτό λαμβάνεται υπόψη εξαρχής κατά την αναγραφή των ζητούμενων ρευματικών συντελεστών. Δηλαδή χρησιμοποιούμε και εδώ τον συμβολισμό $2B_0, B_1, \dots, B_N$ του Σχ. 7.10β και παρατηρούμε ότι για τον $S(\psi)$ ισχύει και πάλι η (7.3.18) η οποία ξαναγράφεται εδώ:

$$S(\psi) = 2B_0 + 2B_1 \cos(\psi) + \dots + 2B_N \cos(N\psi) \quad (7.3.18)$$

η οποία δεν ισχύει μόνο για στοιχειοκεραίες Dolph – Chebyshev αλλά γενικά για οποιαδήποτε στοιχειοκεραία με περιττό πλήθος στοιχείων $M = 2N+1$ και συμμετρικούς ρευματικούς συντελεστές (υπενθυμίζουμε ότι η σχέση αυτή βασίστηκε στη γενική θεωρία ανάλυσης στοιχειοκεραίων με μόνη προϋπόθεση την συμμετρία των συντελεστών, και όχι σε κάποια ειδικότερη ιδιότητα των στοιχειοκεραίων Dolph – Chebyshev).

Η αντιστοιχία μεταξύ x και ψ στην οποία βασίζεται η μέθοδος Riblet είναι

$$x = a \cos \psi + b \quad (7.3.23)$$

όπου a και b είναι κάποιες κατάλληλες σταθερές (θα δούμε σε λίγο πως προσδιορίζονται). Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι η σχεδιαζόμενη στοιχειοκεραία (των $M = 2N+1$ στοιχείων) να έχει παράγοντα διάταξης $S(\psi)$ ίσο με το πολυώνυμο $T_N(x)$ στο διάστημα $x_{\min} = -1 \leq x \leq x_0$, δηλ. ίσο με το πολυώνυμο Chebyshev τάξης $(M-1)/2$ (της μισής από την τάξη $M-1$ της μεθόδου Dolph). Για να το επιτύχουμε εισάγουμε την (7.3.23) στην έκφραση του $T_N(x)$ και εξισώνουμε με τον $S(\psi)$ που δίνεται από την (7.3.18):

$$T_N(x) = S(\psi) \Leftrightarrow T_N(a \cos \psi + b) = 2B_0 + 2B_1 \cos(\psi) + \dots + 2B_N \cos(N\psi) \quad (7.3.24)$$

Η πολυωνυμική έκφραση $T_N(a \cos \psi + b)$ αποτελείται από όρους της μορφής $(a \cos \psi + b)^n$ με βαθμό n από 0 μέχρι N , οπότε εισάγοντας τα σχετικά αναπτύγματα δυνάμεων διωνύμων και εκτελώντας τις πράξεις (δηλ. συλλέγοντας τους όρους με τον ίδιο βαθμό) ανάγεται τελικά σε άθροισμα όρων της μορφής $\cos^n \psi$, και πάλι με $0 \leq n \leq N$. Όλες οι δυνάμεις $\cos^n \psi$, με κατάλληλες τριγωνομετρικές πράξεις, μπορούν να εκφραστούν ως αθροίσματα της μορφής (7.3.18), δηλ. ως πεπερασμένα αθροίσματα όρων της μορφής $\cos(m\psi)$, τα

οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι τίποτε άλλο παρά πεπερασμένα αθροίσματα Fourier άρτιας μορφής (περιέχουν όλες τις αρμονικές τάξης μέχρι m αλλά μόνο κατά το άρτιο, δηλ. το συνημιτονοειδές, τμήμα αυτών, και όχι το περιττό δηλ. το ημιτονοειδές τμήμα). Εκτελώντας ακόμη μία φορά τις αλγεβρικές πράξεις, δηλ. συλλέγοντας τους όρους με το ίδιο $\cos(m\psi)$, εκφράζουμε τον $S(\psi)$ στη μορφή της (7.3.18) από την οποία προκύπτουν τα $2B_0, 2B_1, \dots, 2B_N$ και επομένως οι ζητούμενοι ρευματικοί συντελεστές*.

Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση $M = 5$ οπότε $N = 2$, δηλ. για τη σχεδίαση στοιχειοκεραίας 5 στοιχείων χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο Chebyshev τάξης 2

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Εισάγοντας την (7.3.23) παίρνουμε

$$T_2(a \cos \psi + b) = 2(a + b \cos \psi)^2 - 1 = 2a^2 \cos^2 \psi + 4ab \cos \psi + 2b^2 - 1$$

η οποία με τη βοήθεια της γνωστής σχέσης $2\cos^2 \psi = 1 + \cos(2\psi)$ γράφεται

$$T_2(a \cos \psi + b) = a^2 \cos(2\psi) + 4ab \cos \psi + a^2 + 2b^2 - 1 = S(\psi)$$

και επομένως για τους ρευματικούς συντελεστές προκύπτει

$$2B_0 = a^2 + 2b^2 - 1, \quad 2B_1 = 4ab, \quad 2B_2 = a^2$$

Κατά αντίστοιχο τρόπο προσδιορίζονται οι ρευματικοί συντελεστές για ανώτερες τάξεις.

Για τον προσδιορισμό των σταθερών a και b μπορούν να βρεθούν δύο ανεξάρτητες σχέσεις που ικανοποιούνται από αυτές και στη συνέχεια να επιλυθεί το σύστημα 2 εξισώσεων που προκύπτει. Οι σχέσεις αυτές βασίζονται στην απαίτηση η ορατή περιοχή μέσω της (7.3.23) να αντιστοιχίζεται στο διάστημα $x_{\min} = -1 \leq x \leq x_0$ ώστε, όπως προαναφέρθηκε, ο $S(\gamma)$ να περιλαμβάνει αφενός όλους τους δευτερεύοντες λοβούς του πολυωνύμου Chebyshev και αφετέρου το επιθυμητό μέγιστο που προκύπτει από την τιμή x_0 . Με την υπόθεση $a > 0$ παρατηρούμε με βάση την (7.3.23) ότι το μέγιστο και το ελάχιστο (x_{\min} και x_0) της μεταβλητής x προκύπτουν για την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $\cos \psi$, αντίστοιχα. Από το Σχ. 7.1 που απεικονίζει το z στο μιγαδικό επίπεδο παρατηρούμε ότι το $\cos \psi$ αντιστοιχεί στην προβολή του σημείου z στον οριζόντιο άξονα. Η μέγιστη και η ελάχιστη (αλγεβρικά) τιμή της προβολής αυτής εξαρτώνται από την ορατή περιοχή (ουσιαστικά πρόκειται για την προβολή της ορατής περιοχής στον οριζόντιο άξονα). Το Σχ. 7.11 κατωτέρω απεικονίζει διάφορες ενδεικτικές περιπτώσεις ορατής περιοχής.

* Όπως στα προηγούμενα, πρόκειται και εδώ για «ανηγμένους» ή «κανονικοποιημένους» ρευματικούς συντελεστές, δηλ. σε μια συγκεκριμένη στοιχειοκεραία αυτοί θα πρέπει να πολλαπλασιασθούν όλοι με κάποιον συντελεστή που εξαρτάται από την επιθυμητή συνολική εκπεμπόμενη ισχύ της στοιχειοκεραίας.

Ειδικότερα παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η ορατή περιοχή θα διέρχεται από τη θέση $\psi = 0$ (εκτός από τις ακραίες περιπτώσεις $\delta < -kd$ και $\delta > kd$ οι οποίες δεν αναμένονται στην πράξη) και συνεπώς η μέγιστη τιμή x_0 θα εμφανισθεί στη θέση $\psi_{\max} = 0$ διότι εκεί το $\cos\psi$ γίνεται μέγιστο. Επομένως για τη μέγιστη τιμή x_0 έχουμε

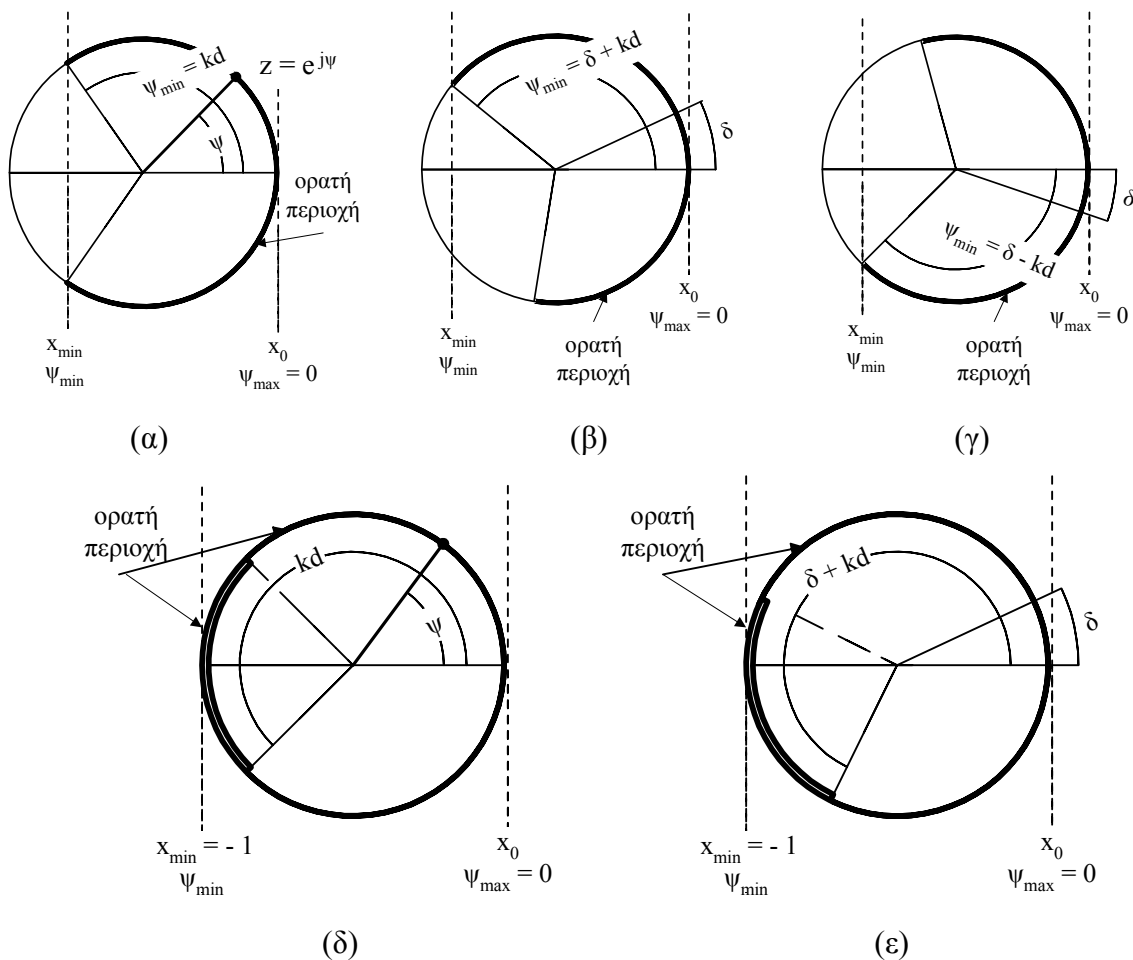
$$x_0 = a \cos \psi_{\max} + b$$

και αφού $\psi_{\max} = 0 \Rightarrow \cos \psi_{\max} = 1$, ισχύει

$$x_0 = a + b \tag{7.3.25}$$

Αυτή είναι η πρώτη από τις σχέσεις προσδιορισμού των σταθερών a και b . Η δεύτερη προκύπτει από την απαίτηση για την τιμή $x_{\min} = -1$, η οποία αντιστοιχεί σε κάποια τιμή ψ_{\min} του ψ , για την οποία βάσει της (7.3.23) ισχύει

$$a \cos \psi_{\min} + b = -1 \tag{7.3.26}$$



Σχ. 7.11: Διάφορες περιπτώσεις ορατής περιοχής και οι τιμές ψ_{\max} και ψ_{\min}
 (α) για $\delta = 0$ και $kd < \pi$ ($d < \lambda/2$) (β) για $\delta \geq 0$ και $d < \lambda/2$ (γ) για $\delta < 0$ και $d < \lambda/2$
 (δ) για $\delta = 0$ και $d \geq \lambda/2$ (ε) για $\delta > 0$ και $d \geq \lambda/2$ (προφανής και η αντίστοιχη για $\delta < 0$)

Με τη βοήθεια και του Σχ. 7.11 παρατηρούμε ότι αν η ορατή περιοχή περιλαμβάνει την τιμή $\psi = \pi$, τότε η ελάχιστη τιμή του $\cos\psi$ είναι -1 και $\psi_{\min} = \pi$, οπότε η (7.3.26) γράφεται

$$-a + b = -1 \tag{7.3.27α}$$

Αφού η ορατή περιοχή είναι $\delta - kd \leq \psi \leq \delta + kd$, αυτό θα συμβεί εφόσον $\delta + kd \geq \pi$ είτε $\delta - kd \leq -\pi$. Σε αντίθετη περίπτωση, η ελάχιστη τιμή του $\cos\psi$ θα εμφανισθεί είτε στο άνω άκρο της ορατής περιοχής, εφόσον $\delta \geq 0$, οπότε $\psi_{\min} = \delta + kd$, είτε στο κάτω άκρο της ορατής περιοχής, εφόσον $\delta < 0$, οπότε $\psi_{\min} = \delta - kd$ (βλ. και το Σχ. 7.11β-γ). Έχουμε λοιπόν τις περιπτώσεις

$$\cos\psi_{\min} = \cos(\delta + kd) = \cos(kd + \delta) \quad , \quad \delta \geq 0$$

$$\cos\psi_{\min} = \cos(\delta - kd) = \cos(kd - \delta) \quad , \quad \delta < 0$$

και εύκολα παρατηρούμε ότι μπορούν να συγχωνευθούν στην

$$\cos\psi_{\min} = \cos(kd + |\delta|)$$

εισάγοντας την οποία η (7.3.26) γράφεται

$$a \cos(kd + |\delta|) + b = -1 \quad (7.3.27\beta)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση για τη γωνία μέγιστης ακτινοβολίας γ_{\max} του $S(\gamma)$

$$kd \cos\gamma_{\max} + \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = -kd \cos\gamma_{\max}$$

η (7.3.27β) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$a \cos[kd(1 + |\cos\gamma_{\max}|)] + b = -1 \quad (7.3.28)$$

Εάν δίνεται ο λόγος R , η x_0 προσδιορίζεται από την συνθήκη $T_N(x_0) = R$, δηλαδή από την (7.3.11) με $m = N$. Εάν αντί για τον λόγο R δίνεται το εύρος δέσμης Δ_0 , για την περίπτωση μετωπικής στοιχειοκεραίας ($\delta = 0$) ισχύει και εδώ (όπως εξηγήθηκε στα προηγούμενα) $\Delta_0 = \pi - 2\gamma_1$. Για να βρούμε την γ_1 συνδυάζουμε την (7.3.7) που δίνει τις ρίζες x_n του $T_N(x)$ με την (7.3.23) και έχουμε*

$$x_n = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right] = a \cos\psi_n + b \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7.3.29)$$

η οποία για $n = 1$ δίνει

$$a \cos\psi_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) - b$$

και αντικαθιστώντας από την (7.3.15) παίρνουμε

$$a \cos\left[kd \sin\left(\frac{\Delta_0}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) - b \quad (7.3.30)$$

η οποία αντικαθιστά στην περίπτωση αυτή την (7.3.25) και συνδυάζεται με την (7.3.27α) ή την (7.3.27β). Στην περίπτωση μη μετωπικής στοιχειοκεραίας ($\delta \neq 0$) δεν ισχύει πλέον η

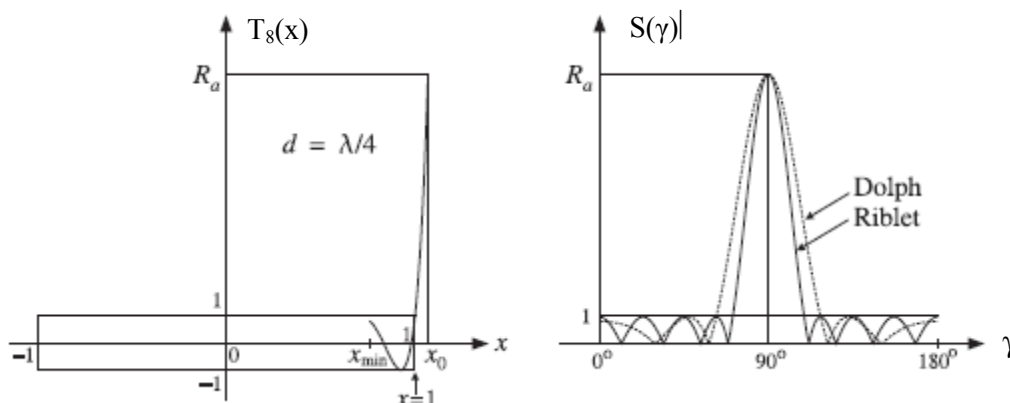
* Η (7.3.29) είναι αντίστοιχη της (7.3.12) η οποία είχε προκύψει συνδυάζοντας τις (7.3.7) και (7.3.9).

$\Delta_0 = \pi - 2\gamma_1$ αλλά η $\Delta_0 = \gamma_{-1} - \gamma_1$ και πρέπει να τροποποιηθούν ανάλογα οι (7.3.13), (7.3.15) ώστε να προκύψει μια σχέση αντίστοιχη της (7.3.25) η οποία και πάλι συνδυάζεται με την (7.3.27α) ή την (7.3.27β) για την εύρεση των a και b .

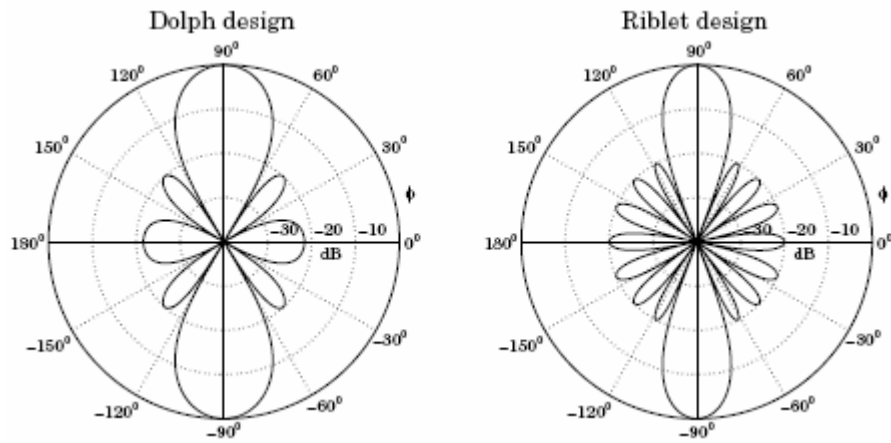
Συνοπτικά, η μέθοδος Riblet βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

- Ως αρχικά δεδομένα της μεθόδου δίνονται τα d, M, R , ή τα d, M, Δ_0 , με την προϋπόθεση ότι $M = 2N+1$
- Από το πλήθος των στοιχείων M προσδιορίζεται η τάξη $N = (M-1)/2$ του πολυωνύμου Chebyshev που θα χρησιμοποιηθεί.
- Αν δίνεται το R , υπολογίζεται το x_0 από την (7.3.11) και έπειτα οι σταθερές a και b είτε από το σύστημα των δύο εξισώσεων (7.3.25) – (7.3.27α), εφόσον $\delta + kd \geq \pi$ ή $\delta - kd \leq -\pi$, είτε από το σύστημα των (7.3.25) – (7.3.27β), εφόσον $\delta + kd < \pi$ και $\delta - kd > -\pi$.
- Αν δίνεται το εύρος δέσμης Δ_0 , υπολογίζονται οι a και b είτε από το σύστημα των δύο εξισώσεων (7.3.30) – (7.3.27α), εφόσον $\delta + kd \geq \pi$ ή $\delta - kd \leq -\pi$, είτε από το σύστημα των (7.3.30) – (7.3.27β), εφόσον $\delta + kd < \pi$ και $\delta - kd > -\pi$.
- Από την (7.3.24), εκτελώντας τις πράξεις και εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων $\cos(m\psi)$ με το ίδιο m , υπολογίζονται οι ρευματικοί συντελεστές $2B_0, B_1, \dots, B_N$.

Στα Σχ. 7.12 και 7.13 που ακολουθούν παρουσιάζεται (σε καρτεσιανό και πολικό διάγραμμα) ένα παράδειγμα στοιχειοκεραίας που σχεδιάστηκε με τη μέθοδο Riblet και συγκρίνεται με την αντίστοιχη σχεδίαση κατά τη μέθοδο Dolph, επιδεικνύοντας τη βελτίωση που επιτυγχάνει η μέθοδος Riblet ως προς το εύρος δέσμης του κύριου λοβού και, κατά συνέπεια, ως προς την κατευθυντικότητα.



Σχ. 7.12: Σχεδίαση κατά Dolph και Riblet για μετωπική στοιχειοκεραία με $M = 9$, $d = \lambda/4$ και $R^2 = 20$ dB. Φαίνεται το τμήμα του πολυωνύμου $T_8(x)$ που χρησιμοποιεί η μέθοδος Dolph, ενώ η μέθοδος Riblet χρησιμοποιεί «ολόκληρο» το $T_4(x)$.



Σχ. 7.13: Το παράδειγμα του Σχ. 7.12 σε πολική μορφή.

7.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ FOURIER

Η μέθοδος των αθροισμάτων Fourier έχει, υπό μία έννοια, τον γενικότερο χαρακτήρα από όσες εξετάστηκαν εδώ, αλλά η επιτυχία της είναι πιο «αβέβαιη». Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να προσεγγισθεί ο επιθυμητός παράγοντας διάταξης $S(\psi)$ με ένα πεπερασμένο άθροισμα Fourier και να χρησιμοποιηθούν οι συντελεστές του αθροίσματος αυτού ως ρευματικοί συντελεστές στοιχειοκεραίας η οποία θα προσεγγίζει τον συγκεκριμένο $S(\psi)$. Δηλ. η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί για να προσεγγίσει οποιονδήποτε $S(\psi)$ θεωρείται επιθυμητός, δεν είναι όμως δεδομένο ούτε αν θα πλεονεκτεί ως προς κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό (π.χ. η κατευθυντικότητα ή η στάθμη πλευρικών λοβών) ούτε πόσο καλή θα είναι η προσέγγιση.

Δεδομένου ότι ο παράγοντας διάταξης $S(\psi)$ είναι πάντοτε περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π , μπορεί να αναπτυχθεί κατά τα γνωστά σε σειρά Fourier

$$S(\psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m e^{jn\psi} \quad (7.4.1)$$

με μιγαδικούς συντελεστές που δίνονται από τις γνωστές σχέσεις της ανάλυσης Fourier

$$B_n = a_n + jb_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\psi) e^{-jn\psi} d\psi \quad (7.4.2a)$$

$$B_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} S(\psi) d\psi \quad (7.4.2b)$$

Εφόσον αναφερόμαστε σε πραγματική συνάρτηση $S(\psi)$, οι συντελεστές είναι συζυγείς μιγαδικοί (πλην του B_0 που είναι πραγματικός)

$$B_{-n} = B_n^*$$

και η σειρά Fourier ανάγεται στη μορφή

$$S(\psi) = B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [B_n e^{jn\psi} + B_n^* e^{-jn\psi}] \quad (7.4.3)$$

Σημειώνουμε ότι αυτή μπορεί να γραφεί και στη γνωστή τριγωνομετρική μορφή

$$S(\psi) = 2B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\psi) - b_n \sin(n\psi)] \quad (7.4.4)$$

Εάν η άπειρη σειρά Fourier περικοπεί μέχρι κάποια τάξη N , προκύπτει ένα πεπερασμένο άθροισμα

$$S_N(\psi) = B_0 + \sum_{n=1}^N [B_n e^{jn\psi} + B_n^* e^{-jn\psi}] \quad (7.4.5)$$

το οποίο αποτελεί προσέγγιση του $S(\psi)$ υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Θεωρούμε τώρα μια στοιχειοκεραία με περιττό πλήθος $M = 2N+1$ στοιχείων τα οποία είναι τοποθετημένα συμμετρικά όπως στο Σχ. 7.10(β), με μόνη διαφορά ότι οι ρευματικοί συντελεστές συμμετρικών στοιχείων περί το μέσον της στοιχειοκεραίας εδώ θεωρούνται μιγαδικοί συζυγείς και όχι ίσοι όπως στο Σχ. 7.10(β), ενώ ο μεσαίος γράφεται απλώς B_0 αντί $2B_0$. Τότε, εφαρμόζοντας τη γενική θεωρία ανάλυσης στοιχειοκεραιών, όπως π.χ. στην (7.3.18), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο παράγοντας διάταξης της στοιχειοκεραίας αυτής είναι αυτός που δίνεται από την (7.4.5). Αυτό σημαίνει ότι, αν συνθέσουμε την στοιχειοκεραία αυτή με τους ρευματικούς συντελεστές που δίνονται από τις (7.4.2α-β), λαμβάνουμε παράγοντα διάταξης ίσο με την προσέγγιση $S_N(\psi)$ τάξεως N της (7.4.5) στον επιθυμητό $S(\psi)$. Το σφάλμα της προσέγγισης για δεδομένο N , καθώς και η μορφή της (δηλ. ποια τμήματα του $S(\psi)$ προσεγγίζονται καλύτερα) εξαρτάται κατά πολύ από τη μορφή του $S(\psi)$. Ισοδύναμα, για δεδομένη προσέγγιση το πλήθος των στοιχείων που απαιτείται για να επιτευχθεί εξαρτάται ισχυρά από τη μορφή του $S(\psi)$, πράγμα που προφανώς έχει ιδιαίτερη σημασία στην πρακτική εφαρμογή.

7.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 7.1. α) Να σχεδιασθεί μετωπική ($\delta = 0$) στοιχειοκεραία $M = 5$ στοιχείων με βήμα $d = \lambda/5$, δηλ. να προσδιορισθούν οι κανονικοποιημένοι ρευματικοί συντελεστές (A_m / A_{M-1}), με τη μέθοδο του Schelkunoff. Να σχεδιασθεί ο παράγοντας διάταξης $S(\gamma)$ στη μορφή $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ και να συγκριθεί η συμπεριφορά της στοιχειοκεραίας αυτής με την αντίστοιχη ομοιόμορφη στοιχειοκεραία.

β) Να σχεδιασθούν οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ για βήμα $d = \lambda/4$ με τις ίδιες θέσεις των ριζών του πολυωνύμου $S(z)$ και να σχολιασθεί η επίπτωση που έχει η μεταβολή αυτή της ορατής περιοχής στη συμπεριφορά της στοιχειοκεραίας Schelkunoff.

γ) Ποια θα έπρεπε να είναι η θέση των ριζών μετωπικής στοιχειοκεραίας σύμφωνα με τη μέθοδο Schelkunoff για βήμα $d = \lambda/4$; Να προσδιορισθούν οι κανονικοποιημένοι ρευματικοί συντελεστές και να σχεδιασθούν οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ που προκύπτουν.

Απάντηση

α) Εφόσον $M = 5$, θα χρησιμοποιηθεί πολυώνυμο $S(z)$ βαθμού $M - 1 = 4$, με 4 ρίζες στον μοναδιαίο κύκλο. Δεδομένου ότι η στοιχειοκεραία είναι μετωπική ($\delta = 0$) και $kd = 2\pi/5$, η ορατή περιοχή είναι $-2\pi/5 \leq \psi \leq 2\pi/5$. Σύμφωνα με τη μέθοδο Schelkunoff, οι θέσεις των 4 ριζών προκύπτουν ισοκατανέμοντας αυτές εντός της ορατής περιοχής η οποία έχει εύρος $2kd = 4\pi/5$, οπότε τις τοποθετούμε ανά γωνιακές αποστάσεις $\Delta\psi = 2kd/4 = \pi/5$ (δηλ. ανά 36°) και προκύπτουν οι ρίζες

$$e^{j\psi_m} = e^{jm\pi/5} \quad m = -2, -1, 1, 2$$

οι οποίες μπορούν να γραφούν και αναλυτικότερα (αλλάζοντας λίγο τον δείκτη m των z_m για να έχουμε συνεχή αρίθμηση από 1 ως 4):

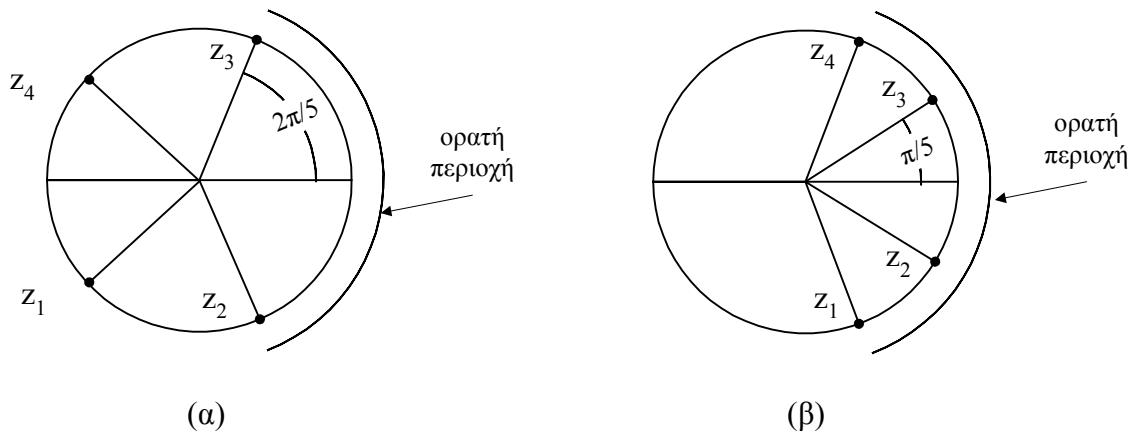
$$z_1 = e^{-j2\pi/5}, \quad z_2 = e^{-j\pi/5}, \quad z_3 = e^{j\pi/5}, \quad z_4 = e^{j2\pi/5}$$

όπου η τιμή $m = 0$ έχει παραλειφθεί διότι αντιστοιχεί στην τιμή της γωνίας μέγιστης ακτινοβολίας $\gamma_{\max} = 90^\circ$, δεδομένου ότι $\psi_{\max} = kd \cos\gamma_{\max} + \delta = 0$, και άρα εκεί δεν τοποθετείται ρίζα.

Σημειώνουμε ότι η αντίστοιχη ομοιόμορφη στοιχειοκεραία 4 στοιχείων (μετωπική με το ίδιο βήμα, δηλ. με την ίδια ορατή περιοχή) έχει, κατά τα γνωστά, τις 4 ρίζες

$$e^{j\psi_m} = e^{j2m\pi/5} \quad m = -2, -1, 1, 2$$

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι ρίζες των εν λόγω 2 στοιχειοκεραιών.



Σχ. 11.1-1: Οι ρίζες του S(z): (α) Ομοιόμορφη στοιχειοκεραία, (β) Schelkunoff

Από τις ρίζες αυτές, το πολυώνυμο S(z) / A₄ σε παραγοντοποιημένη μορφή είναι

$$S(z)/A_4 = (z - e^{-j2\pi/5})(z - e^{-j\pi/5})(z - e^{j\pi/5})(z - e^{j2\pi/5})$$

και με εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η ανηγμένη μορφή του:

$$\begin{aligned} \frac{S(z)}{A_4} &= z^4 - (e^{-j2\pi/5} + e^{-j\pi/5} + e^{j\pi/5} + e^{j2\pi/5})z^3 + \\ &+ (e^{-j3\pi/5} + e^{-j\pi/5} + 1 + 1 + e^{j\pi/5} + e^{j3\pi/5})z^2 - (e^{-j2\pi/5} + e^{-j\pi/5} + e^{j\pi/5} + e^{j2\pi/5})z + 1 \end{aligned}$$

Για την περαιτέρω απλοποίηση των κανονικοποιημένων ρευματικών συντελεστών μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι γίνεται αναγωγή των μιγαδικών όρων ανά 2 ως εξής:

$$\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_4} = - \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{-j\frac{\pi}{5}} + e^{j\frac{\pi}{5}} + e^{j\frac{2\pi}{5}} \right) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\frac{A_2}{A_4} = e^{-j\frac{3\pi}{5}} + e^{-j\frac{\pi}{5}} + 1 + 1 + e^{j\frac{\pi}{5}} + e^{j\frac{3\pi}{5}} = 2 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2 + 4 \cos\left(\frac{4\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική σχέση

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Εξυπακούεται ότι ο υπολογισμός των συντελεστών θα μπορούσε να γίνει και κατευθείαν από τα μιγαδικά αθροίσματα χωρίς την αναγωγή αυτή, η οποία απλώς διευκολύνει τις πράξεις. Είτε με τον ένα είτε με τον άλλο τρόπο προκύπτουν οι αριθμητικές τιμές

$$\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_4} = -4 \cos(54^\circ) \cos(18^\circ) \cong -2,236$$

$$\frac{A_2}{A_4} = 2 + 4 \cos(72^\circ) \cos(36^\circ) = 3$$

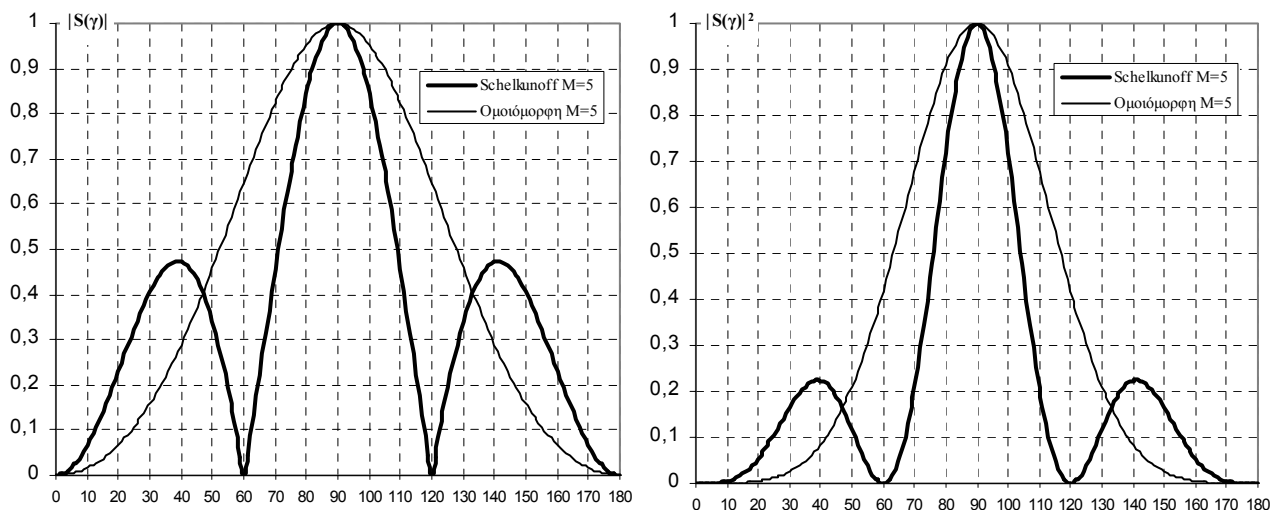
Έτσι το πολυώνυμο S(z) / A₄ γράφεται τελικά στη μορφή

$$\frac{S(z)}{A_4} = z^4 - 2,236z^3 + 3z^2 - 2,236z + 1$$

από την οποία με διαδοχικές αντικαταστάσεις προκύπτουν οι αντίστοιχες μορφές των $S(\psi)$ και $S(\gamma)$ (ανηγμένες και πάλι στον μεγιστοβάθμιο όρο). Τελικά ο $S(\gamma)$ προκύπτει αντικαθιστώντας (κατά τα γνωστά)

$$\psi = kd \cos \gamma + \delta = \frac{2\pi}{5} \cos \gamma, \quad z = e^{j\psi} = e^{j\frac{2\pi}{5} \cos \gamma}$$

και εκτελώντας τις πράξεις για τις διάφορες τιμές του γ . Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ που υπολογίζονται με τον τρόπο αυτό για την συγκεκριμένη στοιχειοκεραία Schelkunoff, καθώς και για την αντίστοιχη ομοιόμορφη στοιχειοκεραία. Σημειώνουμε ότι, προκειμένου να δειχθούν εμφανέστερα οι μορφολογικές διαφορές των διαγραμμάτων των δύο στοιχειοκεραιών, οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ έχουν κανονικοποιηθεί στη μέγιστη τιμή τους (δηλ. κάθε τιμή έχει διαιρεθεί με τη μέγιστη), οπότε η μέγιστη τιμή και στις δύο περιπτώσεις τοποθετείται στη μονάδα.



(α)

(β)

Σχ. 11.1-2: Κανονικοποιημένα διαγράμματα για $d = \lambda/5$ (α) του $|S(\gamma)|$, (β) του $|S(\gamma)|^2$

Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι η στοιχειοκεραία Schelkunoff πλεονεκτεί σαφώς ως προς το εύρος δέσμης του κύριου λοβού, άρα και ως προς την κατευθυντικότητα. Η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία (με το συγκεκριμένο βήμα d) δεν έχει πλευρικούς λοβούς, πράγμα που εξηγείται από τη θέση των ριζών της στην ορατή περιοχή.

Επισημαίνουμε ότι οι γωνίες μηδενισμού του $S(\gamma)$ προσδιορίζονται από τις θέσεις των ριζών σύμφωνα με τη γνωστή σχέση

$$\psi_m = kd \cos \gamma_m + \delta = \frac{2\pi}{5} \cos \gamma_m \Leftrightarrow \gamma_m = \cos^{-1} \left(\frac{\psi_m}{kd} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{5}{2\pi} \psi_m \right)$$

δηλαδή

$$\gamma_m = \cos^{-1}\left(\frac{5}{2\pi} \frac{m\pi}{5}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{m}{2}\right) \quad m = -2, -1, 1, 2$$

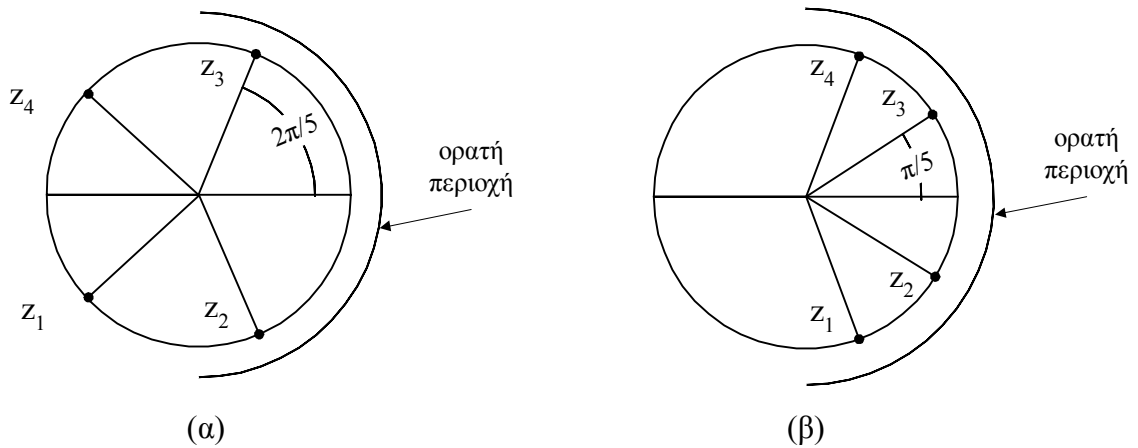
από όπου παίρνουμε (αλλάζοντας και πάλι τον δείκτη m των γ_m για αρίθμηση από 1 ως 4)

$$\gamma_1 = \cos^{-1}(1) = 0 \quad , \quad \gamma_2 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\gamma_3 = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \quad , \quad \gamma_4 = \cos^{-1}(-1) = \pi = 180^\circ$$

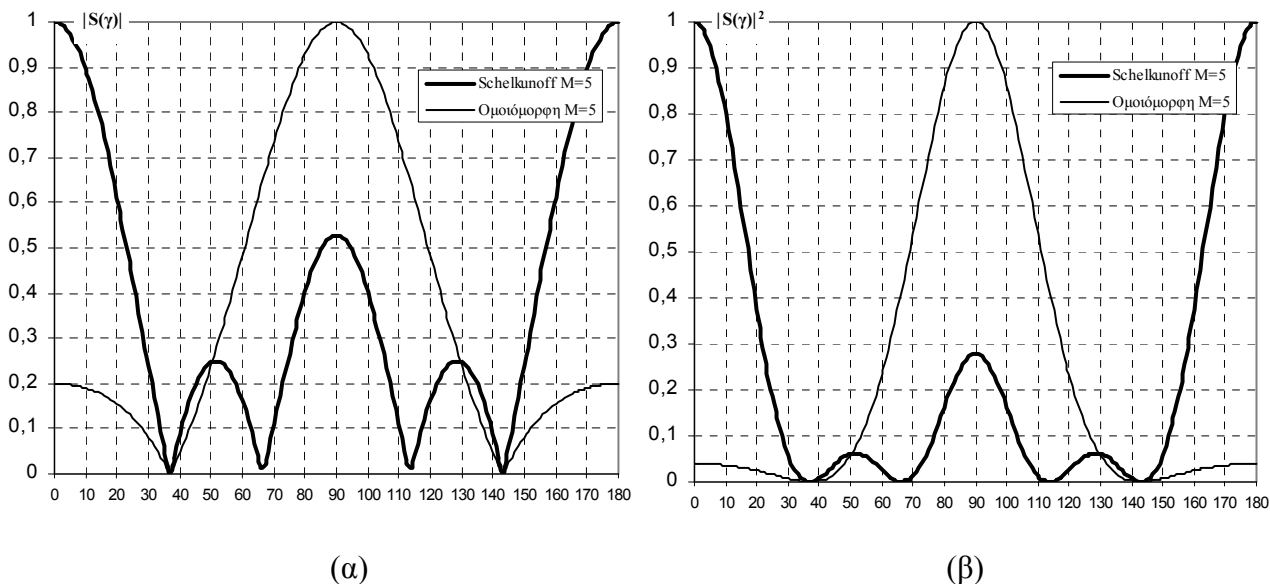
Οι γωνίες αυτές συμβαδίζουν με την εικόνα των διαγραμμάτων στο Σχ. Π7.1-2 ανωτέρω. Παρέχουν επίσης μια προσεγγιστική μέθοδο σχεδιασμού του διαγράμματος του $|S(\gamma)|$ ή του $|S(\gamma)|^2$, η οποία χρησιμοποιούνταν συχνά παλιότερα που δεν υπήρχαν προσωπικοί υπολογιστές σε ευρεία χρήση και μπορεί ακόμη να χρησιμεύσει εφόσον επιθυμούμε μια σύντομη και πρόχειρη εκτίμηση της εικόνας των διαγραμμάτων χωρίς τη χρήση ΗΥ. Η μέθοδος συνίσταται στο να θεωρηθεί ότι τα τοπικά μέγιστα των λοβών του $|S(\gamma)|$ ή του $|S(\gamma)|^2$ βρίσκονται περίπου στα μεσοδιαστήματα των μηδενισμών, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τις τιμές του $|S(\gamma)|$ ή του $|S(\gamma)|^2$ στις θέσεις αυτές και στη συνέχεια να σχεδιάσουμε ένα προσεγγιστικό διάγραμμα μόνο με αυτά τα σημεία. Πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος αυτή είναι ανεκτή κυρίως για σχετικά μικρούς δευτερεύοντες λοβούς, ενώ για τον κύριο λοβό είναι καλύτερα να λάβουμε περισσότερα σημεία (π.χ. ανά 5° ή ανά 10° , ανάλογα και με το εύρος του λοβού και την επιδιωκόμενη ακρίβεια). Ως άσκηση για τον αναγνώστη προτείνεται η σχεδίαση ενός πρόχειρου διαγράμματος με τη μέθοδο αυτή και η σύγκριση με το ακριβές που φαίνεται παραπάνω.

β) Η μόνη διαφορά από την προηγούμενη περίπτωση είναι το εύρος της ορατής περιοχής επειδή $kd = \pi/2$, οπότε η ορατή περιοχή είναι $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$. Τα υπόλοιπα στοιχεία (θέσεις ριζών, τάξη και συντελεστές του πολωνύμου κτλ.) παραμένουν τα ίδια, πρέπει όμως να σημειωθεί ότι αλλάζουν οι γωνίες μηδενισμού επειδή αλλάζει η τιμή του kd . Η νέα εικόνα των ριζών και της ορατής περιοχής παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχ. Π7.1-3: Οι ρίζες του $S(z)$ για $d = \lambda/4$: (α) Ομοιόμορφη, (β) Schelkunoff

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζονται τα κανονικοποιημένα διαγράμματα $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ για τα οποία ο υπολογισμός έγινε όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Από τα διαγράμματα παρατηρούμε μια αρκετά εντυπωσιακή μεταβολή για την στοιχειοκεραία Schelkunoff, η ακτινοβολία της οποίας έχει μετατραπεί σε αμφίπλευρη αξονική. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή οι ακραίες ρίζες z_1 και z_4 δεν βρίσκονται στα άκρα της ορατής περιοχής, τα οποία είναι πλέον τα σημεία $z = e^{j\pi/4}$ και $z = e^{-j\pi/4}$. Κατά συνέπεια, τα σημεία αυτά δεν αντιστοιχούν σε μηδενισμούς του $|S(\gamma)|$ αλλά σε μέγιστα, διότι οι αποστάσεις αυτών από τις ρίζες είναι μεγάλες και σύμφωνα με την (5.4.2) το μέτρο $|S(\gamma)|$ για τα εν λόγω σημεία ισούται ακριβώς με το γινόμενο των αποστάσεων αυτών, όπως εξηγήθηκε στα προηγούμενα. Το διάγραμμα της ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας παρουσιάζει μικρότερη μεταβολή η οποία έγκειται στην εμφάνιση δύο πλευρικών λοβών που αντιστοιχούν στα διαστήματα από τους δύο μηδενισμούς μέχρι τα άκρα της ορατής περιοχής.

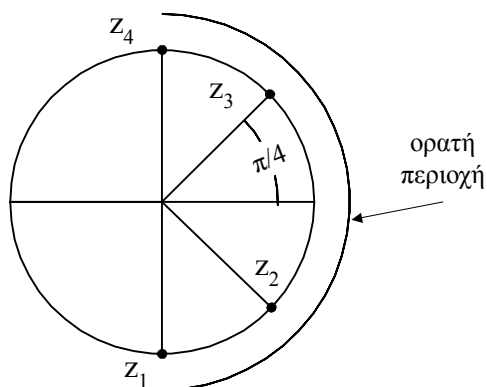


Σχ. Π7.1-4: Κανονικοποιημένα διαγράμματα για $d = \lambda/4$ (α) του $|S(\gamma)|$, (β) του $|S(\gamma)|^2$

γ) Λαμβάνοντας υπόψη και τις προηγούμενες παρατηρήσεις, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μια καλύτερη τοποθέτηση των ριζών για την στοιχειοκεραία Schelkunoff προκύπτει αν αραιώσουν οι αποστάσεις αυτών ώστε να καλύπτουν πλήρως την ορατή περιοχή $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$. Αυτό επιτυγχάνεται αν επιλεγούν οι ακόλουθες θέσεις ριζών

$$z_1 = e^{-j2\pi/4}, \quad z_2 = e^{-j\pi/4}, \quad z_3 = e^{j\pi/4}, \quad z_4 = e^{j2\pi/4}$$

οι οποίες φαίνονται και στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. Π7.1-5: Η ενδεικτική θέση των ριζών του $S(z)$ για $d = \lambda/4$ κατά Schelkunoff

Από τις νέες αυτές ρίζες προκύπτει η παραγοντοποιημένη μορφή του νέου $S(z) / A_4$

$$S(z)/A_4 = (z - e^{-j2\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})(z - e^{j\pi/4})(z - e^{j2\pi/4})$$

και με εκτέλεση των πράξεων η αντίστοιχη ανηγμένη μορφή του:

$$\frac{S(z)}{A_4} = z^4 - (e^{-j2\pi/4} + e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/4} + e^{j2\pi/4})z^3 + (e^{-j3\pi/4} + e^{-j\pi/4} + 1 + 1 + e^{j\pi/4} + e^{j3\pi/4})z^2 - (e^{-j2\pi/4} + e^{-j\pi/4} + e^{j\pi/4} + e^{j2\pi/4})z + 1$$

Είναι και πάλι εφικτή η αναγωγή των μιγαδικών όρων ανά 2

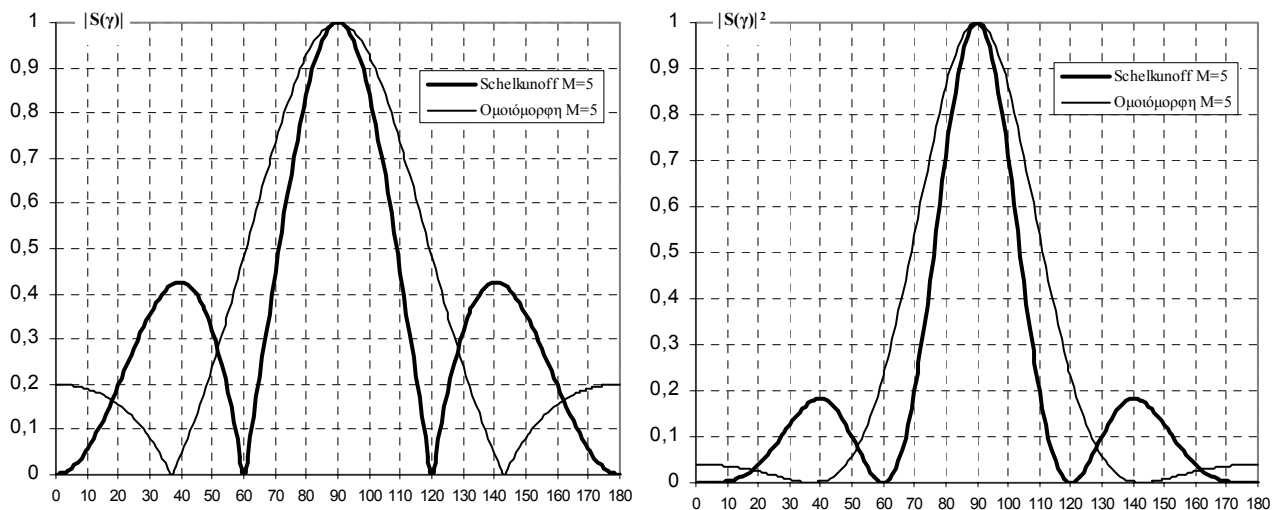
$$\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_4} = - \left(e^{-j\frac{2\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{2\pi}{4}} \right) = -2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{A_2}{A_4} = e^{-j\frac{3\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}} + 1 + 1 + e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{3\pi}{4}} = 2 + 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + 4 \cos(\pi) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

και σε κάθε περίπτωση οι πράξεις οδηγούν στα αριθμητικά αποτελέσματα

$$\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_4} = -\sqrt{2} \cong -1,414 \quad , \quad \frac{A_2}{A_4} = 2$$

Με τη γνωστή αντικατάσταση $\psi = kd \cos \gamma + \delta$ υπολογίζονται οι τιμές του $S(\gamma)$ και στη συνέχεια οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ που παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



(α)

(β)

Σχ. Π7.1-6: Τα διαγράμματα με τη νέα σχεδίαση κατά Schelkunoff για $d = \lambda/4$

Από το Σχ. Π7.1-6 είναι εμφανής η υπεροχή της στοιχειοκεραίας Schelkunoff (η οποία εδώ έχει γίνει και πάλι μετωπική) ως προς την κατευθυντικότητα, ενώ η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία παρουσιάζει μικρότερους πλευρικούς λοβούς, τους ίδιους άλλωστε όπως και στην αμέσως προηγούμενη περίπτωση για $d = \lambda/4$.

Παράδειγμα 7.2. Να σχεδιασθεί στοιχειοκεραία Chebyshev 5 στοιχείων με βήμα $d = 3\lambda/8$, κατεύθυνση μέγιστης ακτινοβολίας $\gamma_{\max} = 48,2^\circ$ (η οποία αντιστοιχεί σε $\cos \gamma_{\max} = 2/3$) και στάθμη πλευρικών λοβών 20 dB κάτω από το μέγιστο του κύριου λοβού. Να προσδιορισθούν οι κανονικοποιημένοι ρευματικοί συντελεστές, να βρεθούν οι γωνίες μηδενισμού και να σχεδιασθεί ο παράγοντας διάταξης $|S(\gamma)|$.

Απάντηση

Επειδή $d < \lambda/2$ και επίσης η στοιχειοκεραία δεν είναι μετωπική, θα χρησιμοποιηθεί για τη σχεδίαση η μέθοδος του Riblet, δηλ. θα βασισθούμε στην αντικατάσταση (7.2.24). Δεδομένου ότι $M = 5$, θα χρησιμοποιηθεί το πολυώνυμο Chebyshev τάξης $N = 2$, δηλ. το $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

Υπολογίζουμε πρώτα την παράμετρο x_0 . Όπως έχει σημειωθεί, η απαίτηση για στάθμη πλευρικών λοβών 20 dB κάτω από τον κύριο λοβό σημαίνει ότι $10\log(R^2) = 20$, δηλ. $20\log R = 20$, απ' όπου $\log R = 1$, δηλ. $R = 10$. Επομένως η (7.2.12) με $R=10$ και $m=2$ δίνει

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[\left(10 + \sqrt{100 - 1} \right)^{1/2} + \left(10 - \sqrt{100 - 1} \right)^{1/2} \right] \cong 2,35$$

Για τον προσδιορισμό των σταθερών a και b της (7.2.24) θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η ορατή περιοχή. Ισχύει $kd = 3\pi/4$, ενώ το δ προσδιορίζεται από τη γωνία μέγιστης ακτινοβολίας μέσω της γνωστής σχέσης

$$kd \cos \gamma_{\max} + \delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta = -kd \cos \gamma_{\max}$$

η οποία, αφού $\cos \gamma_{\max} = 2/3$, δίνει

$$\delta = -kd \cos \gamma_{\max} = -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

Επομένως η ορατή περιοχή είναι $-\pi/2 - 3\pi/4 \leq \psi \leq -\pi/2 + 3\pi/4$, δηλ. $-5\pi/4 \leq \psi \leq \pi/4$. Κατά συνέπεια αυτή περιλαμβάνει το σημείο $\psi = -\pi$, και επομένως για τον προσδιορισμό των a και b θα χρησιμοποιηθεί το σύστημα των εξισώσεων (7.2.26) και (7.2.28α):

$$\begin{cases} x_0 = a + b \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x_0 + 1}{2} \\ b = \frac{x_0 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cong 1,67 \\ b \cong 0,67 \end{cases}$$

Οι ρευματικοί συντελεστές $2B_0, 2B_1, \dots, 2B_N$ της (7.2.25) προκύπτουν κατά τα γνωστά εισάγοντας την (7.2.24) στην έκφραση του $T_2(x)$ και εκτελώντας τις πράξεις, οπότε έχουμε

$$T_2(a \cos \psi + b) = 2(a + b \cos \psi)^2 - 1 = 2a^2 \cos^2 \psi + 4ab \cos \psi + 2b^2 - 1$$

η οποία με τη βοήθεια της $2\cos^2 \psi = 1 + \cos(2\psi)$ γίνεται, όπως ακριβώς στο παράδειγμα της παραγρ. 7.3 ανωτέρω

$$T_2(a \cos \psi + b) = a^2 \cos(2\psi) + 4ab \cos \psi + a^2 + 2b^2 - 1 = S(\psi)$$

Εξισώνοντας με την (7.2.25) παίρνουμε

$$2B_0 = a^2 + 2b^2 - 1 \quad , \quad 2B_1 = 4ab \quad , \quad 2B_2 = a^2$$

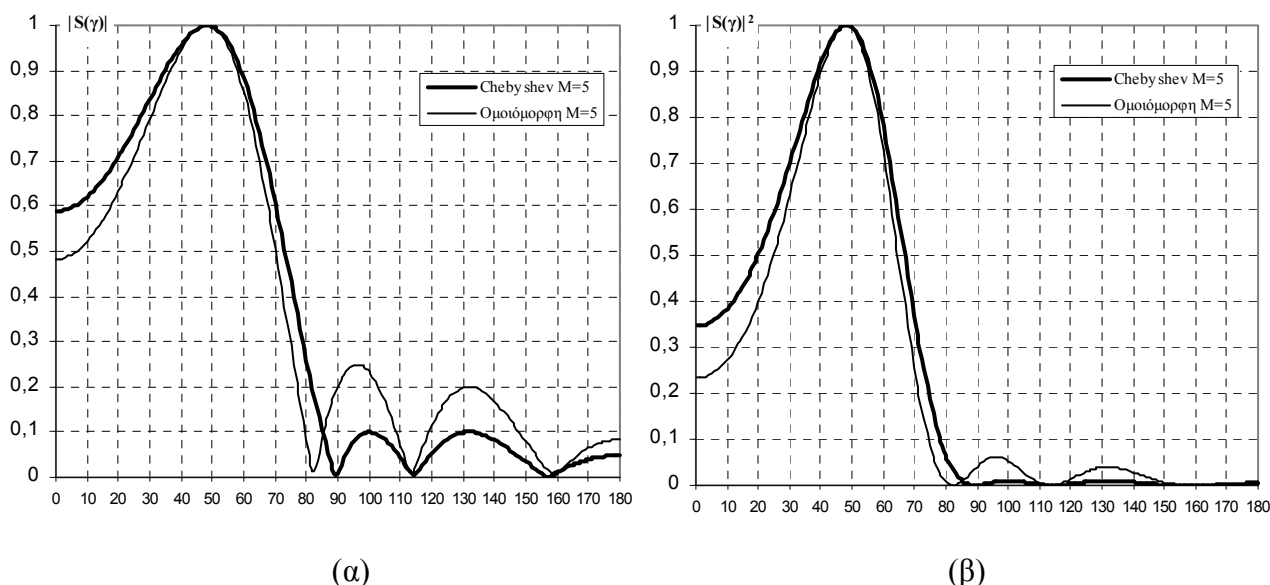
και με εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων προκύπτουν οι ρευματικοί συντελεστές

$$2B_0 \cong 2,68 \quad , \quad B_1 \cong 2,24 \quad , \quad B_2 \cong 1,39$$

Οι συντελεστές αυτοί θα πρέπει αφ' εαυτών να θεωρηθούν ως ανηγμένοι (κανονικοποιημένοι), όπως έχει ήδη υποσημειωθεί στα προηγούμενα. Μπορούν όμως και να κανονικοποιηθούν ως προς τον συντελεστή μέγιστης τάξης B_2 , οπότε γράφονται

$$\frac{2B_0}{B_2} \cong 1,93 \quad , \quad \frac{B_1}{B_2} \cong 1,61$$

Ο υπολογισμός του $S(\gamma)$ γίνεται με την αντικατάσταση $\psi = kdcos\gamma + \delta$ είτε από την (7.2.25) είτε κατευθείαν από την έκφραση $T_2(a \cos\psi + b)$, οπότε προκύπτουν οι $|S(\gamma)|$ και $|S(\gamma)|^2$ που παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα, σε σύγκριση με την αντίστοιχη ($M = 5$) ομοιόμορφη στοιχειοκεραία. Είναι εμφανές ότι η στοιχειοκεραία Chebyshev εμφανίζει πολύ καλύτερη συμπεριφορά ως προς τη στάθμη των πλευρικών λοβών, ενώ η ομοιόμορφη έχει ελαφρό πλεονέκτημα ως προς την κατευθυντικότητα.



Σχ. Π7.2-1: Κανονικοποιημένα διαγράμματα (α) του $|S(\gamma)|$, (β) του $|S(\gamma)|^2$

Για τον υπολογισμό των γωνιών μηδενισμού θα χρησιμοποιηθεί η (7.2.30) στη μορφή

$$x_n = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2N}\right] = a \cos\psi_n + b \quad \Leftrightarrow \quad \cos\psi_n = \frac{x_n - b}{a}$$

Για τη συγκεκριμένη τάξη του πολωνύμου Chebyshev $N = 2$ λαμβάνουμε $n = 1, 2$ και προκύπτουν οι ρίζες αυτού

$$x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707 \quad , \quad x_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0,707$$

Από αυτές με αντικατάσταση των a και b προκύπτουν σειρές τιμών για τις ρίζες ψ_n

$$\cos\psi_{1n} = \frac{x_1 - b}{a} \cong \frac{0,707 - 0,67}{1,67} \cong 0,022 \quad \Rightarrow \quad \psi_{1n} \cong \pm 88,7^\circ + 2n \cdot 180^\circ$$

$$\cos \psi_{2n} = \frac{x_2 - b}{a} \cong \frac{-0,707 - 0,67}{1,67} \cong -0,825 \Rightarrow \psi_{2n} \cong \pm 145,6^\circ + 2n \cdot 180^\circ$$

από τις οποίες πρέπει να επιλεγούν όσες είναι εντός της ορατής περιοχής, ήτοι

$$\psi_1 \cong -88,7^\circ, \quad \psi_2 \cong -145,6^\circ, \quad \psi_3 \cong 145,6^\circ$$

Με βάση την $\psi = kd \cos \gamma + \delta$ υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές της γωνίας γ

$$\gamma_1 \cong 89,5^\circ, \quad \gamma_2 \cong 114,3^\circ, \quad \gamma_3 \cong 157,1^\circ$$

οι οποίες φαίνονται και στα διαγράμματα του Σχ. Π7.2-1 παραπάνω. Για μια πρόχειρη σχεδίαση των διαγραμμάτων μπορεί και πάλι (προφανώς) να χρησιμοποιηθεί η προσεγγιστική μέθοδος που αναφέρθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα.

ΜΕΡΟΣ Γ: ΡΑΔΙΟΖΕΥΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΤΗΣ ΓΗΣ

8.1. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗ ΡΑΔΙΟΚΥΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑ

8.1.1. Κατηγοριοποίηση των ραδιοκυμάτων – Ζώνες συχνότητων

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών (H/M) κυμάτων στην ατμόσφαιρα της Γης αποτελεί το μέσο για την υλοποίηση των ασύρματων τηλεπικοινωνιακών ζεύξεων (και φυσικά των εφαρμογών ραδιοεντοπισμού, πλοήγησης κτλ.) Οι ιδιότητες της διάδοσης και τα σχετικά φυσικά φαινόμενα ενδιαφέροντος εξαρτώνται τόσο από τη συχνότητα των H/M κυμάτων όσο και από τις περιοχές της ατμόσφαιρας εντός των οποίων πραγματοποιείται η διάδοση. Οι συχνότητες των H/M κυμάτων έχουν κατηγοριοποιηθεί διεθνώς με διάφορες τυποποιήσεις, οι οποίες κατανέμουν το φάσμα των ραδιοσυχνοτήτων σε ζώνες (bands) με μεγαλύτερο ή μικρότερο εύρος ανάλογα με τον σκοπό της κατηγοριοποίησης. Υπάρχουν οι κατηγοριοποιήσεις επιστημονικού χαρακτήρα για τη διευκόλυνση της ανταλλαγής πληροφορίας, καθώς και οι (λεπτομερέστερες συνήθως) κατηγοριοποιήσεις των εποπτικών αρχών και οργάνων (σε εθνικό και διεθνές επίπεδο) οι οποίες έχουν ρυθμιστικό σκοπό, δηλαδή καθορίζουν την επιτρεπόμενη χρήση ανά ζώνη συχνότητας, και ενδεχομένως τους δικαιούχους και τις προϋποθέσεις της χρήσης αυτής. Πολύ διαδεδομένη (στην πρώτη κατηγορία) είναι η τυποποίηση της Διεθνούς Ένωσης Τηλεπικοινωνιών (International Telecommunication Union – ITU) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Ζώνη συχνότητας	Μήκος κύματος	Ονομασία συχνότητας	Σύμβολο	Χαρακτηρισμός κυμάτων	Ζώνη ITU
3 – 30 kHz	100 – 10 km	Πολύ χαμηλή (Very Low Frequency)	VLF	Μυριομετρικά	4
30 – 300 kHz	10 – 1 km	Χαμηλή (Low Frequency)	LF	Χιλιομετρικά (Μακρά)	5
0,3 – 3 MHz	1000 – 100 m	Μέση (Medium Frequency)	MF	Εκατομετρικά (Μεσαία)	6
3 – 30 MHz	100 – 10 m	Υψηλή (High Frequency)	HF	Δεκαμετρικά (Βραχεία)	7
30 – 300 MHz	10 – 1 m	Πολύ υψηλή (Very High Frequency)	VHF	Μετρικά (Υπερβραχεία)	8
0,3 – 3 GHz	1 m – 10 cm	Εξαιρετικά υψηλή (Ultra High Frequency)	UHF	Δεκατομετρικά	9
3 – 30 GHz	10 – 1 cm	Υπερυψηλή (Super High Frequency)	SHF	Εκατοστομετρικά	10
30 – 300 GHz	1 cm – 1 mm	Υπερβολικά υπερυψηλή (Extremely High Frequency)	EHF	Χιλιοστομετρικά	11

Πίν. 8.1: Οι ζώνες ραδιοσυχνοτήτων σύμφωνα με την τυποποίηση της ITU

Κάτω από τις συχνότητες του πίνακα 8.1 βρίσκονται τρεις ακόμη ζώνες συχνοτήτων της

ITU με μήκος κύματος από 100.000 km ως 100 km (3 – 30 Hz: [ELF] Extremely Low Frequency, 30 – 300 Hz: [SLF] Super Low Frequency, 300 Hz – 3 kHz: [ULF] Ultra Low Frequency). Οι ζώνες αυτές χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την υποβρύχια επικοινωνία*. Πάνω από τις συχνότητες του πίνακα 8.1 αρχίζουν οι οπτικές ζώνες στις οποίες αναπτύσσονται οι υπέρυθρες, ορατές και υπεριώδεις ακτινοβολίες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις σύγχρονες τηλεπικοινωνιακές και άλλες εφαρμογές παρουσιάζει η περιοχή των **μικροκυμάτων**, η οποία περιέχεται σε περισσότερες από μία ζώνες της ITU. Ο «παραδοσιακός» ορισμός των μικροκυμάτων (όπως δίνεται στη βιβλιογραφία) περιλαμβάνει τις συχνότητες από 300 MHz (0,3 GHz) ως 300 GHz. Στην τρέχουσα πρακτική χρήση του όρου, όμως, είναι μάλλον συνηθέστερο να εννοούνται οι συχνότητες από περίπου 1 GHz και πάνω (ενώ το άνω όριο της περιοχής τίθεται από τις τεχνολογικές εφαρμογές ενδιαφέροντος, οι οποίες επί του παρόντος δεν έχουν εξαντλήσει το θεωρητικό ανώτερο όριο των 300 GHz). Παρακάτω αναφέρουμε αναλυτικότερα την κατηγοριοποίηση** των μικροκυματικών συχνοτήτων σύμφωνα με την ονοματολογία που έχει υιοθετήσει η IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers).

Όνομασία ζώνης	Συχνότητα (GHz)	Μήκος κύματος (cm)
L band	1 – 2	30,0 – 15,0
S band	2 – 4	15 – 7,5
C band	4 – 8	7,5 – 3,8
X band	8 – 12	3,8 – 2,5
Ku band	12 – 18	2,5 – 1,7
K band	18 – 27	1,7 – 1,1
Ka band	27 – 40	1,1 – 0,75
V band	40 – 75	0,75 – 0,40
W band	75 – 110	0,40 – 0,27

Πίν. 8.2: Οι ζώνες μικροκυματικών συχνοτήτων σύμφωνα με την τυποποίηση της IEEE (IEEE Standard 521-1984)

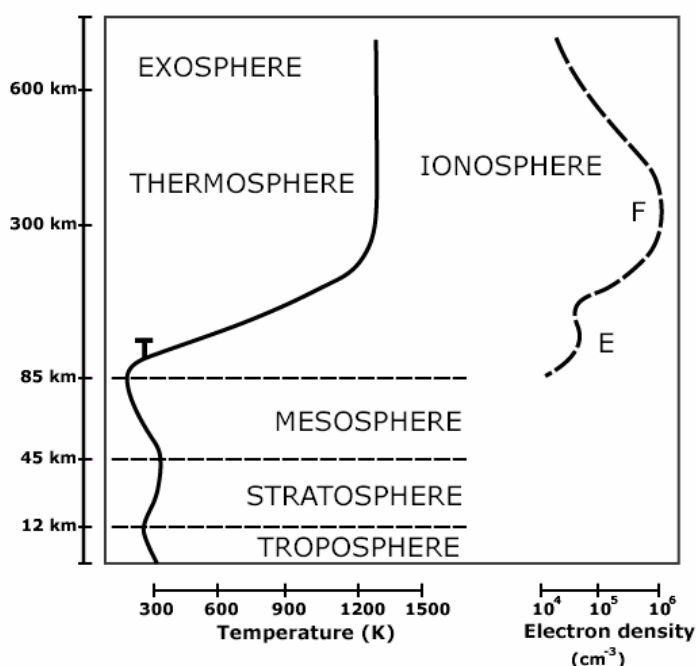
8.1.2. Οι περιοχές της ατμόσφαιρας

Η διάδοση των ραδιοκυμάτων στην γήινη ατμόσφαιρα παρουσιάζει διαφορετικά χαρακτηριστικά στις διάφορες επιμέρους περιοχές της ατμόσφαιρας. Η ατμόσφαιρα υποδιαιρείται σε στρώματα με διάφορους τρόπους ανάλογα με τις ιδιότητες ως προς τις οποίες γίνεται η υποδιαίρεση (π.χ. θερμικές, μετεωρολογικές, χημικές κ.α.). Το κατώτερο

* Ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων που μπορεί να επιτευχθεί είναι βέβαια πολύ χαμηλός.

** Η κατηγοριοποίηση αυτή προέρχεται από τις εφαρμογές ραντάρ (κυρίως πολιτικές αλλά και στρατιωτικές, για τις οποίες όμως συχνά προτιμάται άλλη κατηγοριοποίηση, π.χ. βάσει προτύπων του NATO) και λέγεται ότι κατάγεται από τον Β' παγκόσμιο πόλεμο όπου οι ζώνες συχνοτήτων ονομάστηκαν με συνθηματικό και (τότε) απόρρητο κώδικα ο οποίος δημοσιοποιήθηκε μετά το τέλος του πολέμου.

στρώμα της ατμόσφαιρας είναι η **τροπόσφαιρα** η οποία εκτείνεται από την επιφάνεια της γης μέχρι ύψος περίπου 10 km κατά μέσον όρο, το οποίο διαφοροποιείται με το γεωγραφικό πλάτος (στη βιβλιογραφία αναφέρεται ύψος 6-8 km στους πόλους και 17-20 km στον ισημερινό). Στο στρώμα αυτό εμφανίζονται τα διάφορα καιρικά φαινόμενα. Ακολουθεί η **στρατόσφαιρα** ως τα 45-50 km περίπου (η οποία περιλαμβάνει και το στρώμα του όζοντος) και στη συνέχεια η **μεσόσφαιρα** και η **θερμόσφαιρα**. Τα στρώματα αυτά ορίζονται με βάση την θερμοκρασία. Πιο συγκεκριμένα, η τροπόσφαιρα χαρακτηρίζεται από σχετικά σταθερή μείωση της θερμοκρασίας (με ρυθμό της τάξης των $6,5 \text{ }^\circ\text{C} / \text{km}$), ενώ στα δύο επόμενα στρώματα υπάρχουν αυξομειώσεις και από το τέλος της μεσόσφαιρας η θερμοκρασία αυξάνεται. Ορίζεται επίσης η **ιονόσφαιρα** η οποία εκτείνεται από ύψος περίπου 50 km και άνω (μετά την στρατόσφαιρα) και η οποία έχει σημασία για την διάδοση κυμάτων διότι επιτρέπει ραδιοζεύξεις πέραν του ορίζοντα (trans-horizon radio links) σε μεγάλες αποστάσεις. Η ιονόσφαιρα περιέχει ιονισμένα μόρια και ελεύθερα ηλεκτρόνια, τα οποία οφείλονται κυρίως στην υπεριώδη ακτινοβολία του ήλιου (η οποία στα κατώτερα στρώματα φιλτράρεται από το όζον), και άρα ο βαθμός ιονισμού παρουσιάζει έντονες μεταβολές μεταξύ ημέρας και νύχτας. Μια ενδεικτική εικόνα των εν λόγω στρωμάτων δίνεται στο Σχ. 8.1 που ακολουθεί.



Σχ. 8.1: Ατμοσφαιρικά στρώματα

8.1.3. Οι κυριότεροι μηχανισμοί διάδοσης κυμάτων στην ατμόσφαιρα

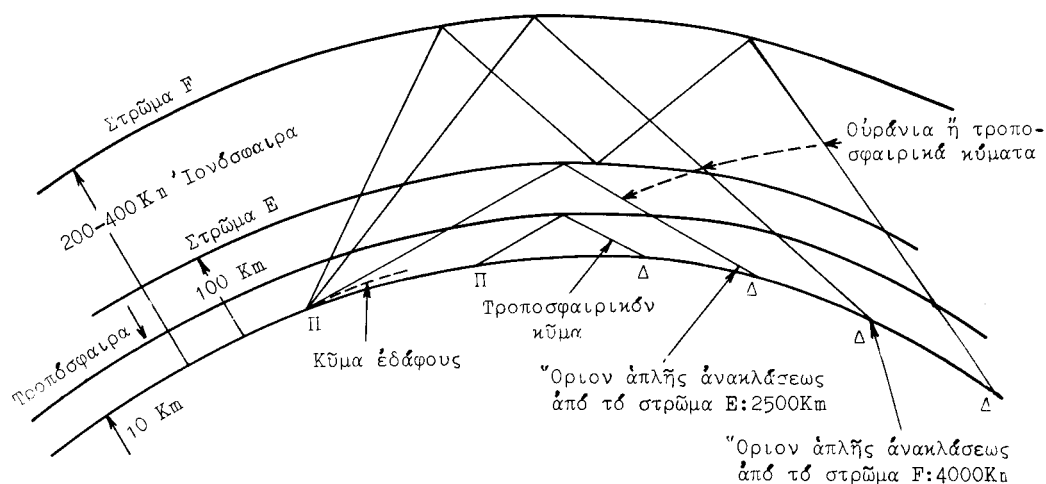
Οι ασύρματες ζεύξεις ή ραδιοζεύξεις (wireless links ή radio links) γενικά εμπίπτουν σε δύο ευρείες κατηγορίες, τις ζεύξεις **οπτικής επαφής** (Line Of Sight – LOS) και τις ζεύξεις **πέραν του ορίζοντα** (trans-horizon). Η πρώτη κατηγορία βασίζεται στην ευθύγραμμη

διάδοση του κύματος και αντιστοιχεί σε σχετικά μικρή ισχύ εκπομπής και σχετικά μικρές αποστάσεις (τυπικά μέχρι 100 km), ενώ η συνολική εμβέλεια μπορεί να αυξηθεί με επαναλαμβανόμενες ζεύξεις («αλυσιδωτά», η μία μετά την άλλη). Η δεύτερη κατηγορία, η οποία απαιτεί μεγαλύτερη ισχύ, βασίζεται σε φαινόμενα σκέδασης του κύματος από τα διάφορα ατμοσφαιρικά στρώματα, ούτως ώστε το κύμα που εκπέμπεται από τον πομπό «υπερπηδά» την καμπυλότητα της γης και ενδεχομένως διάφορα άλλα ενδιάμεσα εμπόδια και φτάνει στον δέκτη σε μεγάλες αποστάσεις ακόμη και χιλιάδων km (μεγαλύτερες όσο μεγαλύτερο είναι το ύψος στο οποίο έχει σκεδασθεί). Οι ζεύξεις αυτές έχουν παίξει σημαντικό ρόλο για την επίτευξη τηλεπικοινωνιακής σύνδεσης μεταξύ απομακρυσμένων σημείων, ωστόσο η αξιοπιστία τους και η ποιότητά τους (ουσιαστικά ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας) είναι γενικά υποδεέστερη των ζεύξεων οπτικής επαφής και συχνά πλέον υποκαθίστανται είτε από επαναλαμβανόμενες επίγειες ζεύξεις οπτικής επαφής είτε από δορυφορικές ζεύξεις (οι οποίες επίσης εμπίπτουν στην κατηγορία οπτικής επαφής).

Ανάλογα με τη διαδρομή που διανύουν, τα κύματα κατατάσσονται σε

- **κύματα εδάφους** (ground waves), τα οποία μεταδίδονται κοντά στο έδαφος σε οπτική επαφή (και αποτελούνται από το κατευθείαν κύμα και το κύμα που ανακλάται από το έδαφος)
- **ιονοσφαιρικά ή ουράνια κύματα** (ionospheric / sky waves) και **τροποσφαιρικά κύματα** (tropospheric waves) τα οποία φτάνουν στον δέκτη αφού έχουν υποστεί σκέδαση από τα εν λόγω ατμοσφαιρικά στρώματα

ενώ μια σχηματική παράσταση των κυμάτων αυτών των κατηγοριών φαίνεται στο Σχ. 8.2.



Σχ. 8.2: Μηχανισμοί διάδοσης κυμάτων στην ατμόσφαιρα

Τα στρώματα της ατμόσφαιρας έχουν διαφορετική επίδραση ανάλογα με τη συχνότητα, και κατά συνέπεια ο κυριότερος μηχανισμός διάδοσης κυμάτων διαφέρει σε κάθε περιοχή συχνοτήτων. Προφανώς η διάδοση με οπτική επαφή, εφόσον υπάρχει, παίζει κυρίαρχο

ρόλο, ενώ ως προς άλλους μηχανισμούς διάδοσης μπορεί συνοπτικά να αναφερθεί ότι:

- Για τις χαμηλότερες συχνότητες μέχρι περίπου 1 MHz, τα ιονοσφαιρικά και τροποσφαιρικά φαινόμενα είτε δεν εμφανίζονται είτε είναι πολύ ακανόνιστα. Στις συχνότητες αυτές ο κυριότερος μηχανισμός είναι η **διάδοση μέσω κύματος εδάφους**, και ειδικότερα μέσω ενός τμήματός του που λέγεται **κύμα επιφάνειας** και ακολουθεί την επιφάνεια του εδάφους (έστω και όχι επίπεδη).
- Για συχνότητες περίπου 3 – 30 MHz (περιοχή HF), ή το πολύ μεταξύ 1 – 30 MHz, ο επικρατέστερος μηχανισμός είναι η **ιονοσφαιρική διάδοση** (επειδή στην περιοχή αυτή η επίδραση της ιονόσφαιρας είναι εντονότερη και πιο σταθερή).
- Για συχνότητες άνω των 30 MHz ο κυριότερος μηχανισμός είναι η **τροποσφαιρική διάδοση** (επειδή οι ανακλάσεις από την ιονόσφαιρα είναι μικρές ή ανύπαρκτες και τα κύματα δεν επιστρέφουν από εκεί προς τη γη).

Με τον όρο **τροποσφαιρική διάδοση** αναφερόμαστε όχι μόνο στα τροποσφαιρικά κύματα, δηλ. αυτά που ανακλώνται από την τροπόσφαιρα (και επιτυγχάνουν ζεύξεις πέραν του ορίζοντα), αλλά και στις επιδράσεις της τροπόσφαιρας, που είναι κυρίως επιδράσεις των **καιρικών φαινομένων**, σε κύματα που διαδίδονται ευθύγραμμα δηλ. σε ζεύξεις οπτικής επαφής. Οι επιδράσεις αυτές έχουν ιδιαίτερη σημασία στις μικροκυματικές συχνότητες, όπου οι ζεύξεις είναι πάντοτε οπτικής επαφής (διότι τα μικροκύματα δεν σκεδάζονται από τα ανώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα). Με την έννοια αυτή, τα φαινόμενα τροποσφαιρικής διάδοσης παίζουν τον σπουδαιότερο ρόλο στις **μικροκυματικές ραδιοζεύξεις** οι οποίες αποκτούν όλο και μεγαλύτερη σημασία στα σημερινά τηλεπικοινωνιακά συστήματα, κυρίως λόγω των υψηλών ρυθμών μετάδοσης πληροφορίας που επιτυγχάνουν.

8.2. ΚΥΜΑΤΑ ΕΔΑΦΟΥΣ

8.2.1. Ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων από διηλεκτρική επιφάνεια

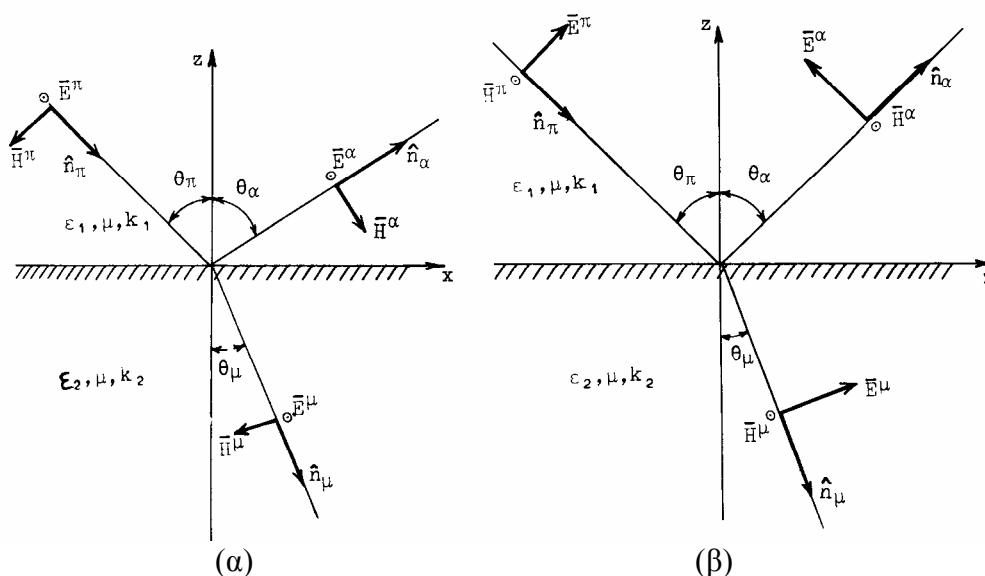
Τα κύματα εδάφους δημιουργούνται κατά την εκπομπή κεραίας που βρίσκεται πάνω από τη γη σε χαμηλό ύψος, και η αιτία είναι η ανάκλαση του κύματος της κεραίας από την επιφάνεια της γης. Λέγοντας «επιφάνεια της γης» μπορεί να εννοούμε είτε την επιφάνεια της ξηράς είτε την επιφάνεια της θάλασσας, αρκεί να ληφθούν υπόψη κατά περίπτωση οι κατάλληλες ιδιότητες (διηλεκτρική επιτρεπτότητα και ειδική αγωγιμότητα*) είτε των διάφορων τύπων εδάφους (ξηρού ή υγρού, πετρώδους ή όχι, με βλάστηση ή χωρίς κτλ.) είτε του θαλασσινού νερού. Στη μελέτη των κυμάτων εδάφους χρησιμεύουν οι βασικοί

* Η μαγνητική διαπερατότητα είναι κατά κανόνα όση και του αέρα (μ_0), επειδή το έδαφος της ξηράς (τουλάχιστον το επιφανειακό στρώμα του) ή το νερό της θάλασσας δεν έχει μαγνητική συμπεριφορά.

νόμοι της ανάκλασης και διάθλασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από επίπεδη* επιφάνεια, τους οποίους υπενθυμίζουμε παρακάτω.

Έστω δύο ημιχώροι που χαρακτηρίζονται από τις ηλεκτρομαγνητικές σταθερές ϵ_1, μ και ϵ_2, μ . Δεχόμαστε συνήθως ότι η μαγνητική διαπερατότητα είναι η ίδια, δηλ. $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, πράγμα που συμβαίνει σχεδόν πάντοτε και απλοποιεί τις πράξεις. Η διηλεκτρική επιτρεπτότητα (ϵ_1, ϵ_2) θεωρείται γενικά **μυγαδική**, ενσωματώνοντας και την τυχόν αγωγιμότητα του υλικού (βλ. την παράγραφο 0.4 της Εισαγωγής). Στην περίπτωση της επιφάνειας της γης, ο «πάνω» ημιχώρος (1) περιέχει αέρα ο οποίος χαρακτηρίζεται από τις ίδιες πρακτικά σταθερές με το κενό, δηλ. $\epsilon_1 = \epsilon_0$ και $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

Θεωρούμε ένα επίπεδο Η/Μ κύμα, γραμμικά πολωμένο, που προσπίπτει στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια προερχόμενο από τον «πάνω» ημιχώρο (1). Η διεύθυνση διάδοσης του κύματος και η κάθετος στη διαχωριστική επιφάνεια ορίζουν ένα επίπεδο που ονομάζεται **επίπεδο πρόσπτωσης** (το επίπεδο του χαρτιού στο Σχ. 8.3). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις πόλωσης, (βλ. Σχ. 8.3α,β): **οριζόντια (Horizontal)** πόλωση με το ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης (γι' αυτό λέγεται και **κάθετη**), **κατακόρυφη (Vertical)** πόλωση (ή **παράλληλη**) με ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο σε αυτό. Το προσπίπτον επίπεδο κύμα μπορεί πάντοτε να γραφεί ως υπέρθεση των δύο αυτών περιπτώσεων**.



Σχ. 8.3: Ανάκλαση και διάθλαση κυμάτων από επίπεδη επιφάνεια
 (α) Κάθετη (ή οριζόντια) πόλωση (β) Παράλληλη (ή κατακόρυφη) πόλωση

* Θεωρούμε σε πρώτη προσέγγιση το έδαφος επίπεδο. Στην πραγματικότητα, βέβαια, η επιφάνεια της γης (ή της θάλασσας) έχει πάντοτε κάποια τραχύτητα, ενώ επίσης σε μεγάλη κλίμακα δεν είναι επίπεδη αλλά σφαιρική. Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να ληφθούν υπόψη με βάση κατάλληλα προσεγγιστικά μοντέλα.

** Αυτό διότι το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι πάντοτε **εγκάρσιο**, δηλ. το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης και κατά συνέπεια μπορεί πάντοτε να αναλυθεί σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, η μία εντός του επιπέδου πρόσπτωσης και η άλλη κάθετη σε αυτό.

Όπως δείχνεται στο Σχ. 8.3, η διεύθυνση από την οποία προσπίπτει το κύμα στη διαχωριστική επιφάνεια προσδιορίζεται από τη **γωνία πρόσπτωσης** θ_π . Λόγω της ασυνέχειας στη διαχωριστική επιφάνεια συμβαίνει (μερική) ανάκλαση και διάθλαση του κύματος. Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει υπό **γωνία ανάκλασης** θ_α ενώ το μεταδιδόμενο (διαθλώμενο) κύμα οδεύει εντός του «κάτω» ημιχώρου (2) υπό την **γωνία διάθλασης** θ_μ . Όλες αυτές οι γωνίες μετρούνται ως προς την κάθετη στο διαχωριστικό επίπεδο και γι' αυτές ισχύει ο **νόμος της διάθλασης** ή **νόμος του Snell** σύμφωνα με τον οποίο έχουμε

$$\theta_\alpha = \theta_\pi \quad (8.2.1\alpha)$$

$$k_1 \sin \theta_\pi = k_2 \sin \theta_\mu \Leftrightarrow \sin \theta_\mu = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_\pi = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_\pi \quad (8.2.1\beta)$$

όπου k_1 και k_2 οι κυματικοί αριθμοί στους δύο ημιχώρους, από τις γνωστές σχέσεις

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu \epsilon_1} \quad , \quad k_2 = \omega \sqrt{\mu \epsilon_2} \quad (8.2.2)$$

Δηλ. η **γωνία ανάκλασης** είναι ίση με τη **γωνία πρόσπτωσης** (κατά τον γνωστό νόμο της ανάκλασης), πράγμα που χαρακτηρίζεται ως **κατοπτρική ανάκλαση** (specular reflection), ενώ η **γωνία διάθλασης** διέπεται από τον νόμο των ημιτόνων (8.2.1β). Πρέπει να σημειωθεί ότι η (8.2.1β) ισχύει στη μορφή αυτή για πραγματικές ϵ_1 και ϵ_2 , δηλ. για ημιχώρους χωρίς απώλειες, ενώ στην περίπτωση απωλειών πρέπει η έννοια της γωνίας διάθλασης να γενικευθεί κατάλληλα με τη βοήθεια του λεγόμενου **κυματοδιανύσματος** το οποίο χαρακτηρίζει τη διάδοση του μεταδιδόμενου κύματος στον «κάτω» ημιχώρο. Δεν θα επεκταθούμε εδώ σε αυτό, επειδή το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στη διάδοση του ανακλώμενου κύματος στον «πάνω» ημιχώρο (στον αέρα).

Το πλάτος του ανακλώμενου και μεταδιδόμενου κύματος δίνεται, αντίστοιχα, από τον **συντελεστή ανάκλασης** R και τον **συντελεστή μετάδοσης** T , οι οποίοι ορίζονται ως οι λόγοι των πλατών του ανακλώμενου και μεταδιδόμενου πεδίου, E_α και E_μ , προς το πλάτος του προσπίπτοντος πεδίου E_π . Οι τιμές των συντελεστών αυτών διαφοροποιούνται ανάλογα με την πόλωση (κάθετη / παράλληλη) και δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις.

Οριζόντια (κάθετη) πόλωση:

$$T_H = \frac{E_\mu}{E_\pi} = \frac{2 \cos \theta_\pi}{\cos \theta_\pi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_\mu} = \frac{2 \cos \theta_\pi}{\cos \theta_\pi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi}} \quad (8.2.3\alpha)$$

$$R_H = \frac{E_\alpha}{E_\pi} = \frac{\cos \theta_\pi - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_\mu}{\cos \theta_\pi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_\mu} = \frac{\cos \theta_\pi - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi}}{\cos \theta_\pi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi}} \quad (8.2.3\beta)$$

(Από αυτές εύκολα διαπιστώνεται ότι $T_H = 1 + R_H$).

Κατακόρυφη (παράλληλη) πόλωση:

$$T_V = \frac{E_\mu}{E_\pi} = (1 - R_V) \frac{\cos \theta_\pi}{\cos \theta_\mu} \quad (8.2.4\alpha)$$

$$R_V = \frac{E_\alpha}{E_\pi} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_\pi - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_\pi + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi}} \quad (8.2.4\beta)$$

Από την (8.2.3β) παρατηρούμε ότι για $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (πράγμα αυτονόητο εφόσον ο ημιχώρος (1) είναι ο αέρας ή το κενό) και για όλες τις δυνατές γωνίες πρόσπτωσης $0 \leq \theta_\pi \leq \pi/2$ ο συντελεστής ανάκλασης R_H δεν μηδενίζεται, αφού

$$\cos \theta_\pi - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi} < \cos \theta_\pi - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_\pi} = \cos \theta_\pi - \cos \theta_\pi = 0 \Rightarrow R_H < 0$$

Δηλ. στην περίπτωση οριζόντιας πόλωσης *υπάρχει πάντοτε ανακλώμενο κύμα* (για οποιαδήποτε γωνία πρόσπτωσης). Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο του συντελεστή R_H δείχνει ότι το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει πάντοτε αντίθετη φορά από το προσπίπτον (δηλ. υφίσταται μια απότομη μεταβολή φάσης κατά 180°).

Αντίθετα, όπως φαίνεται από την (8.2.4β), στην περίπτωση κατακόρυφης πόλωσης είναι δυνατόν να μηδενισθεί ο συντελεστής ανάκλασης R_V , πράγμα που συμβαίνει όταν η γωνία πρόσπτωσης λάβει μία συγκεκριμένη τιμή $\theta_\pi = \theta_B$ τέτοια ώστε

$$\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \cos^2 \theta_\pi = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_\pi \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \sin^2 \theta_\pi = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (8.2.5)$$

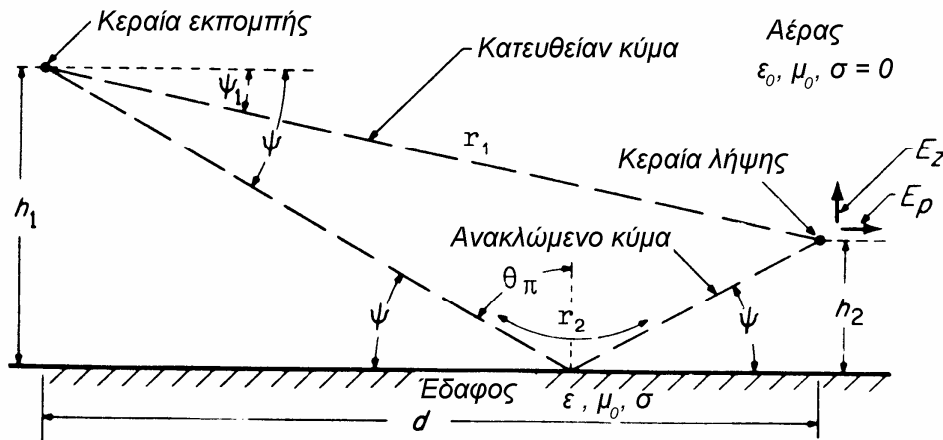
$$\text{δηλ.} \quad \sin^2 \theta_B = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \quad \tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (8.2.6)$$

Η τιμή αυτή λέγεται **γωνία Brewster** και η φυσική της σημασία είναι ότι αν ένα κύμα κατακόρυφης πόλωσης προσπέσει στη διαχωριστική επιφάνεια κατά την γωνία αυτή, τότε δεν υπάρχει ανακλώμενο κύμα. Αν προσπέσει ένα «μικτό» κύμα με τις δύο πολώσεις, τότε το ανακλώμενο κύμα θα έχει μόνο οριζόντια πόλωση (η κατακόρυφη θα εξαφανισθεί). Δηλ. η γωνία Brewster μετατρέπει ένα κυκλικά ή ελλειπτικά πολωμένο κύμα σε γραμμικά πολωμένο (για τον λόγο αυτό αποκαλείται και **γωνία πολώσεως**), ενώ επίσης είναι η γωνία πρόσπτωσης που ελαχιστοποιεί (μηδενίζει) τις ανακλάσεις από ένα κατακόρυφα πολωμένο κύμα. Σύμφωνα με την (8.2.6), γωνία Brewster υπάρχει για ϵ_1 και ϵ_2 πραγματικούς αριθμούς, δηλ. για ιδανικά διηλεκτρικά υλικά (χωρίς απώλειες).

8.2.2. Ανάκλαση κύματος από επίπεδη γη

Στην περίπτωση της επιφάνειας της γης, θεωρώντας την σε πρώτη προσέγγιση ως επίπεδη,

αυτό που ενδιαφέρει είναι η μετάδοση του κύματος από τον πομπό στον δέκτη, οι οποίοι γενικά είναι τοποθετημένοι σε κάποια οριζόντια απόσταση d μεταξύ τους και σε ύψη h_1 και h_2 από την επιφάνεια της γης όπως δείχνει το Σχ. 8.4.



Σχ. 8.4: Κεραία εκπομπής και λήψης πάνω από τη γη

Το κύμα που μεταδίδεται από τον πομπό στον δέκτη περιλαμβάνει το κατευθείαν κύμα και το κύμα που ανακλάται από την επιφάνεια της γης. (Για δίπολο πάνω από την επιφάνεια της γης, όπως θα δούμε σε λίγο, το ανακλώμενο κύμα περιέχει και ένα τμήμα που ονομάζεται κύμα επιφανείας). Ο πάνω ημιχώρος περιέχει αέρα, και άρα $\epsilon_1 = \epsilon_0$, ενώ για τον κάτω ημιχώρο θεωρούμε την μιγαδική διηλεκτρική σταθερά του

$$\epsilon_2 = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

όπου σ η ειδική αγωγιμότητα σε $S/m = \Omega^{-1}/m$. Τότε ο λόγος ϵ_2 / ϵ_1 δίνεται από την

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} = \epsilon_r - j\chi \cong \epsilon_r - j \frac{18 \cdot 10^9 \sigma}{f} \quad (8.2.7)$$

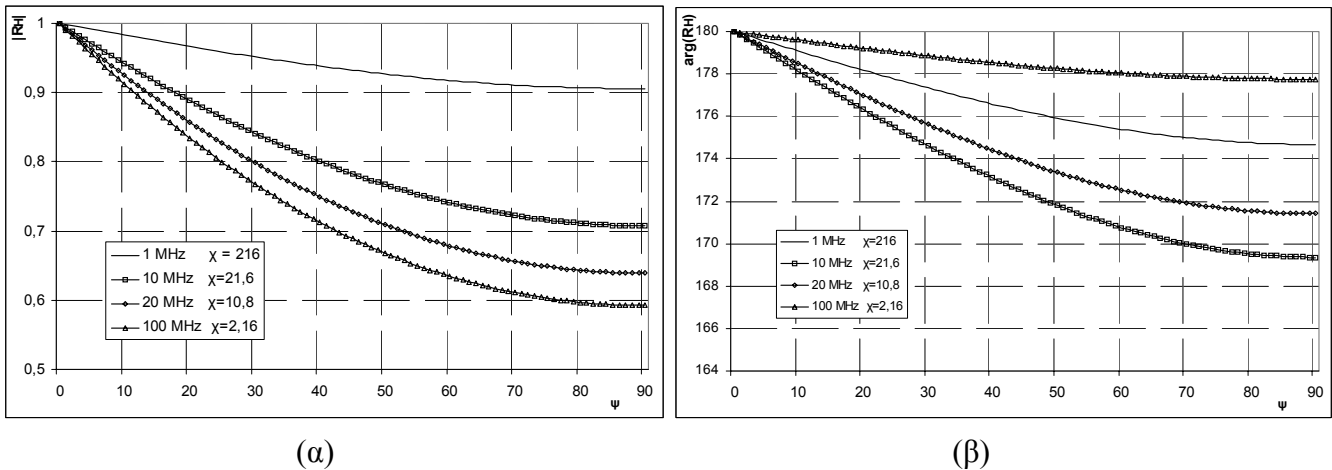
όπου ϵ_r και χ είναι το πραγματικό και το φανταστικό (δηλ. το «διηλεκτρικό» και το «αγώγιμο») μέρος της **σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς** του εδάφους (ή του νερού της θάλασσας). Αν η γωνία πρόσπτωσης μετρηθεί ως προς την επιφάνεια της γης αντί για την κάθετο, δηλ. ληφθεί η γωνία πρόσπτωσης $\psi = 90^\circ - \theta_\pi$, η οποία είναι και **γωνία λήψης**, όπως στο Σχ. 8.4, οι σχέσεις για τους συντελεστές ανάκλασης παίρνουν την εξής μορφή:

Οριζόντια πόλωση:
$$R_H = \frac{\sin \psi - \sqrt{\epsilon_r - j\chi - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{\epsilon_r - j\chi - \cos^2 \psi}} \quad (8.2.8)$$

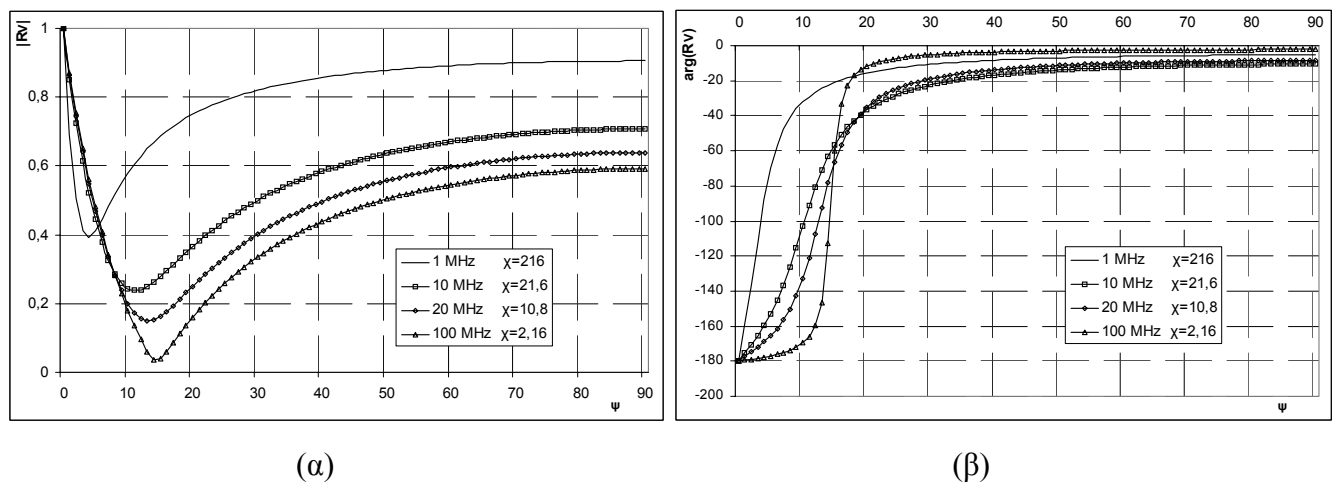
Κατακόρυφη πόλωση:
$$R_V = \frac{(\epsilon_r - j\chi)\sin \psi - \sqrt{\epsilon_r - j\chi - \cos^2 \psi}}{(\epsilon_r - j\chi)\sin \psi + \sqrt{\epsilon_r - j\chi - \cos^2 \psi}} \quad (8.2.9)$$

Στα κατωτέρω Σχ. 8.5 και 8.6 παρουσιάζεται το μέτρο και το όρισμα του συντελεστή ανάκλασης για την περίπτωση οριζόντιας και κατακόρυφης πόλωσης και για διάφορες

τιμές της συχνότητας στην περιοχή από 1 ως 100 MHz. Για τις σταθερές του κάτω ημιχώρου έχουν ληφθεί οι τιμές $\epsilon_r = 15$ και $\sigma = 0,012$ S/m που αντιστοιχούν σε μια «ενδιάμεση» περίπτωση εδάφους. Γενικότερα οι τιμές των σταθερών αυτών για την ξηρά κυμαίνονται από περίπου $\epsilon_r = 7$ και $\sigma = 0,001$ S/m (πετρώδη εδάφη με μικρή περιεκτικότητα σε υγρασία) ως περίπου $\epsilon_r = 30$ και $\sigma = 0,03$ S/m (πεδινά και υγρά εδάφη), ενώ για το νερό της θάλασσας μια αντιπροσωπευτική τιμή είναι περίπου $\epsilon_r = 81$ και $\sigma = 5$ S/m (και για το γλυκό νερό περίπου $\epsilon_r = 81$ και $\sigma = 0,01$ S/m).



Σχ. 8.5: (α) Μέτρο και (β) όρισμα του συντελεστή ανάκλασης R_H για οριζόντια πόλωση



Σχ. 8.6: (α) Μέτρο και (β) όρισμα του συντελεστή ανάκλασης R_V για κατακόρυφη πόλωση

Από τα σχήματα παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά του ανακλώμενου κύματος διαφοροποιείται δραστικά ανάλογα με το είδος της πόλωσης. Η μόνη περίπτωση όπου αυτό δεν συμβαίνει είναι για περίπου εφαπτομενική πρόσπτωση ($\psi \cong 0$), οπότε και για τις δύο πολώσεις ο συντελεστής ανάκλασης προσεγγίζει την τιμή $R \cong -1$ (αφού, όπως δείχνουν τα σχήματα, έχουμε $|R| \cong 1$ και $\arg(R) \cong \pm 180^\circ$). Δηλαδή τότε το ανακλώμενο κύμα έχει τιμή περίπου αντίθετη από το προσπίπτον και τείνει να εξουδετερώσει ένα μεγάλο μέρος αυτού (μέσω αναιρετικής συμβολής). Για μεγαλύτερες τιμές της γωνίας ψ , ο συντελεστής ανάκλασης R_H (οριζόντιας πόλωσης) παρουσιάζει σχετικά μικρή μεταβολή

τόσο ως προς το μέτρο όσο και ως προς το όρισμα, δηλ. το ανακλώμενο κύμα παραμένει αρκετά ισχυρό και με αντίθετο πρόσημο από το προσπίπτον. Απεναντίας, για κατακόρυφη πόλωση η μεταβολή του συντελεστή R_V είναι ραγδαία: το όρισμα μεταβάλλεται κατά 180° , ενώ το μέτρο διέρχεται από ένα ελάχιστο που μπορεί να είναι αρκετά κοντά στο 0. Η γωνία στην οποία συμβαίνει αυτό αποκαλείται γωνία **ψευδο-Brewster** (μερικές φορές ονομάζεται και απλώς «γωνία Brewster») επειδή ελαχιστοποιεί την ανάκλαση κατά τρόπο ανάλογο με την γωνία Brewster στην περίπτωση τέλειου διηλεκτρικού. Συμπερασματικά, η επίδραση των ανακλάσεων από τη γη είναι πιο ομοιόμορφη για οριζόντια πόλωση.

Τα παραπάνω ισχύουν για την ιδανική περίπτωση επίπεδης, δηλ. απόλυτα λείας, επιφάνειας της γης. Στην πραγματικότητα, η επιφάνεια της γης παρουσιάζει πάντοτε κάποια τραχύτητα (ακανόνιστες ανωμαλίες) η οποία εξαρτάται από τον τύπο του εδάφους (για την ξηρά) και από τις καιρικές συνθήκες (για τη θάλασσα). Η επίδραση της τραχύτητας στο ανακλώμενο κύμα εξαρτάται από το μέγεθος των ανωμαλιών σε σύγκριση με το μήκος κύματος, σε συνδυασμό με τη γωνία πρόσπτωσης. Ο «βαθμός» τραχύτητας εκφράζεται με τη ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής (την RMS τιμή) του ύψους των ανωμαλιών της επιφάνειας, δηλ. την τυπική απόκλιση (standard deviation)* του ύψους

$$\sigma = \sqrt{\langle z^2 \rangle} \quad \text{ή} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2L} \int_{-L}^L z^2(x) dx}$$

όπου $z(x)$ η τυχαία ή στοχαστική διαδικασία που δίνει το ύψος των ανωμαλιών σε σχέση με το επίπεδο σε κάποια οριζόντια θέση x . Σύμφωνα με το κλασικό **κριτήριο Rayleigh**, η παράμετρος που χαρακτηρίζει την επίπτωση της τραχύτητας είναι η

$$C = \frac{4\pi\sigma \sin \psi}{\lambda} \quad (8.2.10)$$

Για τιμές $C < 0,1$ η επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί περίπου επίπεδη ως προς τα H/M κύματα, δηλ. ισχύουν με καλή προσέγγιση οι ίδιοι συντελεστές ανάκλασης όπως και για την επίπεδη επιφάνεια και η ανάκλαση παραμένει κατοπτρική (specular) δηλ. το κύμα εξακολουθεί να ανακλάται κατά γωνία ανάκλασης ίση με τη γωνία πρόσπτωσης. Από την (8.2.10) παρατηρούμε ότι αυτό θα συμβεί είτε για μικρές τιμές της τραχύτητας σε σύγκριση με το μήκος κύματος ($\sigma \ll \lambda$) είτε για μεγάλες γωνίες πρόσπτωσης ψ (δηλ. πολύ

* Η πρώτη από τις δύο σχέσεις βασίζεται στην στατιστική αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής (η οποία συμβολίζεται με $\langle \cdot \rangle$), ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί ολοκλήρωση στο χώρο και ισχύει, όπως θυμόμαστε από την στατιστική θεωρία σημάτων, υπό την προϋπόθεση ότι η στοχαστική διαδικασία είναι εργοδική.

Προσοχή στον συμβολισμό: το σ εδώ δεν πρέπει να συγχέεται με την ειδική αγωγιμότητα στα προηγούμενα.

πλάγια πρόσπτωση). Καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου Rayleigh, το ανακλώμενο κύμα τείνει να «διασκορπίζεται», δηλ. τα διάφορα τμήματα της επιφάνειας δημιουργούν ανακλώμενα κύματα προς διάφορες κατευθύνσεις και όχι μόνο προς την κατοπτρική διεύθυνση. Λέγεται τότε ότι έχουμε **διάχυτη ανάκλαση** (diffuse reflection) ή **σκέδαση** (scattering) του κύματος*. Για μεγάλες τιμές $C > 10$ το ανακλώμενο κύμα έχει εντελώς διάχυτη μορφή προς όλες ουσιαστικά τις κατευθύνσεις και τείνει να δημιουργεί θόρυβο στατιστικού χαρακτήρα. Στην περιοχή τιμών $0,1 < C < 10$ η κατάσταση είναι ενδιάμεση, δηλ. εμφανίζεται διάχυτο ανακλώμενο κύμα ενώ συγχρόνως υπάρχει και το κατοπτρικό ανακλώμενο, αλλά με συντελεστές ανάκλασης μικρότερους από ό,τι στο επίπεδο έδαφος.

8.2.3. Κατακόρυφο δίπολο πάνω από επίπεδο έδαφος – Το κύμα επιφανείας και το κύμα γόρου

Οι προηγούμενοι συντελεστές ισχύουν για την ανάκλαση επίπεδου κύματος από έδαφος πεπερασμένης αγωγιμότητας. Το επίπεδο κύμα, βέβαια, είναι μια ιδεατή περίπτωση κύματος, ενώ στις πραγματικές ασύρματες ζεύξεις χρησιμοποιούνται κεραίες οι οποίες ως γνωστόν εκπέμπουν σφαιρικά κύματα. Ως ενδεικτική περίπτωση θα εξετασθεί εδώ η συμπεριφορά ενός μικρού διπόλου, η οποία, αν και απλή, οδηγεί σε γενικότερα χρήσιμα συμπεράσματα. Άλλωστε τα φαινόμενα που θα εξετάσουμε έχουν σημασία για χαμηλές συχνότητες, στις οποίες το δίπολο είναι ο κυριότερος τύπος κεραίας.

Αναφερόμαστε στην γεωμετρία του Σχ. 8.4 και θεωρούμε αρχικά ένα κατακόρυφο στοιχειώδες δίπολο (δίπολο Hertz), με μήκος $2h \ll \lambda$, πάνω από επίπεδη γη πεπερασμένης αγωγιμότητας όπως στα προηγούμενα**. Το κύμα του διπόλου αυτού μπορεί να εκφραστεί σε διάφορες μορφές. Η χρησιμότερη μορφή γράφεται με ανάλυση του ηλεκτρικού πεδίου σε δύο συνιστώσες κυλινδρικών συντεταγμένων***, την κατακόρυφη E_z και την οριζόντια ακτινική E_ρ , όπως φαίνονται στο Σχ. 8.4. Στο μακρινό πεδίο, οι τιμές των συνιστωσών

* Γενικότερα και οι δύο όροι αναφέρονται στην επιστροφή κύματος λόγω πρόσπτωσης σε κάποιο εμπόδιο, αλλά ο όρος ανάκλαση προτιμάται όταν έχουμε κύμα που επιστρέφει προς μία κατεύθυνση, ενώ ο όρος σκέδαση υποδηλώνει κύμα που επιστρέφει προς διάφορες κατευθύνσεις με πιο ακανόνιστο τρόπο. Στα αρχαία ελληνικά το ρήμα «σκεδάννυμι», από το οποίο προέρχεται και η «σκέδασις», σήμαινε διασκορπίζω.

** Αυτό υπήρξε ένα κλασικό πρόβλημα του ηλεκτρομαγνητισμού το οποίο επιλύθηκε θεωρητικά από τον Sommerfeld το 1909 και στη συνέχεια (για 30 σχεδόν έτη) μελετήθηκε εκτενώς στην τεχνική βιβλιογραφία με σκοπό την εξαγωγή πρακτικών συμπερασμάτων. Η λύση που παρουσιάζεται εδώ δόθηκε από τον Norton το 1937 με κατάλληλη αναδιάταξη της αρχικής λύσης του Sommerfeld και προσέγγιση στο μακρύν πεδίο.

*** Στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων υπάρχει και η αζιμουθιακή γωνία ϕ , η οποία όμως εδώ δεν υπεισέρχεται λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας (και για τον ίδιο λόγο η σχετική συνιστώσα E_ϕ είναι μηδέν).

αυτών δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις*, οι οποίες προέκυψαν με προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς $1/r$, δηλ. αγνοώντας όρους μεγαλύτερων τάξεων ($1/r^2$, $1/r^3$...κ.ο.κ.)

$$E_z \cong j30kIL \cos^2 \psi \left(\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} + R_V \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) + j30kILF(1-R_V) \left(1 - \gamma^2 + \gamma^4 \cos^2 \psi \right) \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \quad (8.2.11)$$

$$E_\rho \cong -j30kIL \sin \psi \cos \psi \left(\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} + R_V \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) + j30kILF \cos \psi (1-R_V) \gamma \sqrt{1-\gamma^2 \cos^2 \psi} \left[1 - \frac{\gamma^2(1-\gamma^2 \cos^2 \psi)}{2} + \frac{\sin^2 \psi}{2} \right] \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \quad (8.2.12)$$

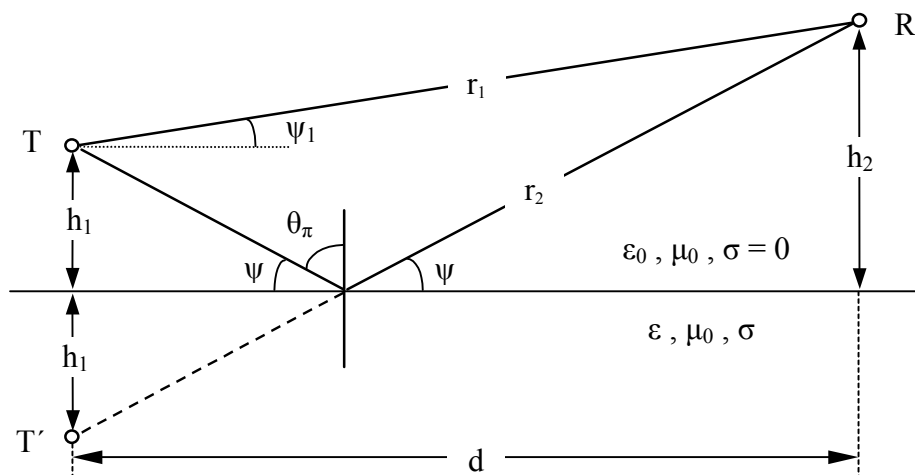
όπου $L = 2h$ το μήκος του διπόλου, F είναι ένας συντελεστής εξασθένησης (βλ. παρακάτω) και γ είναι μια παράμετρος που δίνεται από την αντίστροφη της μιγαδικής σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς της γης (βλ. την (8.2.7))

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} = \frac{1}{\epsilon_r - j\chi} \quad (8.2.13)$$

Οι (8.2.11) και (8.2.12) δίνουν το κύμα στο σημείο παρατήρησης που χαρακτηρίζεται ως «κεραία λήψης» στο Σχ. 8.4, ενώ το δίπολο Hertz από το οποίο προέρχεται είναι η «κεραία εκπομπής». Προσοχή χρειάζεται η γωνία πρόσπτωσης / ανάκλασης ψ η οποία πρέπει να ληφθεί όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, δηλ. πρέπει να βρεθεί ένα σημείο της επιφάνειας της γης που βλέπει την κεραία εκπομπής και την κεραία λήψης υπό την ίδια γωνία** η οποία είναι η γωνία ψ των (8.2.11) και (8.2.12). Όπως φαίνεται στο Σχ. 8.4, για κάθε συγκεκριμένη τοποθέτηση των δύο κεραιών (σε ύψη h_1 και h_2) υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σημείο μεταξύ αυτών και είναι το σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία που ενώνει την κεραία λήψης με το συμμετρικό του διπόλου εκπομπής κάτω από τη γη, που λέγεται και είδωλο αυτού. Επομένως η απόσταση r_2 , η οποία στο Σχ. 8.4 δίνεται από την τεθλασμένη γραμμή μεταξύ κεραίας εκπομπής και λήψης, είναι συγχρόνως η απόσταση από το είδωλο του διπόλου εκπομπής μέχρι την κεραία λήψης, δηλ. μέχρι το σημείο στο οποίο υπολογίζεται το κύμα του διπόλου, όπως δείχνεται στο Σχ. 8.7.

* Παρατηρούμε ότι η αρχική σταθερά των εκφράσεων αυτών είναι η ίδια όπως για το δίπολο Hertz στον ελεύθερο χώρο (χωρίς έδαφος), δηλ. $\frac{j\zeta k I 2h}{4\pi} \cong \frac{j120\pi k I 2h}{4\pi} = j30k I 2h$

** Αυτό απορρέει από τον νόμο της ανάκλασης, βάσει του οποίου η γωνία πρόσπτωσης και η γωνία ανάκλασης οφείλουν να είναι ίσες.



Σχ. 8.7: Το είδωλο (T') ενός διπόλου (T) που εκπέμπει πάνω από τη γη

Με βάση τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι όροι των (8.2.11) και (8.2.12) ερμηνεύονται ως εξής:

- ο πρώτος είναι το κατευθείαν κύμα από το δίπολο εκπομπής
- ο δεύτερος είναι ένα ανακλώμενο κύμα, το οποίο αντιστοιχεί στο κύμα που θα παρήγαγε το είδωλο του διπόλου κάτω από τη γη πολλαπλασιασμένο με τον συντελεστή ανάκλασης R_V (όπως τον είδαμε στα προηγούμενα για επίπεδο κύμα).

Αν το κύμα του διπόλου ήταν επίπεδο κύμα, τότε το ανακλώμενο κύμα του δεύτερου αυτού όρου θα περιέγραφε πλήρως την επίδραση της γης (ανάκλαση με συντελεστή R_V) και οι (8.2.11) και (8.2.12) θα τελείωναν εκεί*. Επειδή όμως δεν είναι επίπεδο κύμα, υπάρχει και ο τρίτος όρος ο οποίος έχει πιο περίπλοκη μορφή και ονομάζεται **κύμα επιφανείας**. Οι δύο πρώτοι όροι αποτελούν το λεγόμενο **κύμα χώρου**, ενώ το συνολικό κύμα συνήθως αποκαλείται **κύμα εδάφους**.

Από τις (8.2.11) και (8.2.12) μπορούμε να διαχωρίσουμε το κύμα επιφανείας από το κύμα χώρου για καθεμία από τις συνιστώσες E_z και E_ρ , και στη συνέχεια να συνθέσουμε τις δύο συνιστώσες ώστε να προκύψει το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο (δηλ. η τιμή του συνολικού διανύσματος E) για καθένα από τα δύο κύματα. Επειδή, όπως δείχνουν οι ενδεικτικές τιμές των ϵ_r και σ (άρα και του χ) που προαναφέρθηκαν, η παράμετρος γ θα είναι πάντοτε από αρκετά ως πολύ μικρότερη του 1, αγνοούμε συγχρόνως και τους όρους που περιέχουν την δύναμη γ^4 και το αποτέλεσμα είναι για το κύμα χώρου

$$E(\chi) = [E_z^2(\chi) + E_\rho^2(\chi)]^{1/2} \cong j30kIL \cos \psi \left(\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} + R_V \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) \tag{8.2.14}$$

* Αυτό και πραγματικά συμβαίνει στην περίπτωση που το δίπολο εκπομπής βρίσκεται πολύ μακριά από τη γη ($h_1 \gg \lambda$), οπότε το προσπίπτον κύμα είναι τοπικά (μεταξύ πομπού και δέκτη) περίπου επίπεδο. Τότε ο συντελεστής εξασθένισης F έχει πολύ μικρή τιμή και το κύμα επιφανείας γίνεται αμελητέο.

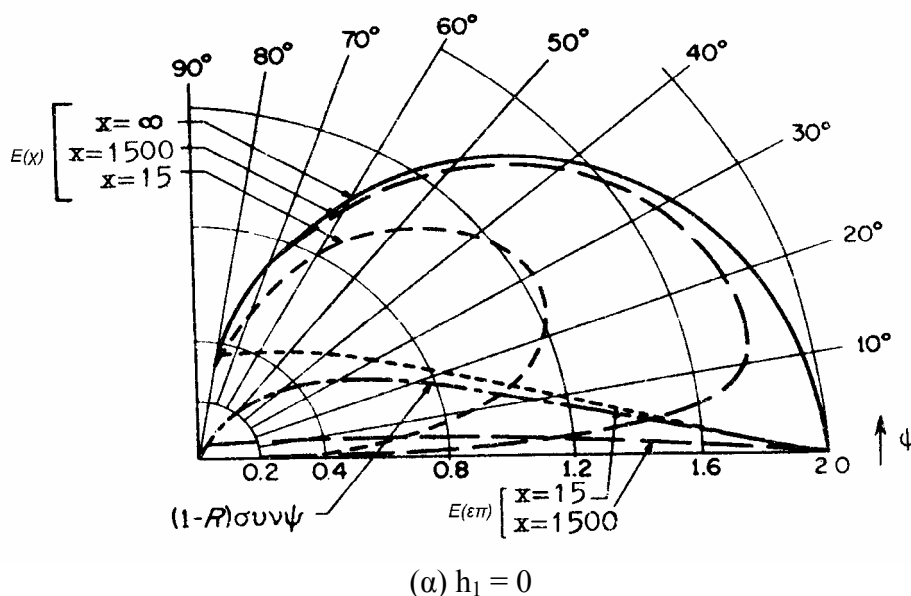
και ομοίως για το κύμα επιφανείας

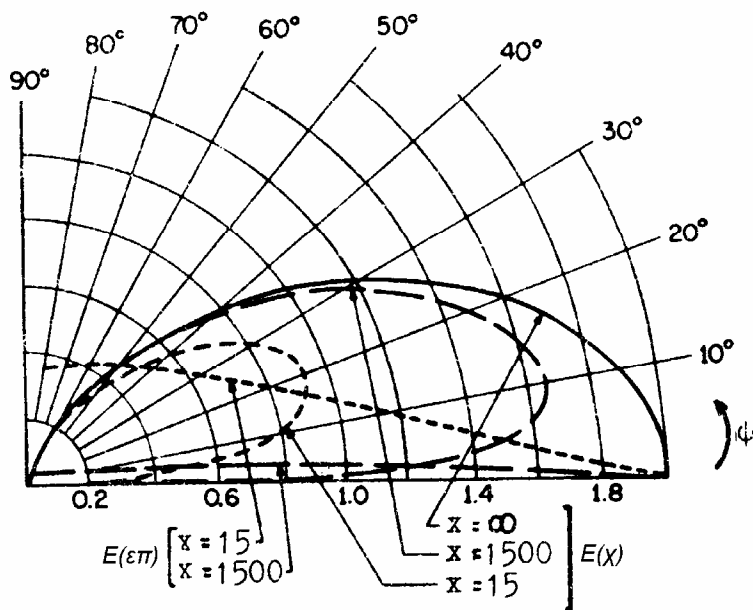
$$E_{(\varepsilon\pi)} \cong j30kILF(1 - R_V)\sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi} \left[1 - 2\gamma^2 + \gamma^2 \cos^2 \psi \left(1 + \frac{\sin^2 \psi}{2} \right) \right] \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \quad (8.2.15)$$

όπου οι δείκτες «(χ)» και «(επ)» δηλώνουν αντίστοιχα το κύμα επιφανείας και το κύμα χώρου και πρέπει να προσέξουμε ότι η τετραγωνική ρίζα είναι *μιγαδική* (και δίνει το *μιγαδικό μέτρο* του συνισταμένου διανύσματος E, σύμφωνα με τον ορισμό του phasor διανύσματος όπως έχει δοθεί στο εισαγωγικό κεφάλαιο του παρόντος).

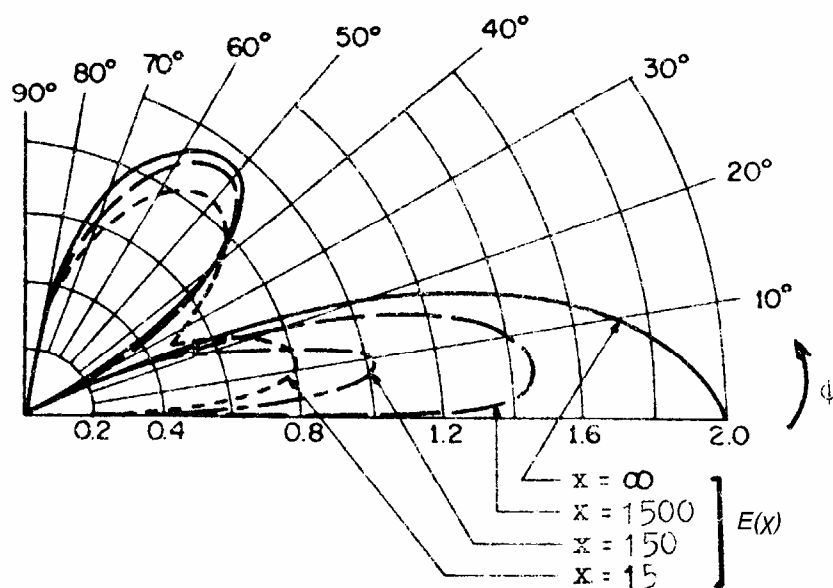
Το μέτρο (απόλυτη τιμή) του ηλεκτρικού πεδίου των κυμάτων επιφανείας και χώρου σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, αλλά χωρίς να ληφθεί υπόψη ο συντελεστής εξασθένησης F (ο οποίος εκφράζει κυρίως την εξασθένηση του κύματος επιφανείας με την απόσταση), παρουσιάζεται γραφικά για διάφορες τιμές της παραμέτρου χ στα Σχ. 8.8(α-γ) που ακολουθούν. Όπως δείχνει η (8.2.7), η παράμετρος χ είναι ανάλογη της ειδικής αγωγιμότητας σ της γης, ενώ για δεδομένο σ μειώνεται με την αύξηση της συχνότητας. Επομένως τα σχήματα δείχνουν ότι το κύμα επιφανείας είναι μεγαλύτερο για χαμηλές συχνότητες. Δείχνουν επίσης ότι οι τιμές του είναι σημαντικές μόνο για μικρές γωνίες ψ, δηλ. για προσπίπτον κύμα σχεδόν παράλληλο στην επιφάνεια της γης (πράγμα που δικαιολογεί την ονομασία «κύμα επιφανείας»), ενώ το κύμα χώρου για ψ → 0 μηδενίζεται.

Σχ. 8.8: Μέτρο του πεδίου του κύματος επιφανείας και χώρου για ε_r = 15, διάφορες τιμές της παραμέτρου χ = σ/ωε₀ και διάφορα ύψη h₁ του διπόλου εκπομπής, θεωρώντας F = 1. Στο σχ. (γ) δεν παρουσιάζεται το κύμα επιφανείας, επειδή είναι ίδιο με τα προηγούμενα.





(β) $h_1 = \lambda/4$



(γ) $h_1 = \lambda/2$

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα σχήματα αυτά απεικονίζουν το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου για ορισμένο ρεύμα I του διπόλου, το οποίο είναι το ίδιο για όλες τις περιπτώσεις τιμών του χ που παρουσιάζονται. Μεγαλύτερες τιμές του πεδίου σημαίνουν μεγαλύτερη εκπεμπόμενη ισχύ με το ίδιο ρεύμα I (δηλ. μεγαλύτερη αντίσταση ακτινοβολίας, όπως έχει οριστεί στα προηγούμενα), πράγμα που συμβαίνει π.χ. για το κύμα χώρου όταν αυξάνεται το χ , δηλ. αυξάνεται η αγωγιμότητα της γης ή / και μειώνεται η συχνότητα. Όπως φαίνεται από τα σχήματα, για το κύμα επιφανείας συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. αυξάνεται η ισχύς του όταν μειώνεται το χ . Όταν αυξάνεται το χ το κύμα επιφανείας τείνει να μειώνεται, ενώ στην οριακή περίπτωση $\chi \rightarrow \infty$ (δηλ. για απείρως αγωγίμη γη) μηδενίζεται. Αυτό δείχνει

ότι ουσιαστικά το κύμα επιφανείας οφείλει την ύπαρξή του στην πεπερασμένη αγωγιμότητα* της γης, διότι σε περίπτωση άπειρης αγωγιμότητας (αν η επιφάνεια της γης ήταν τέλειος αγωγός) θα υπήρχε μόνο το κατευθείαν κύμα και το ανακλώμενο από το «είδωλο» της κεραίας, δηλ. μόνο οι δύο πρώτοι όροι των (8.2.11) και (8.2.12) που αποτελούν το κύμα χώρου και όχι ο τρίτος που είναι το κύμα επιφανείας. Αντίστοιχα παρατηρούμε ότι στις μικρές γωνίες ψ η τιμή του κύματος χώρου για πεπερασμένη αγωγιμότητα της γης (πεπερασμένο χ) είναι πολύ μικρότερη από την τιμή του για απείρως αγωγήμη γη ($\chi \rightarrow \infty$), επειδή ακριβώς για πεπερασμένη αγωγιμότητα ένα μέρος της ισχύος πηγαίνει στο κύμα επιφανείας, το οποίο για απείρως αγωγήμη γη δεν υπάρχει.

Όσον αφορά στον συντελεστή εξασθένησης F , αυτός έχει αρκετά περίπλοκη μορφή και δίνεται από την

$$F = 1 - j\sqrt{\pi\delta} e^{-\delta} \operatorname{erfc}(j\sqrt{\delta}) \quad (8.2.16)$$

όπου

$$\delta = -2jk r_2 \gamma^2 \frac{1 - \gamma^2 \cos^2 \psi}{(1 - R_V)^2} \quad (8.2.17)$$

Η συνάρτηση $\operatorname{erfc}(\dots)$ που εμφανίζεται παραπάνω λέγεται **συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος** (complementary error function) και μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (8.2.18)$$

όπου η $\operatorname{erf}(z)$ λέγεται **συνάρτηση σφάλματος****.

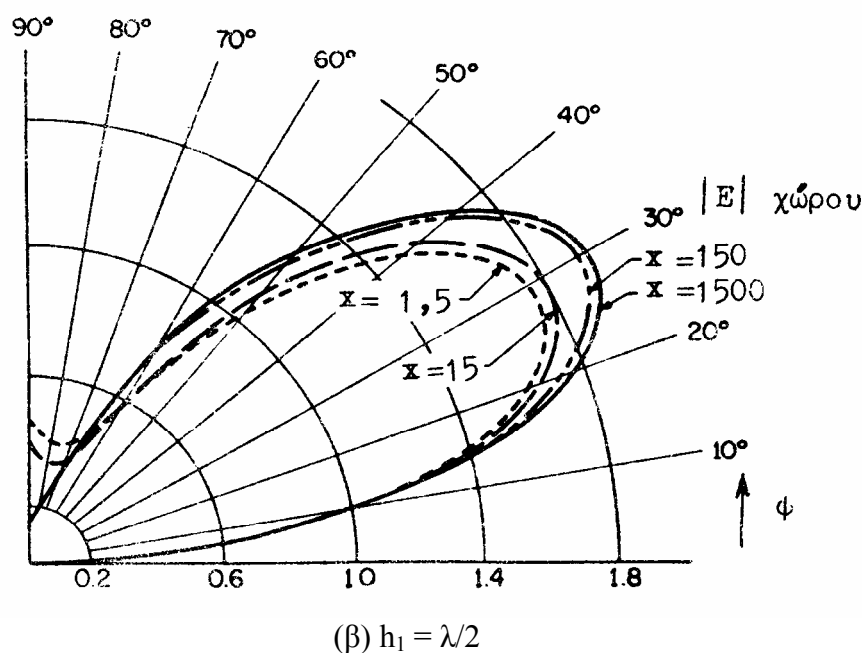
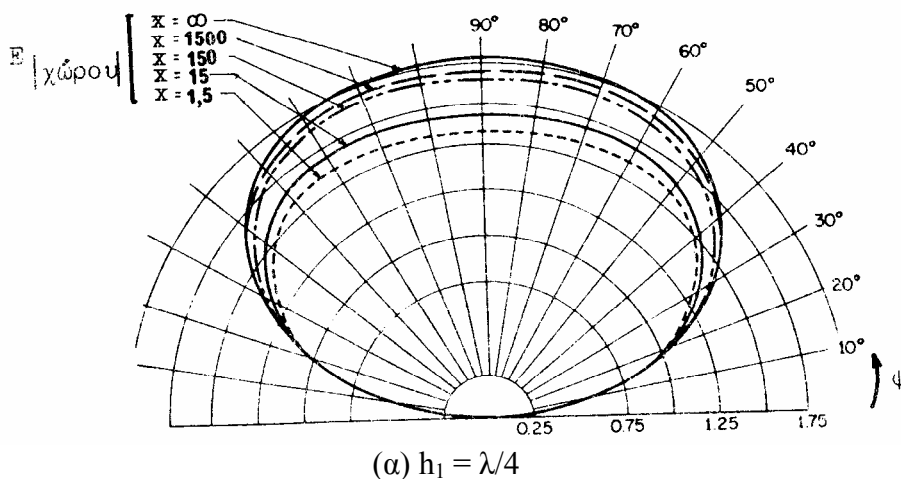
Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, ο συντελεστής F εξαρτάται από την απόσταση r_2 , το μήκος κύματος $\lambda = 2\pi/k$ και τις σταθερές ϵ_r και σ της γης. Η μέγιστη τιμή του είναι η μονάδα ($F = 1$) και εμφανίζεται για μηδενική απόσταση ($r_2 = 0$, οπότε $\delta = 0$). Για μικρές αποστάσεις, της τάξης των λίγων μηκών κύματος, η τιμή του F παραμένει κοντά στο 1, ενώ για μεγαλύτερες αποστάσεις μειώνεται ραγδαία, όπως θα δούμε στα επόμενα. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα επιφανείας έχει γενικά περιορισμένη εμβέλεια. Το γεγονός ότι η εμβέλεια αυτή αντιστοιχεί σε μερικά μήκη κύματος σημαίνει ειδικότερα ότι η πρακτική χρησιμότητα του κύματος επιφανείας περιορίζεται στις χαμηλές συχνότητες όπου το μήκος κύματος είναι σχετικά μεγάλο.

* Πιο συγκεκριμένα, έχει αποδειχθεί ότι η μαθηματική αιτία της εμφάνισης κύματος επιφανείας με σχετικά μεγάλες τιμές είναι η γρήγορη εναλλαγή της φάσης του συντελεστή ανάκλασης R_V από $-\pi$ σε 0 εκατέρωθεν της γωνίας ψευδο-Brewster (βλ. το Σχ. 8.6). Αυτό σημαίνει ότι το κύμα επιφανείας πρακτικά εμφανίζεται μόνο για κατακόρυφη πόλωση, αφού στον συντελεστή R_H δεν υπάρχει τέτοιο φαινόμενο.

** Η erf και η erfc είναι πολύ χρήσιμες, μεταξύ άλλων, στη θεωρία της ψηφιακής διαμόρφωσης.

8.2.4. Η περίπτωση οριζόντιου διπόλου

Στην περίπτωση οριζόντιου διπόλου που εκπέμπει πάνω από την επιφάνεια της γης, η κατάσταση διαφοροποιείται ανάλογα με την κατεύθυνση κατά την οποία εξετάζουμε το κύμα. Σε γενικές γραμμές, όμως, ισχύει ότι το κύμα επιφανείας είναι πολύ μικρότερο από ό,τι για κατακόρυφο δίπολο, ως και αμελητέο. Σε επίπεδο κάθετο στον άξονα του διπόλου, το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος χώρου φαίνεται στο Σχ. 8.9(α-β) που ακολουθεί.

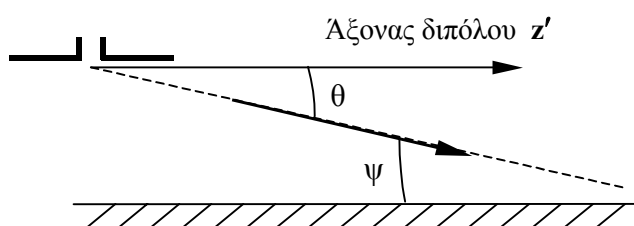


Σχ. 8.9: Μέτρο του πεδίου του κύματος χώρου για οριζόντιο δίπολο σε διάφορα ύψη h_1 , για $\epsilon_r = 15$ και διάφορες τιμές της παραμέτρου $\chi = \sigma/\omega\epsilon_0$

Στο επίπεδο αυτό η πόλωση του κύματος γίνεται οριζόντια και η ανάκλαση από τη γη διέπεται από τον συντελεστή ανάκλασης R_H (και όχι τον R_V όπως για κατακόρυφο δίπολο). Το κύμα επιφανείας δεν δείχνεται στο Σχ. 8.9 επειδή είναι πολύ μικρό, πράγμα που φαίνεται έμμεσα από το γεγονός ότι για μεγάλες τιμές του χ , μέχρι και την περίπτωση $\chi \rightarrow \infty$, το κύμα χώρου μεταβάλλεται πολύ λίγο (όπως έχει ήδη παρατηρηθεί, αν υπήρχε

σημαντικό κύμα επιφανείας θα προκαλούσε αρκετή μεταβολή του κύματος χώρου σε σύγκριση με την περίπτωση $\chi \rightarrow \infty$, πράγμα που εδώ δεν υπάρχει). Αλγεβρικά, ο συντελεστής εξασθένησης του κύματος επιφανείας στην περίπτωση κάθετης πόλωσης, για σχετικά μεγάλες τιμές της αριθμητικής απόστασης (η οποία θα ορισθεί σε λίγο), προσεγγίζει την τιμή $\gamma^4 F$, όπου F είναι ο αντίστοιχος συντελεστής για παράλληλη πόλωση και η παράμετρος γ που δίνεται από την (8.2.13) είναι πολύ μικρότερη από τη μονάδα, πράγμα που δείχνει επίσης ότι το κύμα επιφανείας για κάθετη πόλωση είναι αμελητέο.

Σε κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον άξονα του διπόλου η πόλωση είναι κατακόρυφη και εφαρμόζεται ο συντελεστής ανάκλασης R_V όπως και για κατακόρυφο δίπολο. Στο επίπεδο αυτό, όμως, το κύμα που διαδίδεται για πολύ μικρές γωνίες ψ , δηλ. περίπου παράλληλα στην επιφάνεια της γης, προέρχεται κυρίως από το κύμα που εκπέμπει το δίπολο σε κατευθύνσεις πολύ κοντά στον άξονά του δηλ. γωνίες θ πολύ κοντά είτε στο 0 είτε στις 180° . Το κύμα αυτό σύμφωνα με το διάγραμμα ακτινοβολίας του διπόλου είναι πολύ μικρό, όπως επιβεβαιώνουμε από το Σχ. 4.11, αλλά και από την επίδραση του $\sin\theta$ στις εξ. (4.4.2), αναφερόμενοι στη γωνία εκπομπής θ που φαίνεται στο Σχ. 8.10 παρακάτω.



Σχ. 8.10: Εκπομπή οριζόντιου διπόλου σε κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τον άξονά του

Το γενικό συμπέρασμα είναι, λοιπόν, ότι στην περίπτωση οριζόντιου διπόλου το κύμα επιφανείας είναι σχεδόν άχρηστο λόγω του μικρού του μεγέθους, είτε σε επίπεδο κάθετο στον άξονα του διπόλου είτε σε επίπεδο που περιέχει τον άξονα του διπόλου. Από την άλλη πλευρά, το κύμα χώρου σε καθένα από τα επίπεδα αυτά δίνεται από τις

$$\text{Επίπεδο κάθετο στο δίπολο: } E_{(\chi)} \cong j30kIL \left(\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} + R_H \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) \quad (8.2.19)$$

$$\text{Επίπεδο που περιέχει το δίπολο: } E_{(\chi)} \cong j30kIL \sin\psi \left(\frac{e^{-jk r_1}}{r_1} - R_H \frac{e^{-jk r_2}}{r_2} \right) \quad (8.2.20)$$

και είναι ουσιαστικά το μόνο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μετάδοση σήματος από οριζόντιο δίπολο. Αυτό όμως χρειάζεται κεραία σχετικά ανυψωμένη πάνω από το έδαφος.

8.2.5. Διάδοση στην επιφάνεια της γης: κεραιές πάνω στο έδαφος

Όπως έχει ήδη παρατηρηθεί*, το κύμα επιφανείας έχει σημασία μόνο για πολύ μικρές γωνίες ψ , δηλ. για πολύ πλάγια πρόσπτωση, σχεδόν παράλληλα με την επιφάνεια της γης. Από το Σχ. 8.4 (ή το Σχ. 8.7) φαίνεται αμέσως ότι αυτό συμβαίνει εφόσον τα ύψη των κεραιών h_1 , h_2 είναι πολύ μικρά. Αν θέσουμε $h_1 = h_2 = 0$, δηλ. θεωρήσουμε και τις δύο κεραιές πάνω στην επιφάνεια, έχουμε την οριακή περίπτωση $\psi = 0$. Πρακτικά αυτό αναμένεται να συμβεί για μικρές συχνότητες και μεγάλα μήκη κύματος, π.χ. αρκετές εκατοντάδες ή και χιλιάδες μέτρα, οπότε αν έχουμε ύψη h_1 και h_2 λίγων μέτρων θα αντιστοιχούν σε ένα πολύ μικρό κλάσμα του μήκους κύματος και θα ισχύει η προσέγγιση $h_1, h_2 \cong 0$. Στην περίπτωση αυτή ($\psi = 0$) η απόλυτη τιμή $|F|$ συμβολίζεται με A και αποτελεί τον συντελεστή εξασθένησης του κύματος εδάφους πάνω στην επιφάνεια της γης (για $\psi = 0$ το κύμα χώρου μηδενίζεται και το κύμα εδάφους περιέχει μόνο το κύμα επιφανείας). Προφανώς και ο συντελεστής A είναι συνάρτηση της παραμέτρου δ της (8.2.17), η οποία για $\psi = 0$ γράφεται στη μορφή**

$$\delta|_{\psi=0} = p e^{-jb} = -\frac{jk_1 r}{2} \gamma^2 (1 - \gamma^2) \quad (8.2.21)$$

όπου η απόσταση r_2 έγινε ίση με την r_1 και συμβολίζεται πλέον με r . Το μέτρο $p = |\delta|$ αποκαλείται αριθμητική απόσταση και το όρισμα b είναι η σταθερά φάσης. Επειδή για όλες τις γήινες επιφάνειες στην πράξη η σχετική διηλεκτρική σταθερά ϵ_r είναι αρκετά μεγάλη, προκύπτουν οι ακόλουθες προσεγγιστικές εκφράσεις

$$p \cong \frac{\pi r}{\lambda \chi} \cos b \quad (8.2.22)$$

$$b \cong 2 \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_r}{\chi} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\chi} \right) \quad (8.2.23)$$

η πρώτη από τις οποίες δείχνει ότι η ποσότητα p είναι ανάλογη της απόστασης r (πράγμα που δικαιολογεί την ονομασία «αριθμητική απόσταση»). Εκτός από την γενική σχέση (8.2.16), ο συντελεστής A δίνεται προσεγγιστικά από τις παρακάτω εμπειρικές σχέσεις:

$$\text{Για όλες τις τιμές του } b: \quad A \cong A_1 - \sin b \sqrt{\frac{p}{2}} e^{-(5/8)p} \quad (8.2.24\alpha)$$

$$\text{Για } b < 5^\circ: \quad A \cong A_1 = \frac{2 + 0,3p}{2 + p + 0,6p^2} \quad (8.2.24\beta)$$

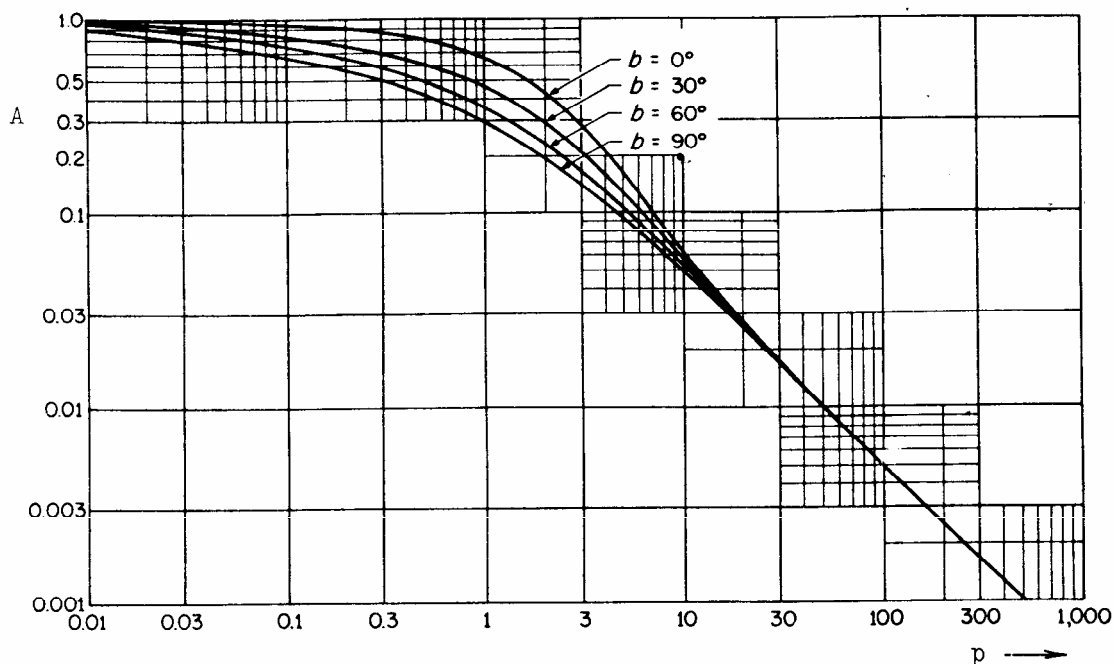
* Η παρατήρηση αυτή προέκυψε προτού ληφθεί υπόψη ο συντελεστής εξασθένησης F , αυτό όμως δεν δημιουργεί πρόβλημα επειδή ο συντελεστής F είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος του 1.

** Αυτό διότι για $\psi = 0$ ο συντελεστής $R_H = -1$, όπως φαίνεται και στο Σχ. 8.5.

$$\text{Για } b < 5^\circ \text{ και } p < 4,5: \quad A \cong e^{-0,43+0,01p^2} \quad (8.2.24\gamma)$$

$$\text{Για } b < 5^\circ \text{ και } p \geq 4,5: \quad A \cong \frac{1}{2p-3,7} \quad (8.2.24\delta)$$

Το Σχ. 8.11 που ακολουθεί παρουσιάζει ενδεικτικές καμπύλες του συντελεστή A συναρτήσει της αριθμητικής απόστασης p .



Σχ. 8.11: Ο συντελεστής εξασθένησης A του κύματος εδάφους ως συνάρτηση της αριθμητικής απόστασης p (για διάφορες τιμές της σταθεράς φάσης b)

Για αριθμητικό παράδειγμα ας λάβουμε μια ενδεικτική περίπτωση εδάφους με $\epsilon_r = 15$ και $\sigma = 0,012 \text{ S/m}$. Σε συχνότητα 600 kHz (που αντιστοιχεί σε μήκος κύματος $\lambda = 500 \text{ m}$) θα έχουμε $\chi = 360$ και $b \cong 2,5^\circ$, οπότε $\cos b \cong 1$ και για μια απόσταση $r = 100\lambda$ (δηλ. 50 km) η αριθμητική απόσταση προκύπτει $p \cong 0,87$. Σε μια μεγαλύτερη συχνότητα, π.χ. 30 MHz (με μήκος κύματος $\lambda = 10 \text{ m}$), έχουμε $\chi = 7,2$, $b \cong 65,9^\circ$ και $\cos b \cong 0,4$, οπότε για αντίστοιχη απόσταση $r = 100\lambda$ (η οποία όμως είναι μόνο 1 km) βρίσκουμε $p \cong 17,79$. Με βάση τις τιμές αυτές, από τις καμπύλες του Σχ. 8.11 παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των 600 kHz ο συντελεστής εξασθένησης A είναι κοντά στο 0,4 σε απόσταση 50 km, ενώ στη συχνότητα των 30 MHz είναι της τάξης του 0,05 σε απόσταση 1 km. Με άλλα λόγια, στα 30 MHz το κύμα επιφανείας εξασθενεί σχεδόν 10 φορές περισσότερο σε απόσταση 50 φορές μικρότερη από ό,τι στα 600 kHz. Από το παράδειγμα φαίνεται καθαρά ότι το κύμα επιφανείας είναι χρήσιμο μόνο σε χαμηλές συχνότητες.

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση οριζόντιου διπόλου προκύπτουν ανάλογες εκφράσεις για τον συντελεστή εξασθένησης. Για την αριθμητική απόσταση p ισχύουν πλέον διαφορετικές εκφράσεις ως εξής

$$p \cong \frac{\pi r}{\lambda} \frac{\chi}{\cos b'} \quad (8.2.25)$$

$$b' \cong \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\chi} \right) \quad (8.2.26)$$

οι οποίες, για την ίδια φυσική απόσταση r , οδηγούν σε πολύ μεγαλύτερες τιμές της αριθμητικής απόστασης από ό,τι για κατακόρυφο δίπολο. Αυτό δείχνει και πάλι ότι το κύμα επιφανείας είναι πολύ μικρότερο (δηλ. εν προκειμένω μειώνεται πολύ πιο γρήγορα με την απόσταση) στην περίπτωση αυτή.

8.2.6. Διάδοση πάνω από τη γη: κεραιές ανυψωμένες

Όπως προαναφέρθηκε, για διάδοση ακριβώς πάνω στην επιφάνεια της γης ($\psi = 0$), το κύμα χώρου μηδενίζεται και η διάδοση γίνεται μόνο μέσω του κύματος επιφανείας. Από την άλλη πλευρά, όμως, είδαμε ότι το κύμα επιφανείας εξασθενεί δραστικά για μεγαλύτερες συχνότητες, π.χ. στη ζώνη (μπάντα) των HF (3 – 30 MHz) και προφανώς περισσότερο για ακόμη υψηλότερες συχνότητες. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι στις συχνότητες των HF και άνω θα πρέπει οι κεραιές εκπομπής και λήψης να είναι ανυψωμένες πάνω από την επιφάνεια της γης ($h_1, h_2 > 0$) ώστε η διάδοση να γίνεται μέσω του κύματος χώρου. «Ευτυχώς» αυτό που έχει σημασία (όπως σε όλα τα προβλήματα διάδοσης H/M κυμάτων) είναι το ύψος των κεραιών όχι σε απόλυτους αριθμούς αλλά σε σχέση με το μήκος κύματος, επομένως σε υψηλές συχνότητες με μικρά μήκη κύματος η ανύψωση των κεραιών σε ικανό ύψος (ενδεικτικά: $h_1, h_2 \geq \lambda/4$) πάνω από τη γη είναι πρακτικά πολύ πιο εύκολη από ό,τι σε χαμηλότερες συχνότητες. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η επιλογή του κατάλληλου ύψους χρειάζεται προσοχή: Υπάρχουν (σε συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών συχνότητας, απόστασης και ιδιοτήτων του εδάφους) κάποιες περιπτώσεις όπου η ανύψωση των κεραιών είναι δυνατό να οδηγήσει όχι σε αύξηση αλλά σε μείωση της ισχύος που μεταδίδεται στην κεραία λήψης, επειδή μειώνεται το κύμα επιφανείας αλλά δεν αυξάνεται (ακόμη) επαρκώς το κύμα χώρου.

Στην περίπτωση ανυψωμένων κεραιών εκπομπής και λήψης το σήμα στον δέκτη είναι το (διανυσματικό) άθροισμα του κύματος επιφανείας και του κύματος χώρου. Οι συνιστώσες αυτών για κατακόρυφο δίπολο έχουν δοθεί στις (8.2.11-12), από τις οποίες φαίνεται ότι για μικρές γωνίες ψ η μεγαλύτερη από τις δύο (με διαφορά) είναι η E_z συνιστώσα*. Αγνοώντας, λοιπόν, την E_ρ συνιστώσα, το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την (8.2.11). Θεωρούμε (όπως ισχύει συνήθως στην πράξη) ότι το μήκος της ζεύξης (δηλ. η οριζόντια

* Αυτό οφείλεται για το κύμα χώρου στον παράγοντα $\sin\psi$ της (8.2.12) και για το κύμα επιφανείας στον παράγοντα γ της (8.2.12).

απόσταση d των δύο κεραιών) είναι πολύ μεγαλύτερο από τα ύψη τους πάνω από τη γη ($d \gg h_1 + h_2$), οπότε η γωνία ψ είναι πολύ μικρή και ισχύουν οι προσεγγίσεις

$$\cos\psi \cong 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{d}$$

Με τις παραπάνω προσεγγίσεις και αγνοώντας τους όρους γ^2 και γ^4 (οι οποίοι είναι πολύ μικρότεροι από τη μονάδα), η (8.2.11) ξαναγράφεται στη μορφή

$$E_z \cong j30kIL \left(\frac{e^{-jkr_1}}{d} + R_V \frac{e^{-jkr_2}}{d} + F(1 - R_V) \frac{e^{-jkr_2}}{d} \right)$$

$$\text{ή} \quad E_z \cong E_{z,0} \left[1 + R_V e^{-j\Delta} + F(1 - R_V) e^{-j\Delta} \right] \quad (8.2.27)$$

όπου Δ η διαφορά φάσης που οφείλεται στη διαφορά των διαδρομών του ανακλώμενου και του κατευθείαν κύματος (όπως στα Σχ. 8.4, 8.7), δηλ.

$$\Delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) \quad (8.2.28)$$

ενώ $E_{z,0}$ είναι το κύμα που εκπέμπει το δίπολο μεμονωμένο στον ελεύθερο χώρο, δηλ. για δίπολο Hertz το κατακόρυφο πεδίο στο μεσοκάθετο επίπεδο αυτού ($\theta = 90^\circ$)

$$\text{Δίπολο Hertz:} \quad E_{z,0} = j30kIL \frac{e^{-jkr_1}}{d} \quad (8.2.29)$$

όπως εύκολα επιβεβαιώνουμε από τις (4.4.2α-β) με $\zeta = 120\pi$.

Η (8.2.27) δεν περιορίζεται σε δίπολο Hertz αλλά ισχύει και για άλλες περιπτώσεις κεραιών, π.χ. για δίπολο $\lambda/2$ θα πρέπει το $E_{z,0}$ να ληφθεί από την (4.4.14) με $\theta = 90^\circ$:

$$\text{Δίπολο } \lambda/2: \quad E_{z,0} = j60I_m \frac{e^{-jkr_1}}{d} \quad (8.2.30)$$

όπου I_m το μέγιστο ρεύμα του διπόλου (όπως ορίζεται στην § 4.4.2 του παρόντος).

Επισημαίνουμε ακόμη ότι η (8.2.27) γενικεύεται πέραν της κατακόρυφης (z) συνιστώσας και για την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου, αρκεί να αντικατασταθεί ο συντελεστής ανάκλασης R_V από R_H και ο συντελεστής F από τον αντίστοιχό του για οριζόντια πόλωση. Ο συντελεστής εξασθένησης F δίνεται από τις προηγούμενες (8.2.16-17), οι οποίες απλοποιούνται με τη βοήθεια των παραπάνω προσεγγίσεων και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\sin\psi = \frac{h_1 + h_2}{r_2} \cong \tan\psi = \frac{h_1 + h_2}{d}$$

Έτσι η (8.2.17) μπορεί να γραφεί

$$\delta = p e^{-jb} = -\frac{jk r_2}{2} \gamma^2 (1 - \gamma^2) \left(1 + \frac{h_1 + h_2}{\gamma r_2 \sqrt{1 - \gamma^2}} \right)^2 \quad (8.2.31)$$

όπου η παράμετρος δ τέθηκε σε πολική μορφή όπως στην (8.2.21), ορίζοντας και εδώ την αριθμητική απόσταση p και την σταθερά φάσης b , αν και δεν δίνονται πλέον από τις (8.2.22-23). Για τον υπολογισμό του συντελεστή F μπορούν και εδώ να χρησιμοποιηθούν (με $p = |\delta|$) οι προσεγγιστικές εκφράσεις (8.2.24α-δ).

Για μεγάλες τιμές του $|\delta|$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι (γνωστές από τα μαθηματικά) ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων $\operatorname{erfc}()$ και $\exp()$, με τη βοήθεια των οποίων προκύπτει η ακόλουθη ασυμπτωτική έκφραση του συντελεστή F για $|\delta| \rightarrow \infty$:

$$F \cong -\frac{1}{2\delta} - \frac{1 \cdot 3}{(2\delta)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\delta)^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2\delta)^4} \dots \quad (8.2.32)$$

ενώ για αρκετά μεγάλη τιμή ($|\delta| > 20$) αρκεί ο πρώτος όρος της σειράς

$$F \cong -\frac{1}{2\delta} \quad , \quad |\delta| > 20 \quad (8.2.33)$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι αν η απόσταση των κεραιών είναι αρκετά μεγάλη ώστε να ισχύει $|\gamma r_2| \gg h_1 + h_2$, τότε ο τελευταίος παράγοντας της (8.2.31) γίνεται περίπου ίσος με 1 και μπορεί να αγνοηθεί, οπότε αυτή μετατρέπεται στην (8.2.21). Αυτή όμως είναι η σχέση που ισχύει για $\psi = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι ο συντελεστής F ανάγεται στον συντελεστή A (ο οποίος ορίζεται ακριβώς μέσω της τιμής του F για $\psi = 0$ σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο). Επομένως ισχύει και η προσέγγιση (8.2.22) για την αριθμητική απόσταση p , με τη βοήθεια της οποίας η (8.2.33) γράφεται

$$|F| \cong A \cong \frac{1}{2|\delta|} = \frac{1}{2p} \cong \frac{\lambda \chi}{2\pi d \cos b} \quad (8.2.34)$$

δηλ. υπό τις προϋποθέσεις αυτές ο συντελεστής εξασθένησης F δεν εξαρτάται από τα ύψη h_1 , h_2 των κεραιών. Λαμβάνοντας το μέτρο του τρίτου όρου της (8.2.27) και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση (8.2.34) έχουμε για το μέτρο του κύματος επιφανείας:

$$|E_{z(\varepsilon\pi)}| \cong \frac{30 k I L}{d} \frac{|1 - R_V|}{2p} \cong \frac{30 I L \chi}{d^2 \cos b} |1 - R_V| \quad (8.2.35)$$

η οποία δείχνει ακόμη μία φορά την ταχεία μείωση του κύματος αυτού.

Ιδίως για σχετικά μεγάλες συχνότητες (της ζώνης HF και άνω) η μείωση του κύματος επιφανείας είναι ραγδαία, όπως δείχθηκε με το προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (το οποίο ισχύει και στην παρούσα περίπτωση αφού ο συντελεστής F κατά μέτρο ανάγεται στον συντελεστή A), και κατά συνέπεια το κύμα αυτό γίνεται πρακτικά αμελητέο και η

διάδοση γίνεται μέσω του κύματος χώρου. Για το κύμα χώρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η (8.2.27), αγνοώντας τον τρίτο όρο (δηλ. το κύμα επιφανείας), ενώ για τη διαφορά φάσης Δ μπορεί να βρεθεί, με τη βοήθεια του διωνυμικού αναπτύγματος, η ακόλουθη προσέγγιση

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= d\sqrt{1 + \left(\frac{h_1 + h_2}{d}\right)^2} - d\sqrt{1 + \left(\frac{h_1 - h_2}{d}\right)^2} \cong \\ &\cong d\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h_1 + h_2}{d}\right)^2\right] - d\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{h_1 - h_2}{d}\right)^2\right] = \frac{2h_1h_2}{d} \end{aligned} \quad (8.2.36)$$

Από την (8.2.28) παίρνουμε λοιπόν

$$\Delta \cong \frac{4\pi}{\lambda} \frac{h_1h_2}{d} \quad (8.2.37)$$

και επειδή η Δ είναι πολύ μικρή, ισχύει $\cos\Delta \cong 1$ και $\sin\Delta \cong \Delta$. Εισάγουμε επίσης την προσέγγιση $R_V \cong -1$ η οποία ισχύει για μικρές γωνίες ψ , όπως δείχνει το Σχ. 8.6 (αντίστοιχα ισχύει και $R_H \cong -1$, σύμφωνα με το Σχ. 8.5, κατά συνέπεια οι προσεγγίσεις μας εφαρμόζονται και για οριζόντιο δίπολο). Με χρήση όλων των παραπάνω, λαμβάνοντας το μέτρο της (8.2.27) παίρνουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου

$$|E_z| \cong |E_{z,0}| |1 - e^{-j\Delta}| = |E_{z,0}| |1 - \cos\Delta + j\sin\Delta| \cong |E_{z,0}| |\sin\Delta| \cong |E_{z,0}| |\Delta|$$

δηλ.
$$|E| \cong |E_0| \frac{4\pi h_1h_2}{\lambda d} \quad (8.2.38)$$

όπου παραλείφθηκε ο δείκτης z διότι, όπως παρατηρήθηκε παραπάνω, η (8.2.27) ισχύει (με κατάλληλη επέκταση) και για την οριζόντια συνιστώσα του πεδίου.

Αυτή είναι μια γενική και πολύ χρήσιμη σχέση για το πεδίο που φτάνει στον δέκτη λόγω της μετάδοσης του κύματος πάνω από τη γη. Τονίζουμε και πάλι ότι E_0 είναι το πεδίο που θα έφτανε στον δέκτη αν υπήρχε μόνο ο πομπός (και όχι η γη), και με την έννοια αυτή ο δεύτερος παράγοντας της (8.2.38) εκφράζει την πρόσθετη εξασθένηση λόγω του εδάφους ή της θάλασσας. Π.χ. για δίπολο $\lambda/2$ χρησιμοποιούμε την (8.2.30) και έχουμε

$$|E| \cong \frac{240\pi |I_m| h_1 h_2}{\lambda d^2} \quad (8.2.39)$$

Για άλλες κεραιές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.1.3), η οποία δίνει

$$P_r \cong \frac{1}{2\zeta} |E_0|^2$$

και τον ορισμό του κέρδους της κεραιάς, από τον οποίο απορρέει (όπως π.χ. στην § 5.4.2)

$$P_r = \frac{W_T G}{4\pi d^2}$$

όπου E_0 το συνολικό πεδίο, P_r το μέτρο του διανύσματος Poynting, W_T η ισχύς του πομπού και G το κέρδος κατά την οριζόντια διεύθυνση, κατά την οποία θεωρούμε ότι η γίνεται περίπου η διάδοση και άρα η απόσταση είναι $r \cong d$. Συνδυάζοντας παίρνουμε

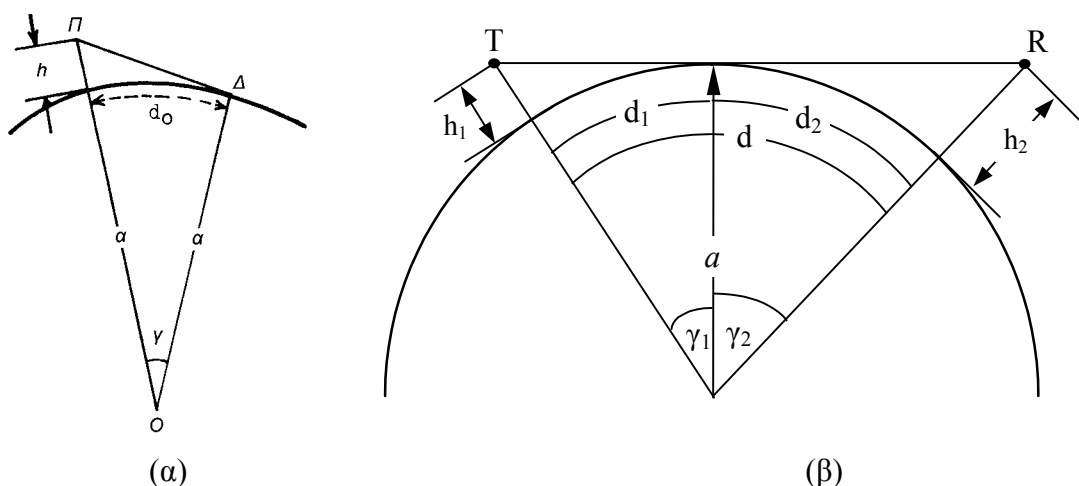
$$|E_0|^2 = 2\zeta \frac{W_T G}{4\pi d^2} \Rightarrow |E_0| \cong \frac{\sqrt{60 W_T G}}{d} \quad (8.2.40)$$

η οποία στη συνέχεια μπορεί να εισαχθεί στην (8.2.38). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι σχέσεις αυτές δείχνουν εξάρτηση της πυκνότητας ισχύος από την απόσταση όχι κατά d^{-2} , όπως θα ήταν στον ελεύθερο χώρο, αλλά κατά d^{-4} (το αντίστροφο της 4^{ης} δύναμης).

8.2.7. Οπτικός ορίζοντας – Επίδραση της καμπυλότητας της γης

Ως τώρα η επιφάνεια της γης θεωρήθηκε επίπεδη. Η προσέγγιση αυτή θεωρείται ικανοποιητική για αποστάσεις $d \leq 80 f^{-1/3}$ (όπου η d εκφράζεται σε km και η f σε MHz)*. Για ζεύξεις μεγαλύτερου μήκους d , πρέπει να ληφθεί υπόψη και το σφαιρικό σχήμα της γης, το οποίο, εκτός από τον περιορισμό της μέγιστης απόστασης ζεύξης οπτικής επαφής λόγω του οπτικού ορίζοντα**, έχει γενικά τις ακόλουθες επιδράσεις στην ζεύξη:

- μείωση των υψών των κεραιών που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό του κύματος (είναι πλέον τα ύψη πάνω από το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο ανάκλασης και όχι πάνω από το έδαφος στη θέση της κάθε κεραίας)
- μείωση του ανακλώμενου κύματος λόγω της καμπυλότητας της ανακλαστικής επιφάνειας η οποία τείνει να διαπλατύνει την ανακλώμενη δέσμη.



Σχ. 8.12: (α) Οπτικός ορίζοντας (β) Μέγιστη απόσταση οπτικής επαφής δύο κεραιών

Τα παραπάνω αφορούν στο κύμα χώρου, ενώ για το κύμα επιφανείας δεν προβλέπεται

* Μια άλλη συνθήκη είναι $\psi \geq 57,3 (ka)^{-1/3}$ όπου ψ η γωνία πρόσπτωσης σε μοίρες.

** Θα δούμε όμως στα επόμενα ότι, λόγω τροποσφαιρικών φαινομένων, ο λεγόμενος ραδιοηλεκτρικός ορίζοντας είναι δυνατόν να εκτείνεται και πέραν του οπτικού ορίζοντα.

αξιόλογη επίδραση (άλλωστε συνήθως θα έχει αποσβεσθεί αρκετά πριν τον ορίζοντα).

Ο οπτικός ορίζοντας για μια κεραία σε ύψος h πάνω από τη γη δείχνεται στο Σχ. 8.12(α), όπου φαίνεται η μέγιστη απόσταση οπτικής επαφής d_0 για ευθύγραμμη διάδοση του κύματος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΠ (όπου η ευθεία ΠΔ εφάπτεται στην επιφάνεια της γης στο σημείο Δ, ενώ $a = 6370$ km είναι η ακτίνα της γης) φαίνεται αμέσως ότι

$$\cos \gamma = \frac{\alpha}{\alpha + h} = \frac{1}{1 + h/\alpha} = \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^{-1} \cong 1 - \frac{h}{\alpha}$$

όπου η προσεγγιστική σχέση προέκυψε από το διωνυμικό ανάπτυγμα επειδή $h \ll \alpha$. Επίσης η γωνία $\gamma = d_0 / \alpha$ είναι μικρή επειδή $d_0 \ll \alpha$, και άρα

$$\cos \gamma \cong 1 - \frac{\gamma^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d_0}{\alpha}\right)^2$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$\frac{h}{\alpha} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{d_0}{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow d_0 \cong \sqrt{2\alpha h} \quad (8.2.41)$$

Εφαρμόζοντας την (8.2.41) για δύο κεραίες τοποθετημένες σε ύψη h_1 και h_2 όπως στο Σχ. 8.12(β) διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη απόσταση οπτικής επαφής μεταξύ τους είναι

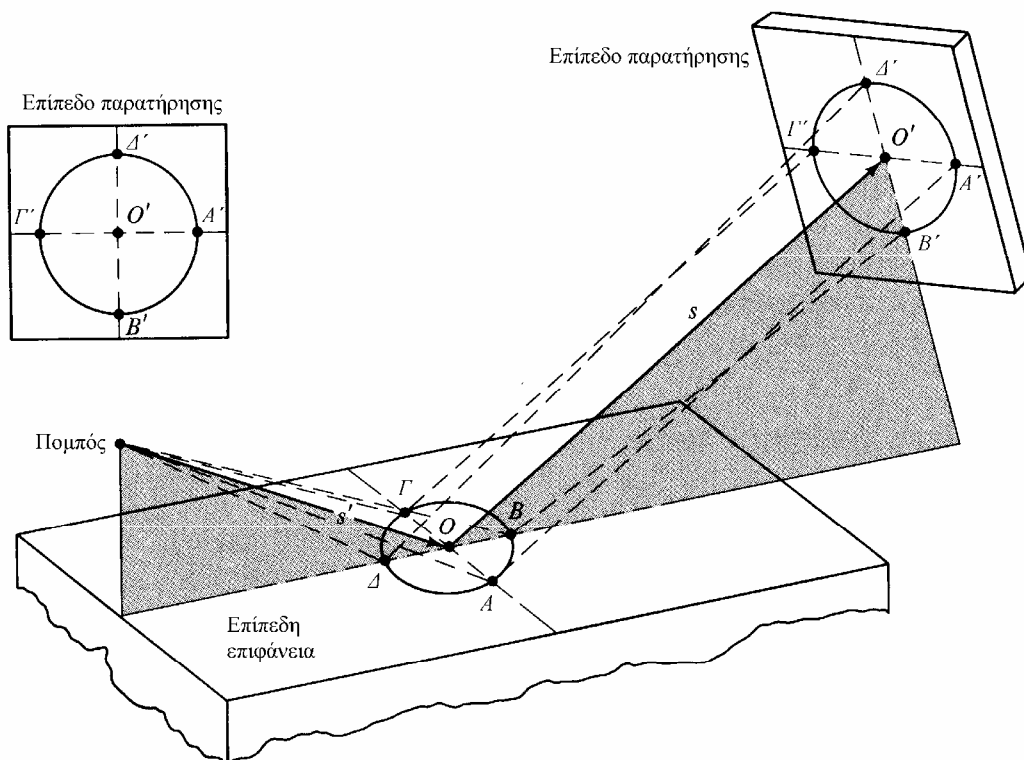
$$d_{\max} \cong \sqrt{2\alpha h_1} + \sqrt{2\alpha h_2} \quad (8.2.42)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την (γενικότερη) γεωμετρία του Σχ. 8.14 (βλ. παρακάτω) όπου δύο κεραίες είναι σε ύψη h_1 και h_2 πάνω από τη γη, αρκετά ψηλά ώστε να υπάρχει οπτική επαφή (δηλ. $d \leq d_{\max}$). Θεωρούμε το επίπεδο που εφάπτεται στο σημείο ανάκλασης και έστω h'_1 και h'_2 τα ύψη των δύο κεραιών πάνω από αυτό το επίπεδο και $d = d_1 + d_2$ η (περίπου οριζόντια) απόσταση μεταξύ τους πάνω στη σφαιρική επιφάνεια της γης.

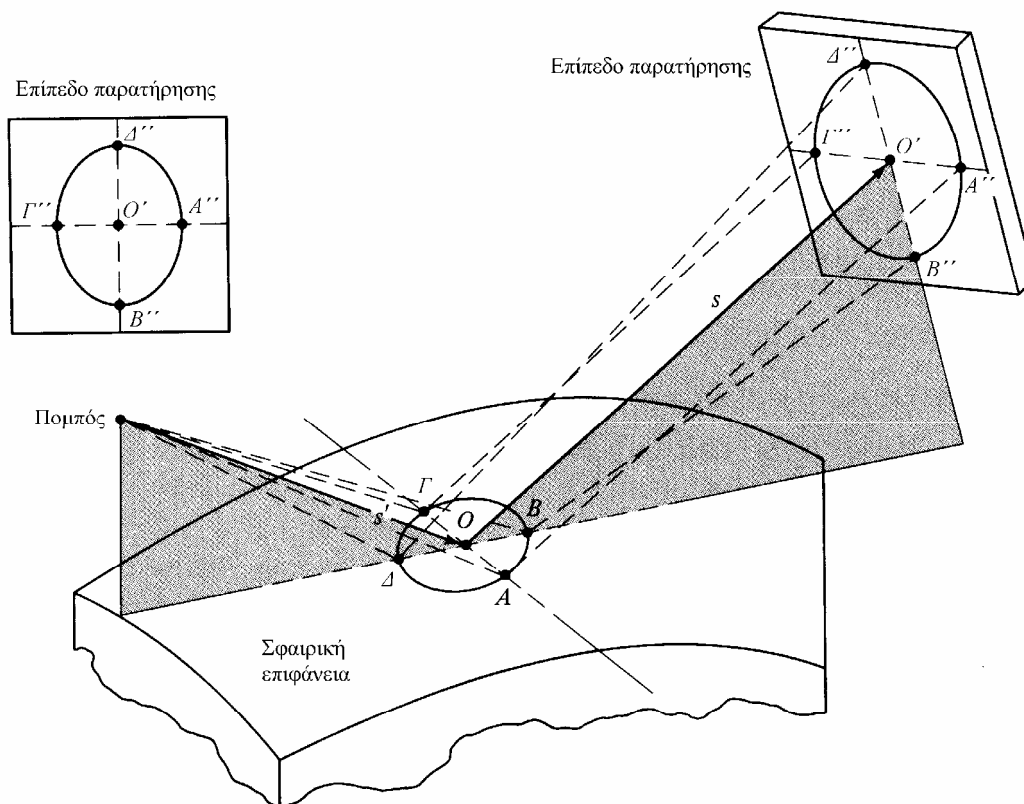
Με καλή προσέγγιση, η επίδραση που έχει η σφαιρική μορφή της επιφάνειας μπορεί να εκτιμηθεί με γεωμετρική μεθοδολογία. Συγκεκριμένα, έστω μια κυματική «δέσμη» από την κεραία, δηλ. το κύμα που εκπέμπεται μέσα σε έναν στοιχειώδη κυκλικό κώνο, εντός του οποίου (ως γνωστόν) η ισχύς είναι σταθερή. Όπως δείχνει το Σχ. 8.13(α), αν η δέσμη είχε ανακλασθεί από το εφαιπτόμενο επίπεδο, η διατομή του κώνου στον οποίο περιέχεται θα παρέμενε κυκλική και μετά την ανάκλαση (κύκλος Α'Β'Γ'Δ'). Όταν όμως η δέσμη ανακλάται από τη σφαιρική επιφάνεια της γης, η διατομή του κώνου διευρύνεται κατά το επίπεδο πρόσπτωσης και γίνεται έλλειπτική*, δηλ. ο κύκλος μετατρέπεται στην έλλειψη Α''Β'Γ''Δ'' του Σχ. 8.13(β), επειδή αυξάνεται η διάμετρος Β'Δ' και μετατρέπεται στον

* Κατά κανόνα η διαπλάτυνση κάθετα στο επίπεδο πρόσπτωσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, δηλ. ο μικρός άξονας Α'Γ'' της έλλειψης περίπου ίσος με τη διάμετρο Α'Γ' του κύκλου Α'Β'Γ'Δ' του Σχ. 8.13(α).

μεγάλο άξονα της έλλειψης. Επομένως το άνοιγμα της δέσμης αυξάνεται και αντίστοιχα η πυκνότητα ισχύος του κύματος μειώνεται κατά το αντίστροφο του λόγου των επιφανειών.



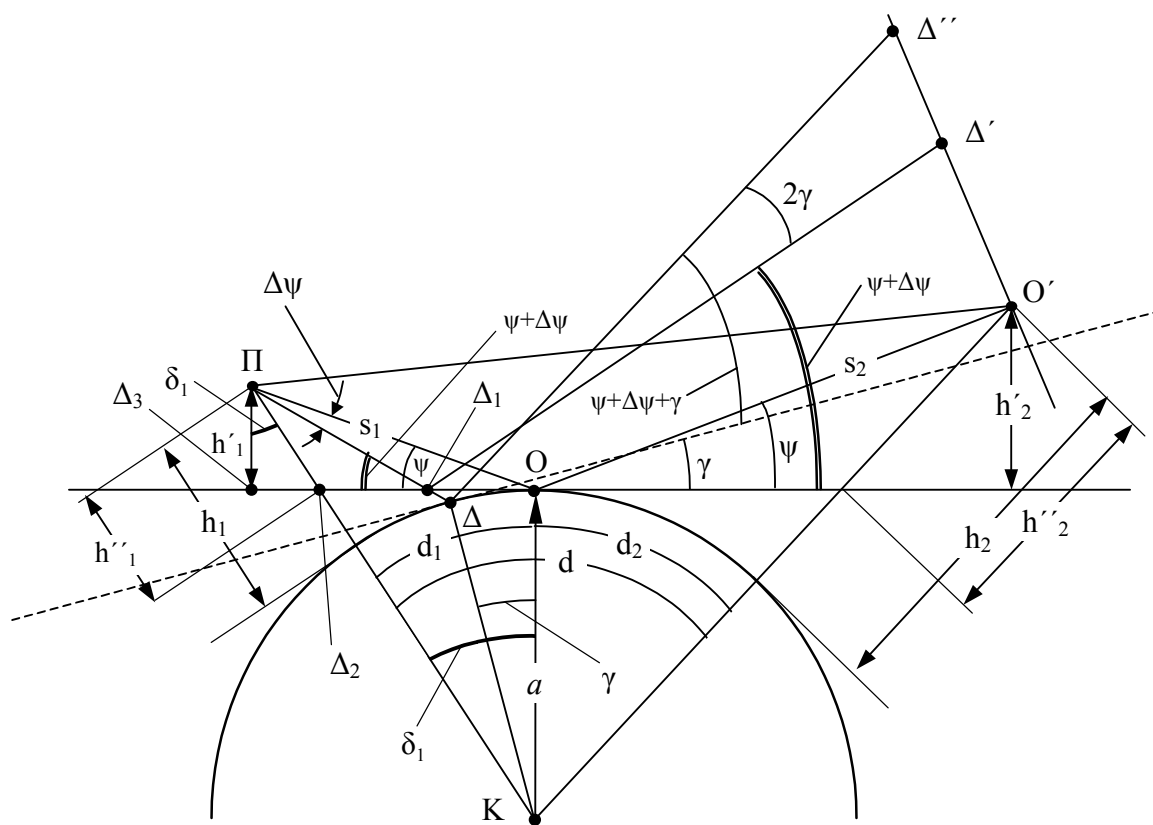
(α) Επίπεδη επιφάνεια



(β) Σφαιρική επιφάνεια

Σχ. 8.13: Απόκλιση κυματικής δέσμης που ανακλάται από σφαιρική επιφάνεια

Στο Σχ. 8.14 δείχνεται λεπτομερέστερα η γεωμετρία για ανάκλαση από σφαιρική επιφάνεια, όπως φαίνεται στο επίπεδο πρόσπτωσης, και σε σύγκριση με την ανάκλαση από επίπεδη επιφάνεια, η οποία εδώ αντιστοιχεί στο οριζόντιο εφαπτόμενο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Ο. Λόγω της σφαιρικότητας της γης, η «ακτίνα» από το σημείο Π (τον πομπό) η οποία θα ανακλώνταν στο σημείο Δ₁ (υπό γωνία ψ + Δψ) αν η γη ήταν επίπεδη, τώρα ανακλάται στο σημείο Δ και σχηματίζει ίσες γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης με το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο Δ, το οποίο σημειώνεται με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα. Το επίπεδο αυτό σχηματίζει μια πρόσθετη (μικρή) γωνία κλίσης γ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, άρα η «ακτίνα» ΠΔ προσπίπτει και στη συνέχεια ανακλάται (ως ΔΔ' πλέον) υπό γωνία ανάκλασης ψ + Δψ + γ ως προς το επίπεδο αυτό και επομένως έχει κλίση ψ + Δψ + 2γ ως προς το οριζόντιο επίπεδο (η πρόσθετη γωνία δ προέρχεται από την κλίση του ενός επιπέδου ως προς το άλλο).



Σχ. 8.14: Γεωμετρία ζεύξης πάνω από σφαιρική γη. Για λόγους ευκρίνειας η ακτίνα a της γης φαίνεται πολύ μικρότερη, ενώ τα ύψη h_1 και h_2 και η γωνία γ πολύ μεγαλύτερα, από ό,τι είναι στην πραγματικότητα.

Όπως προαναφέρθηκε, η πυκνότητα ισχύος του κύματος (αφού πρόκειται για την ίδια στερεά γωνία, άρα την ίδια ισχύ) μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα των εμβαδών της έλλειψης $A'B'T'\Delta'$ και του κύκλου $A'B'T'\Delta'$. Επειδή ο μικρός ημιάξονας $O'T''$ είναι περίπου ίσος με την ακτίνα $O'T' = O'\Delta'$, ο λόγος των εμβαδών ισούται περίπου με

$$\frac{S_{\varepsilon\pi}}{S_{\sigma\phi}} = \frac{\pi(O'\Delta')^2}{\pi(O'\Gamma'')(O'\Delta'')} \cong \frac{(O'\Delta')}{(O'\Delta'')}$$

και είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των τιμών του διανύσματος Poynting του ανακλώμενου κύματος (δηλ. των πυκνοτήτων ισχύος αυτού) για σφαιρική και επίπεδη επιφάνεια. Όπως όμως είναι γνωστό, το διάνυσμα Poynting είναι ανάλογο με το τετράγωνο του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου. Θεωρώντας λοιπόν το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου για σφαιρική και επίπεδη επιφάνεια $E_{\alpha\nu,\sigma\phi}$ και $E_{\alpha\nu,\varepsilon\pi}$ αντίστοιχα, έχουμε

$$D = \frac{E_{\alpha\nu,\sigma\phi}}{E_{\alpha\nu,\varepsilon\pi}} = \sqrt{\frac{S_{\varepsilon\pi}}{S_{\sigma\phi}}} \cong \left[\frac{(O'\Delta')}{(O'\Delta'')} \right]^{1/2} \quad (8.2.43)$$

Ο λόγος αυτός, ο οποίος εδώ συμβολίζεται με D, εκφράζει τον συντελεστή μείωσης του ανακλώμενου πεδίου* λόγω του σφαιρικού σχήματος της γης (σε σύγκριση με την τιμή που θα είχε για επίπεδη επιφάνεια). Δηλ. είναι ο συντελεστής με τον οποίο θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί ο (γνωστός) συντελεστής ανάκλασης της επίπεδης επιφάνειας ώστε να προκύψει (με καλή προσέγγιση) ο συντελεστής ανάκλασης από σφαιρική επιφάνεια.

Πρέπει λοιπόν να προσδιορισθεί το μήκος του τμήματος $O'\Delta'' = O'\Delta' + \Delta'\Delta''$. Το τμήμα $O'\Delta'$ αντιστοιχεί στην ανάκλαση από το (εφαπτόμενο) οριζόντιο επίπεδο και για το λόγο αυτό παρατηρούμε ότι αν προεκταθούν οι ανακλώμενες «ακτίνες» OO' και $\Delta_1\Delta'$ θα συναντηθούν στο είδωλο του σημείου Π κάτω από το οριζόντιο επίπεδο και άρα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\Delta\psi$ (όση και οι «ακτίνες» ΠΟ και ΠΔ₁ που ξεκίνησαν από το σημείο Π). Επειδή όμως θεωρήσαμε στοιχειώδη κυκλικό κώνο, η γωνία $\Delta\psi$ (που αντιστοιχεί στο άνοιγμα του κώνου) είναι πολύ μικρή και άρα το τμήμα $O'\Delta'$ (χορδή) ισούται περίπου με το αντίστοιχο τόξο γωνίας $\Delta\psi$ με ακτίνα $(ΠΟ) + (ΟΟ') = s_1 + s_2$, δηλ.

$$(O'\Delta') \cong (s_1 + s_2)\Delta\psi$$

Για τον ίδιο λόγο (πολύ μικρή $\Delta\psi$) η $\Delta\Delta''$ είναι περίπου ίση με την $ΟΟ'$ και, επειδή από κατασκευή η $O'\Delta''$ είναι κάθετη στην $ΟΟ'$, η $\Delta'\Delta''$ προσεγγίζει την χορδή ενός τόξου ακτίνας $ΟΟ'$ και γωνίας 2γ και είναι περίπου ίση με το μήκος του τόξου αυτού, δηλ.

$$(\Delta'\Delta'') \cong 2\gamma s_2$$

Παρατηρούμε επίσης ότι, αν προβάλουμε την $\Delta_1Ο$ κάθετα στην ΠΟ, το τμήμα που θα προκύψει θα έχει μήκος $(\Delta_1Ο)\sin\psi$ και θα είναι περίπου ίσο με τη χορδή ενός πολύ μικρού τόξου ακτίνας $ΠΟ = s_1$ και γωνίας $\Delta\psi$, άρα και με το μήκος του τόξου αυτού. Επειδή το ύψος h_1 είναι προφανώς πολύ μικρότερο από την ακτίνα της γης, τα σημεία Δ_1 και Δ είναι

* Συχνά λέγεται και συντελεστής απόκλισης, επειδή αντιπροσωπεύει την απόκλιση (διεύρυνση) της ανακλώμενης δέσμης από σφαιρική επιφάνεια έναντι της επίπεδης.

πολύ κοντά και η γωνία γ πολύ μικρή, και κατά συνέπεια $(\Delta_1 O) \cong (\Delta O) \cong \alpha \gamma$. Επομένως

$$(\Delta_1 O) \sin \psi \cong (\Pi O) \Delta \psi \cong \alpha \gamma \sin \psi \quad \Rightarrow \quad \gamma \cong \frac{(\Pi O) \Delta \psi}{\alpha \sin \psi} = \frac{s_1 \Delta \psi}{\alpha \sin \psi}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω προσεγγίσεις παίρνουμε:

$$\frac{(O'\Delta')}{(O'\Delta'')} = \frac{(O'\Delta')}{(O'\Delta') + (\Delta'\Delta'')} = \left[1 + \frac{(\Delta'\Delta'')}{(O'\Delta')} \right]^{-1} \cong \left[1 + \frac{2\gamma s_2}{(s_1 + s_2)\Delta \psi} \right]^{-1} \cong \left[1 + \frac{2s_1 s_2}{(s_1 + s_2)\alpha \sin \psi} \right]^{-1}$$

Τέλος παρατηρούμε (επειδή $h_1, h_2 \ll \alpha$) ότι αν προβάλουμε στο οριζόντιο επίπεδο τις αποστάσεις ΠO και OO' (που είναι s_1 και s_2), οι προβολές αυτών είναι περίπου ίσες με τις επίγειες αποστάσεις d_1 και d_2 . Με άλλα λόγια, τα ίχνη των δύο κεραιών πάνω στη γη απέχουν περίπου όσο και στο οριζόντιο επίπεδο (δηλ. όσο θα απείχαν σε επίπεδη γη):

$$d = d_1 + d_2 \cong (s_1 + s_2) \cos \psi \quad \Rightarrow \quad (s_1 + s_2) \cong \frac{d}{\cos \psi} \quad (8.2.44)$$

οπότε με αντικατάσταση ο λόγος $(O'\Delta')/(O'\Delta'')$ γράφεται:

$$\frac{(O'\Delta')}{(O'\Delta'')} \cong \left[1 + \frac{2s_1 s_2}{\alpha d \tan \psi} \right]^{-1}$$

Όπως όμως δείχνει το Σχ. 8.14, οι αποστάσεις ΠO και OO' συνδέονται με τα ύψη h'_1 και h'_2 των κεραιών πάνω από το οριζόντιο επίπεδο ως εξής:

$$\sin \psi = \frac{h'_1}{s_1} = \frac{h'_2}{s_2} = \frac{h'_1 + h'_2}{s_1 + s_2} \quad (8.2.45)$$

Με τις αντικαταστάσεις αυτές, προκύπτει ο συντελεστής μείωσης D της (8.2.43):

$$D \cong \left[1 + \frac{2h'_1 h'_2}{\alpha d \sin^2 \psi \tan \psi} \right]^{-1/2} \quad (8.2.46)$$

Επειδή στον παρονομαστή εμφανίζεται η ακτίνα της γης α , η οποία προφανώς είναι πολύ μεγαλύτερη από όλες τις άλλες αποστάσεις που υπεισέρχονται στην (8.2.46), είναι εμφανές ότι ο δεύτερος όρος θα είναι κατά κανόνα αμελητέος και θα ισχύει $D \cong 1$, εκτός από την περίπτωση πολύ μικρής γωνίας ψ (δηλ. πολύ πλάγιας πρόσπτωσης). Στην περίπτωση αυτή ισχύει, ως γνωστόν, $\sin \psi \cong \tan \psi$ και η (8.2.46) έρχεται στη μορφή

$$D \cong \left[1 + \frac{2h'_1 h'_2}{\alpha d \tan^3 \psi} \right]^{-1/2} \quad (8.2.47)$$

Η γωνία ψ μπορεί να προσδιορισθεί με καλή προσέγγιση συνδυάζοντας τις (8.2.44-45):

$$s_1 + s_2 = \frac{h'_1 + h'_2}{\sin \psi} \cong \frac{d}{\cos \psi} \quad \Rightarrow \quad \tan \psi \cong \frac{h'_1 + h'_2}{d} \quad (8.2.48)$$

Παρατηρούμε ότι η (8.2.48) έχει στον αριθμητή τα ύψη των δύο κεραιών πάνω από το οριζόντιο επίπεδο και στον παρονομαστή την οριζόντια απόσταση αυτών, δηλ. είναι αυτή που θα ίσχυε και στην περίπτωση επίπεδης γης.

Η ανύψωση των δύο κεραιών πάνω από το εφαπτόμενο οριζόντιο επίπεδο χαρακτηρίζεται είτε από τα ύψη h'_1 και h'_2 είτε από τις αποστάσεις h''_1 και h''_2 κατά την ακτινική διεύθυνση. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta_3\Pi\Delta_2$ (και αντίστοιχα για τη δεύτερη κεραία) προκύπτει η σχέση μεταξύ τους:

$$h'_1 = h''_1 \cos \delta_1 \quad , \quad h'_2 = h''_2 \cos \delta_2 \quad (8.2.49)$$

Οι γωνίες δ_1 και δ_2 είναι πολύ μικρές* λόγω του μεγέθους της ακτίνας της γης και επομένως τα συνημίτονα αυτών είναι πολύ κοντά στη μονάδα. Για καθεμία από αυτές λοιπόν ισχύει η γνωστή προσέγγιση του συνημιτόνου μικρών γωνιών:

$$\cos \delta \cong 1 - \frac{\delta^2}{2} \quad (8.2.50)$$

ενώ επίσης, με τη βοήθεια του διωνυμικού αναπτύγματος, προκύπτει περαιτέρω

$$\frac{1}{\cos \delta} \cong \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{\delta^2}{2} \quad (8.2.51)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο Δ_2OK παρατηρούμε ότι

$$\cos \delta_1 = \frac{(OK)}{(\Delta_2K)} = \frac{\alpha}{\alpha + h_1 - h''_1} \Rightarrow h''_1 = \alpha + h_1 - \frac{\alpha}{\cos \delta_1} \cong \alpha + h_1 - \alpha \left(1 + \frac{\delta_1^2}{2}\right)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση (8.2.51). Επειδή $\delta_1 = (d_1/\alpha)$ παίρνουμε

$$h''_1 \cong h_1 - \frac{d_1^2}{2\alpha} \quad (8.2.52\alpha)$$

$$h''_2 \cong h_2 - \frac{d_2^2}{2\alpha} \quad (8.2.52\beta)$$

όπου η δεύτερη των παραπάνω προκύπτει με την ίδια ακριβώς διαδικασία για τη γωνία δ_2 . Στη συνέχεια μπορούν να υπολογισθούν τα h'_1 και h'_2 από τις (8.2.49), είτε και απλώς να ληφθούν περίπου ίσα προς τα h''_1 και h''_2 .

Για την εφαρμογή της θεωρίας αυτής σε μια πρακτική ζεύξη, τα αρχικά δεδομένα που διαθέτουμε είναι κατά κανόνα η επίγεια απόσταση d και τα ύψη h_1 και h_2 των δύο κεραιών. Τονίζουμε ότι, σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει για επίπεδη γη, οι ενδιάμεσες επίγειες αποστάσεις d_1 και d_2 και η γωνία ψ δεν είναι προφανείς από τη γεωμετρία της

* Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί λαμβάνοντας μια ρεαλιστική (όχι μικρή) τιμή για την επίγεια απόσταση, π.χ. $d_1 = 200$ km, οπότε με $\delta_1 = (d_1/\alpha) = 200/6370$ προκύπτει ότι οι (8.2.50-51) δίνουν πολύ καλές προσεγγίσεις.

ζεύξης και δεν μπορούν να θεωρηθούν ως διαθέσιμα αρχικά δεδομένα αλλά πρέπει να υπολογισθούν*. Για την d_1 μπορεί να αποδειχθεί η ακόλουθη εξίσωση 3^{ου} βαθμού

$$2d_1^3 - 3dd_1^2 + [d^2 - 2\alpha(h_1 + h_2)]d_1 + 2\alpha h_1 d = 0 \quad (8.2.53)$$

η οποία ισχύει εφόσον οι γωνίες δ_1 και δ_2 είναι αρκετά μικρές ώστε

$$\sin\delta_1 \cong \delta_1, \cos\delta_1 \cong 1 - (\delta_1)^2/2, \sin\delta_2 \cong \delta_2, \cos\delta_2 \cong 1 - (\delta_2)^2/2$$

Η λύση της (8.2.53) αποδεικνύεται ότι δίνεται από την

$$d_1 = \frac{d}{2} + p \cos\left(\frac{\Omega + \pi}{3}\right) \quad (8.2.54\alpha)$$

όπου

$$\Omega = \cos^{-1}\left[\frac{2\alpha(h_1 - h_2)d}{p^3}\right] \quad (8.2.54\beta)$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\alpha(h_1 + h_2) + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (8.2.54\gamma)$$

Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν προφανώς να βρεθούν και για την d_2 , η οποία όμως προκύπτει και αμέσως από την

$$d_2 = d - d_1 \quad (8.2.54\delta)$$

Στη συνέχεια μπορεί να υπολογισθούν οι h''_1, h''_2 και οι h'_1, h'_2 από τις (8.2.52) και (8.2.49), και η γωνία ψ από την (8.2.48).

Συμπερασματικά, η διαδικασία διόρθωσης του υπολογισμού του ανακλώμενου κύματος λόγω της καμπυλότητας της γης είναι η ακόλουθη:

- Υπολογίζουμε τις d_1 και d_2 από τις (8.2.54).
- Προσδιορίζουμε τις h''_1, h''_2, h'_1, h'_2 και την ψ από τις (8.2.52) και (8.2.48-49) και στη συνέχεια υπολογίζουμε τον συντελεστή D από την (8.2.46) ή (8.2.47).
- Θεωρούμε την γεωμετρία της ζεύξης ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο της γης στο σημείο O (το οποίο προκύπτει από την d_1 ή την d_2), όπως δείχνει το Σχ. 8.7, και υπολογίζουμε από αυτή τις αποστάσεις r_1 και $r_2 = s_1 + s_2$.
- Υπολογίζουμε το ανακλώμενο κύμα ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο με τον διορθωμένο συντελεστή ανάκλασης DR_V (αντίστοιχα DR_H για οριζόντιο δίπολο).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επίδραση της καμπυλότητας της γης αφορά στο κύμα χώρου, το οποίο εξακολουθεί να δίνεται από την (8.2.14), ή τις (8.2.11-12) ανά συνιστώσα, αλλά

* Παρατηρήστε ότι για επίπεδη γη είναι εύκολο να προσδιορίσουμε τις d_1 και d_2 και τη γωνία ψ ενώνοντας την κεραία 2 με το είδωλο της κεραίας 1 ως προς το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο Σχ. 8.7. Όμως για σφαιρική γη αυτή η γεωμετρική κατασκευή δεν είναι πλέον εφαρμόσιμη.

με τη γεωμετρία του εφαπτόμενου επιπέδου και τον διορθωμένο συντελεστή ανάκλασης.

8.3. ΤΡΟΠΟΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΙΑΔΟΣΗ

8.3.1. Γενικά

Τροπόσφαιρα λέγεται το κατώτερο στρώμα της ατμόσφαιρας, το οποίο εκτείνεται μέχρι ύψους 10 km περίπου κατά μέσον όρο. Για την ακρίβεια, όπως έχει προαναφερθεί, το σχήμα της είναι πεπλατυσμένο στον ισημερινό και συμπιεσμένο στους πόλους (με ύψος 6-8 km στους πόλους και 17-20 km στον ισημερινό, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία). Η τροπόσφαιρα είναι η περιοχή στην οποία λαμβάνουν χώρα όλα ουσιαστικά τα κλιματικά φαινόμενα (π.χ. σχηματίζονται τα νέφη). Στην τροπόσφαιρα η θερμοκρασία μειώνεται με το ύψος με ρυθμό περίπου 6,5 °C/km μέχρι την τιμή των - 50° C περίπου στο ανώτερο όριό της, ενώ η επόμενη περιοχή είναι η στρατόσφαιρα στην οποία η θερμοκρασία σταθεροποιείται (και μάλιστα αρχίζει να αυξάνει).

Η επίδραση της τροπόσφαιρας στη διάδοση των Η/Μ κυμάτων οφείλεται στη μεταβολή της διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ (όπου ϵ_r η σχετική διηλεκτρική σταθερά) και του δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{\epsilon_r}$ με το υψόμετρο. Αυτή με τη σειρά της οφείλεται στη μεταβολή της πυκνότητας του αέρα και της σχετικής υγρασίας του, δηλ. της περιεκτικότητάς του σε υδρατμούς (οι οποίοι έχουν μεγαλύτερη διηλεκτρική σταθερά από τον ξηρό αέρα). Λόγω της μεταβολής του δείκτη διάθλασης, το κύμα που οδεύει μέσα στην τροπόσφαιρα υφίσταται διάθλαση σύμφωνα με τον γνωστό νόμο του Snell (όπως τροποποιείται για μεταβαλλόμενο n), ή ακόμη και ανάκλαση. Ο όρος διάθλαση εδώ υποδηλώνει βαθμιαία καμπύλωση της τροχιάς που ακολουθεί το κύμα (λόγω βαθμιαίας μεταβολής του n), ενώ ανάκλαση σημαίνει απότομη αλλαγή της κατεύθυνσης του κύματος λόγω απότομης μεταβολής του n μεταξύ διαδοχικών στρωμάτων της τροπόσφαιρας. Ως σημείο αναφοράς λαμβάνεται η περίπτωση που η ατμόσφαιρα παρουσιάζει περίπου γραμμική, δηλ. με σταθερό ρυθμό, μείωση του δείκτη διάθλασης με το ύψος, οπότε έχουμε την λεγόμενη πρότυπη ατμόσφαιρα* (standard atmosphere), η οποία, όπως θα φανεί στα επόμενα, προκαλεί καμπύλωση της διαδρομής των ραδιοκυμάτων προς τα κάτω με αποτέλεσμα να

* Η πρότυπη ατμόσφαιρα είναι ένα απλουστευμένο θεωρητικό μοντέλο, όπου η θερμοκρασία μειώνεται με ρυθμό 6,5 °C/km και η πίεση των υδρατμών είναι 10 mb σε υψόμετρο 0 (στην επιφάνεια της θάλασσας) και μειώνεται με ρυθμό 3,3 mb/km. Οι συνθήκες αυτές οδηγούν σε μείωση του δείκτη διάθλασης συναρτήσει του ύψους με συγκεκριμένο σταθερό ρυθμό. Το απλουστευμένο αυτό μοντέλο προσεγγίζει τις μέσες τιμές του δείκτη διάθλασης πάνω από την ξηρά (δηλ. χωρίς να ληφθούν υπόψη εξατμίσεις από τη θάλασσα), δεν καλύπτει όμως τις διακυμάνσεις που παρουσιάζονται πολύ συχνά στην πράξη.

είναι δυνατή η ζεύξη σε αποστάσεις πέραν του οπτικού ορίζοντα. Γενικά η διάθλαση των ραδιοκυμάτων σε συνθήκες πρότυπης ατμόσφαιρας αποκαλείται **ομαλή διάθλαση** (normal refraction), ενώ σε άλλες συνθήκες **ανώμαλη**. Πιο συγκεκριμένα, σε διάφορες περιπτώσεις είναι δυνατόν ο δείκτης διάθλασης είτε να μειώνεται με ρυθμό αργότερο από τον ρυθμό μείωσης της πρότυπης ατμόσφαιρας, οπότε έχουμε τις λεγόμενες **υποπρότυπες (substandard) συνθήκες**, είτε να μειώνεται με ταχύτερο ρυθμό, οπότε έχουμε τις **υπερπρότυπες (superstandard) συνθήκες***. Στην πρώτη περίπτωση η καμπύλωση της διαδρομής των ραδιοκυμάτων είναι μικρότερη από ό,τι για πρότυπες συνθήκες και στην δεύτερη είναι μεγαλύτερη (με αποτέλεσμα να καθίστανται εφικτές ζεύξεις σε μεγαλύτερη απόσταση). Ειδικότερα σε υπερπρότυπες συνθήκες μπορεί να έχουμε και αναστροφή της φοράς μεταβολής του δείκτη διάθλασης** από μείωση σε αύξηση και πάλι σε μείωση, δημιουργώντας ενδιάμεσα στρώματα τα οποία συμπεριφέρονται κατά κάποιο τρόπο ως **τροποσφαιρικοί κυματοδηγοί** (ducts) και μπορούν να προκαλέσουν παγίδευση του κύματος μεταφέροντάς το σε μεγάλες αποστάσεις (κατά ανάλογο τρόπο όπως στους μεταλλικούς κυματοδηγούς). Είναι δυνατόν επίσης να συμβεί σχετικά απότομη μεταβολή του δείκτη διάθλασης οπότε προκαλείται ανάκλαση των κυμάτων στην επιφάνεια της απότομης μεταβολής. Ένα ακόμη φαινόμενο που μπορεί να επιτρέψει την ασύρματη ζεύξη σε μεγάλες αποστάσεις (αναφέρονται ζεύξεις μέχρι περίπου 500 – 600 km) χωρίς οπτική επαφή είναι η λεγόμενη **τροποσφαιρική σκέδαση**, δηλ. η επανεκπομπή ενός μέρους του κύματος προς διαφορετική κατεύθυνση λόγω σκέδασης από κάποια περιοχή της τροπόσφαιρας όπου η διηλεκτρική σταθερά μεταβάλλεται με πολύ ακανόνιστο τρόπο.

Σημειώνουμε ότι τα προαναφερόμενα φαινόμενα έχουν σημασία για ζεύξεις σε συχνότητες από 30 MHz περίπου ως 10 GHz το πολύ, ενώ από εκεί και πάνω χρησιμοποιούνται μόνο ζεύξεις οπτικής επαφής. Στην περιοχή άνω των 10 GHz τα σημαντικότερα τροποσφαιρικά φαινόμενα, τα οποία μπορούν να οδηγήσουν σε **διαλείψεις** (δηλ. απώλεια της ζεύξης για κάποιο χρονικό διάστημα), είναι η εξασθένηση των κυμάτων λόγω καιρικών φαινομένων (κυρίως της βροχόπτωσης), η οποία εμφανίζεται περίπου από τα 10 GHz και πάνω, καθώς και η εξασθένηση των κυμάτων από αέρια της ατμόσφαιρας (κυρίως οξυγόνο και

* Οι διαφοροποιήσεις αυτές συνήθως συμβαίνουν όχι στο σύνολο της τροπόσφαιρας αλλά σε κάποια επιμέρους στρώματα αυτής, και έτσι συχνά γίνεται λόγος για **υποπρότυπο** ή **υπερπρότυπο στρώμα**. Οι όροι «**υπο-**» ή «**υπερ-**» «πρότυπο» (sub- / super- standard) προέρχονται μάλλον από το ότι στην πρώτη περίπτωση έχουμε γενικά **χειροτέρευση** και στη δεύτερη **βελτίωση** της απόδοσης των ζεύξεων.

** Για την ακρίβεια, αυτό που τυπικά χαρακτηρίζει τις υπο- και υπερ- πρότυπες συνθήκες και τα ducts είναι ο ρυθμός μεταβολής όχι ακριβώς του δείκτη διάθλασης αλλά ενός μεγέθους που συνδέεται στενά με αυτόν και ονομάζεται «τροποποιημένος δείκτης διάθλασης».

υδρατμούς) η οποία αρχίζει να γίνεται σημαντική περίπου από τα 20 GHz και πάνω.

8.3.2. Διηλεκτρικά χαρακτηριστικά της τροπόσφαιρας

Η διηλεκτρική σταθερά της τροπόσφαιρας, από την οποία εξαρτάται η διάδοση των Η/Μ κυμάτων σε αυτή, μειώνεται με το υψόμετρο. Ο δείκτης διάθλασης $n = \sqrt{\epsilon_r}$ έχει (για ξηρό αέρα) τιμή περίπου 1,00032 στην επιφάνεια της γης και μειώνεται μέχρι την τιμή 1 σε μεγάλα ύψη όπου η πυκνότητα του αέρα είναι μικρή. Στην περίπτωση υγρού αέρα οι τιμές του n είναι μεγαλύτερες. Επειδή οι μεταβολές του n είναι πολύ μικρές, συνήθως χρησιμοποιείται η λεγόμενη διαθλαστικότητα (refractivity)*

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 + N \cdot 10^{-6} \quad (8.3.1)$$

Για τον υπολογισμό της διαθλαστικότητας ισχύει η εμπειρική σχέση

$$N = 77,6 \frac{p}{T} - 5,6 \frac{e}{T} + 3,732 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (8.3.2)$$

όπου p είναι η ατμοσφαιρική πίεση και e η μερική πίεση (τάση) των υδρατμών (αποκαλούμενη και απόλυτη υγρασία) σε mb (millibars, όπου $1 \text{ mb} = 100 \text{ Pa} [\text{kg/m} \cdot \text{sec}^2] = 1 \text{ hPa} = 0,75 \text{ mmHg}$) και T η απόλυτη θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin ($^{\circ}\text{K} = 273 + ^{\circ}\text{C}$). Στην ρεαλιστική περίπτωση που οι p και e είναι της τάξης των 1000 και 10 mb αντίστοιχα (υπεμθυμίζουμε ότι $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 1013 \text{ mb}$), ο δεύτερος όρος ($- 5,6 e/T$) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος και η (8.3.2) γράφεται στη μορφή**

$$N = \frac{77,6}{T} \left(p + 4810 \frac{e}{T} \right) = 77,6 \frac{p}{T} + 3,732 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2} \quad (8.3.3)$$

Η σχέση αυτή ισχύει με πολύ καλή προσέγγιση για το σύνολο του φάσματος των ραδιοσυχνοτήτων (αναφέρεται ότι για συχνότητες ως 100 GHz το σφάλμα είναι λιγότερο από 0,5%). Επισημαίνουμε ότι ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά του ξηρού αέρα και ο δεύτερος τη συνεισφορά των υδρατμών στη διαθλαστικότητα (και για τον λόγο αυτό αποκαλούνται «ξηρός όρος» και «υγρός όρος», αντίστοιχα).

Η τάση των υδρατμών συνδέεται με την υγρασία και τη θερμοκρασία μέσω των σχέσεων

* Παρατηρήστε ότι η διαθλαστικότητα μετράει τη διαφορά του n από τη μονάδα σε ppm (parts per million).

** Τόσο οι (8.3.3-5) για τη διαθλαστικότητα, όσο και η εκθετική σχέση (8.3.7) για το n και οι παράμετροι αναφοράς (8.3.8) παρακάτω, ακολουθούν τη σχετική σύσταση της ITU (Recommendation ITU-R P.453-9) του 2003. Η έννοια της πρότυπης ατμόσφαιρας είναι προγενέστερη και πιο απλουστευμένη.

$$e = \frac{H e_s}{100} \quad , \quad e_s = a \exp\left(\frac{bt}{t+c}\right) \quad (8.3.4)$$

όπου H είναι η σχετική υγρασία (σε ποσοστό %), t η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) και e_s η τάση (πίεση) των κορεσμένων υδρατμών (σε mb) στη θερμοκρασία αυτή, ενώ οι τιμές των σταθερών είναι $a = 6,1121$, $b = 17,502$ και $c = 240,97$ και ισχύουν για θερμοκρασίες από -20°C ως $+50^{\circ}\text{C}$ με ακρίβεια $\pm 0,20\%$.

Ο «ξηρός» όρος της (8.3.3) (ο οποίος δεν εξαρτάται από τα καιρικά φαινόμενα) είναι ο επικρατέστερος και μειώνεται με τη θερμοκρασία, αλλά ο «υγρός» όρος, όπως δείχνουν οι (8.3.4), αυξάνεται με τη θερμοκρασία ταχύτερα. (Ενδεικτικά, σε θερμοκρασία $t = 0^{\circ}\text{C}$ ο «ξηρός» όρος έχει τιμή περίπου 288 και ο «υγρός» περίπου 6, ενώ στους 40°C οι αντίστοιχες τιμές είναι περίπου 251 και 56). Για τον λόγο αυτό οι μεταβολές του N , και αντίστοιχα του n , είναι μεγαλύτερες σε θερμές (τροπικές) περιοχές.

Σημειώνουμε επίσης ότι για την (κατ' όγκον) πυκνότητα ρ των υδρατμών (σε g/m^3) ισχύει

$$e = \frac{\rho T}{216,7} \quad (\text{σε mb}) \quad (8.3.5)$$

ενώ για την ειδική υγρασία s (σε g υδρατμού ανά kg αέρα) ισχύει

$$e = \frac{s p}{623 - 0,377s} \cong 0,00161 s p \quad (p \text{ και } e \text{ σε mb}) \quad (8.3.6)$$

Όπως δείχνουν οι παραπάνω σχέσεις, η διαθλαστικότητα N και ο δείκτης διάθλασης n εξαρτώνται από τις κλιματικές συνθήκες, και κατά συνέπεια μεταβάλλονται τόσο στο χώρο (ανά γεωγραφική περιοχή) όσο και στο χρόνο (ανά εποχή του έτους). Για σχετικά κοντινές αποστάσεις, όπως αυτές που κατά κανόνα καλύπτει μια ασύρματη ζεύξη, η οριζόντια μεταβολή των N και n μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, ενώ σημασία έχει η εξάρτηση από το ύψος. Με βάση χωρικές και χρονικές μέσες τιμές έχει προκύψει ότι η εξάρτηση αυτή κατά μέσον όρο σε μεγάλα χρονικά διαστήματα (long-term mean dependence) διέπεται από τον εκθετικό νόμο:

$$n(h) = 1 + 10^{-6} N_0 \exp\left(-\frac{h}{h_0}\right) \quad (8.3.7)$$

όπου h είναι το υψόμετρο σε km από την επιφάνεια της θάλασσας και οι σταθερές h_0 (επίσης σε km) και N_0 (που είναι η τιμή της διαθλαστικότητας για $h = 0$ δηλ. στην επιφάνεια της θάλασσας) μπορούν να προσδιορισθούν στατιστικά ανά κλιματική ζώνη. Κατά μέσον όρο για ολόκληρη τη γη μπορούν ενδεικτικά να ληφθούν οι τιμές αναφοράς

$$N_0 = 315 \quad h_0 = 7,35 \text{ km} \quad (8.3.8)$$

Η σχέση (8.3.7) δείχνει ότι ο δείκτης διάθλασης λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του σε μηδενικό υψόμετρο και μειώνεται εκθετικά καθώς αυξάνει το ύψος, πράγμα που οφείλεται κυρίως

στη μείωση της πυκνότητας της ατμόσφαιρας (και άρα της ατμοσφαιρικής πίεσης) με το ύψος. Στο χαμηλότερο τμήμα της ατμόσφαιρας (τυπικά περίπου στο πρώτο 1 km) η μεταβολή είναι σχεδόν γραμμική με ρυθμό ίσο με την παράγωγο της (8.3.7):

$$\frac{dn}{dh} = 10^{-6} \frac{dN}{dh} \cong -10^{-6} \frac{N_0}{h_0} \cong -43 \cdot 10^{-6} \quad (8.3.9)$$

δηλ.
$$n(h) \cong 1 + 10^{-6} N_0 - 10^{-6} \frac{N_0}{h_0} h$$

Με βάση την απλοποιημένη αυτή προσέγγιση γραμμικής μείωσης του $n(h)$ ορίζεται η λεγόμενη **πρότυπη ατμόσφαιρα** (standard atmosphere), η οποία αντιστοιχεί στις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων:

$$p = 1013 \text{ mb} \quad , \quad dp/dh = -0,121 \text{ mb/m} \quad (8.3.10\alpha)$$

$$T = 288 \text{ }^\circ\text{K} \text{ (ή } 15 \text{ }^\circ\text{C)} \quad , \quad dT/dh = -0,0065 \text{ }^\circ\text{K/m} \quad (8.3.10\beta)$$

$$e = 10 \text{ mb} \quad , \quad de/dh = -0,0033 \text{ mb/m} \quad (8.3.10\gamma)$$

Πρότυπη ατμόσφαιρα, λοιπόν, λέγεται μια απλουστευμένη υποθετική ατμόσφαιρα στην οποία ο δείκτης διάθλασης μειώνεται γραμμικά με το υψόμετρο και στην οποία οι τιμές των φυσικών παραμέτρων της είναι οι παραπάνω. Με αυτές, από την (8.3.3) προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές παραμέτρων που χαρακτηρίζουν την πρότυπη ατμόσφαιρα* :

$$N_0 \cong 320 \quad , \quad dN/dh \cong -0,04 \text{ m}^{-1} \cong 40 \text{ km}^{-1} \quad (8.3.11)$$

8.3.3. Ομαλή τροποσφαιρική διάθλαση – Ραδιοηλεκτρικός ορίζοντας

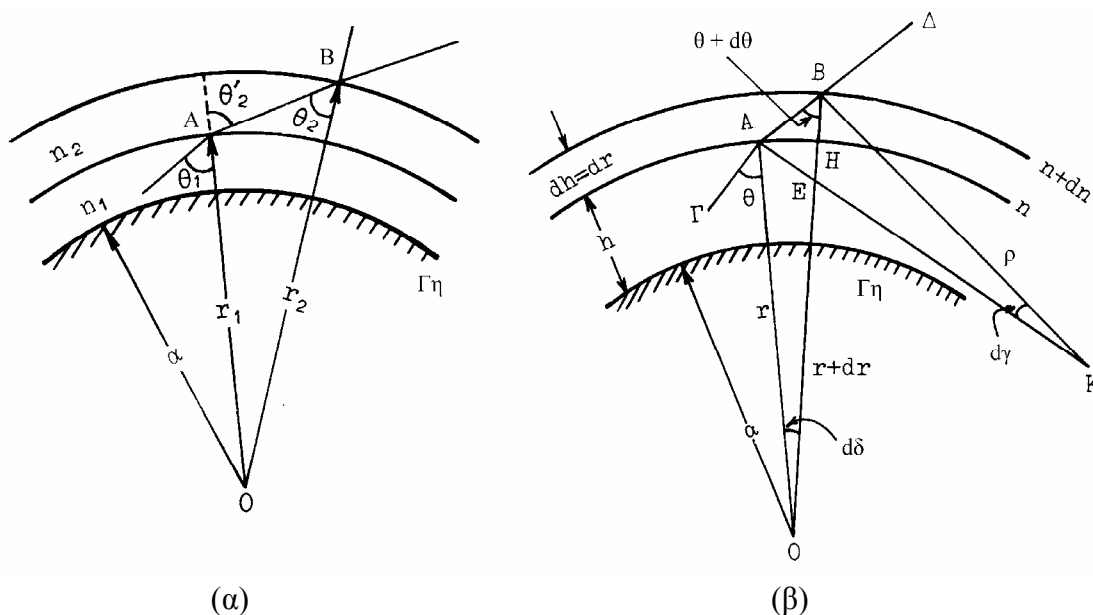
Σε ομογενές υλικό (δηλ. με σταθερή τιμή των μ και ϵ , άρα και του n , στο χώρο) τα ραδιοκύματα διαδίδονται, ως γνωστόν, ευθύγραμμα. Επειδή η ατμόσφαιρα είναι ανομοιογενής, δηλ. ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται με το ύψος όπως προαναφέρθηκε, οι τροχιές των ραδιοκυμάτων καμπυλώνονται. Η καμπύλωση αυτή οφείλεται στη διάθλαση των κυμάτων σύμφωνα με τον νόμο του Snell (8.2.1β), ο οποίος για δύο διακριτά στρώματα με σταθερό $\mu = \mu_0$ παίρνει τη μορφή

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (8.3.12)$$

όπου οι γωνίες θ_1 και θ_2 μετρώνται από την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο

* Συγκρίνοντας με τις (8.3.8-9) παρατηρούμε ότι οι τιμές (8.3.11) της πρότυπης ατμόσφαιρας προσεγγίζουν τις τιμές που δίνει η (8.3.7) βάσει των παραμέτρων αναφοράς (8.3.8) αλλά δεν ταυτίζονται με αυτές. Αυτό συμβαίνει για ιστορικούς λόγους, επειδή η έννοια της πρότυπης ατμόσφαιρας προηγήθηκε της εκθετικής σχέσης (8.3.7) και διατυπώθηκε με τις προσεγγιστικές τιμές (8.3.10) που ήταν γενικά αποδεκτές την εποχή εκείνη (γύρω στο 1950). Σημειώνουμε επίσης ότι οι τιμές αναφοράς (8.3.8) υιοθετήθηκαν σχετικά πρόσφατα, ενώ πιο πριν (μέχρι περίπου το 1990) η εξ. (8.3.7) συνδυαζόταν συνήθως με μια τιμή $N_0 \cong 290$, η οποία δίνει ρυθμό μεταβολής $dN/dh \cong -0,04 \text{ m}^{-1}$ που συμφωνεί με την λεγόμενη πρότυπη ατμόσφαιρα.

στρώματων, όπως φαίνεται στο Σχ. 8.15α. Το σχήμα αυτό έχει σχεδιασθεί για σφαιρικά στρώματα (προφανώς ο νόμος Snell είναι απλούστερος σε επίπεδα) όπου η διαχωριστική επιφάνεια είναι σφαιρική και επομένως η κάθετος λαμβάνεται ακτινική (κάθετη στο τοπικό εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο). Όταν η μεταβολή του δείκτη διάθλασης με το ύψος $n = n(h)$ είναι συνεχής, όπως συμβαίνει στην τροπόσφαιρα, τότε θεωρούμε στοιχειώδη διαδοχικά σφαιρικά στρώματα με ακτίνα $r_1 = r$, $r_2 = r + dr$, ... κ.ο.κ. και δείκτη διάθλασης $n_1 = n$, $n_2 = n + dn$, ... όπως φαίνεται στο Σχ. 8.15β.



Σχ. 8.15: Διάθλαση από σφαιρικά στρώματα με (α) διακριτή (β) συνεχή μεταβολή του δείκτη διάθλασης

Με βάση το Σχ. 8.15, από το τρίγωνο OAB έχουμε (νόμος των ημιτόνων)

$$\frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta'_2} \Leftrightarrow \sin \theta'_2 = \frac{r_2}{r_1} \sin \theta_2$$

και συνδυάζοντας με τον νόμο Snell (8.3.12) παίρνουμε

$$n_1 r_1 \sin \theta_1 = n_2 r_2 \sin \theta_2 \tag{8.3.13}$$

Η σχέση αυτή ισχύει είτε για διακριτή είτε για συνεχή μεταβολή του δείκτη διάθλασης και (επειδή μπορεί να επαναληφθεί για οσαδήποτε στρώματα) γράφεται στη γενικότερη μορφή

$$n r \sin \theta = \text{σταθ.} \tag{8.3.14}$$

η οποία λέγεται και νόμος Bouguet και διέπει την διάθλαση μέσω σφαιρικών στρώματων (είτε διακριτής είτε συνεχούς μορφής).

Στην περίπτωση συνεχούς μεταβολής του n , η οποία κυρίως μας ενδιαφέρει, η διαδρομή AB που διανύει το κύμα στο στοιχειώδες τροποσφαιρικό στρώμα πάχους dr γίνεται επίσης στοιχειώδης και η τροχιά του κύματος (από τεθλασμένη για διακριτά στρώματα) μετατρέπεται σε καμπύλη. Στο σχ. 8.15β φαίνονται δύο διαδοχικά στοιχειώδη τμήματα της τροχιάς ΓΑ και ΑΒ και θεωρούμε τις καθέτους ΑΚ και ΒΚ προς αυτά, οι οποίες τέμνονται

σε ένα σημείο Κ που είναι το κέντρο καμπυλότητας του μικρού τόξου ΓΑΒ με ακτίνα καμπυλότητας $\rho = KA \cong KB$. (Οι ΑΚ και ΒΚ είναι λοιπόν οι τοπικές κάθετοι και το σημείο Κ το τοπικό κέντρο καμπυλότητας της τροχιάς.) Από τα τρίγωνα ΟΕΑ και ΚΕΒ προκύπτει

$$\frac{\pi}{2} - \theta + d\delta = \frac{\pi}{2} - (\theta + d\theta) + d\gamma \Rightarrow d\gamma = d\delta + d\theta$$

Επίσης από το τρίγωνο ΑΗΒ (το οποίο είναι περίπου ορθογώνιο επειδή η γωνία $d\delta$ είναι πολύ μικρή) παρατηρούμε ότι $(AH) \cong (AB) \sin\theta$ δηλ. $r d\delta = \rho d\gamma \sin\theta$ (η ΑΗ είναι χορδή τόξου ακτίνας r γωνίας $d\delta$ και η ΑΒ χορδή τόξου ακτίνας ρ γωνίας $d\gamma$). Συνδυάζοντας:

$$r d\gamma - r d\theta = \rho d\gamma \sin\theta \Rightarrow d\theta = \left(1 - \frac{\rho}{r} \sin\theta\right) d\gamma \quad (8.3.15)$$

Εφαρμόζοντας την (8.3.14) στα διαδοχικά στοιχειώδη στρώματα με n , $n + dn$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} n r \sin\theta &= (n + dn)(r + dr)\sin(\theta + d\theta) \cong (n r + n dr + r dn)(\sin\theta \cos d\theta + \cos\theta \sin d\theta) \cong \\ &\cong n r \sin\theta + (n dr + r dn)\sin\theta + n r \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

όπου αγνοήθηκαν όροι δεύτερης διαφορικής τάξης (δηλ. της μορφής $dr dn$) και λήφθηκε $\cos(d\theta) \cong 1$ και $\sin(d\theta) \cong d\theta$. Εξισώνοντας το πρώτο και το τελευταίο μέλος προκύπτει:

$$d\theta = -\left(\frac{dr}{r} + \frac{dn}{n}\right) \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (8.3.16)$$

Από το τρίγωνο ΑΗΒ παρατηρούμε επίσης ότι $(BH) \cong (AB) \cos\theta$ δηλ. $dr = dh = \rho d\gamma \cos\theta$. Εισάγοντας αυτή και την (8.3.16) στην (8.3.15) παίρνουμε

$$\left(1 - \frac{\rho}{r} \sin\theta\right) \frac{1}{\rho \cos\theta} d\theta = -\left(\frac{dh}{r} + \frac{dn}{n}\right) \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

η οποία επιλύοντας ως προς ρ γίνεται

$$\rho = -\frac{n}{\frac{dn}{dh} \sin\theta} \quad (8.3.17)$$

ενώ ειδικότερα για μικρή γωνία ψ (σχεδόν οριζόντια διάδοση) ισχύει $\theta \cong 90^\circ$ και $\sin\theta \cong 1$, οπότε, δεδομένου και ότι $n \cong 1$, η (8.3.17) απλοποιείται στη μορφή

$$\rho \cong -\frac{1}{dn/dh} \quad (8.3.18)$$

Η (8.3.17) ή (8.3.18) δίνει την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς των ραδιοκυμάτων λόγω της μεταβολής του δείκτη διάθλασης με το ύψος $n = n(h)$. Για $dn/dh < 0$, δηλ. μείωση του δείκτη διάθλασης με το ύψος (που είναι η συνήθης περίπτωση στην πράξη), προκύπτει ακτίνα καμπυλότητας θετική. Από γεωμετρική άποψη αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές των ραδιοκυμάτων καμπυλώνονται προς τα κάτω (η διαδρομή διάδοσης είναι κυρτή). Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να υπάρξει ζεύξη ακόμη και χωρίς οπτική επαφή μεταξύ των

κεραιών εκπομπής και λήψης (δηλ. όταν παρεμβάλλεται η γη), μέσω κυμάτων που αν ακολουθούσαν ευθύγραμμη τροχιά από τον πομπό θα έφευγαν προς τον ουρανό αλλά με κύρτωση προς τα κάτω φτάνουν στον δέκτη που είναι πέρα από τον ορίζοντα. Σε περίπτωση που $dn/dh > 0$, δηλ. αν ο δείκτης διάθλασης αυξάνεται με το ύψος (πράγμα που μπορεί να συμβεί ενίοτε υπό ειδικές συνθήκες και για περιορισμένη περιοχή), η ακτίνα καμπυλότητας γίνεται αρνητική, που σημαίνει καμπύλωση των ραδιοκυμάτων προς τα πάνω (διαδρομή διάδοσης κοίλη), οπότε η εμβέλεια της ζεύξης τείνει να χειροτερεύει (γίνεται μικρότερη από την απόσταση οπτικής επαφής).

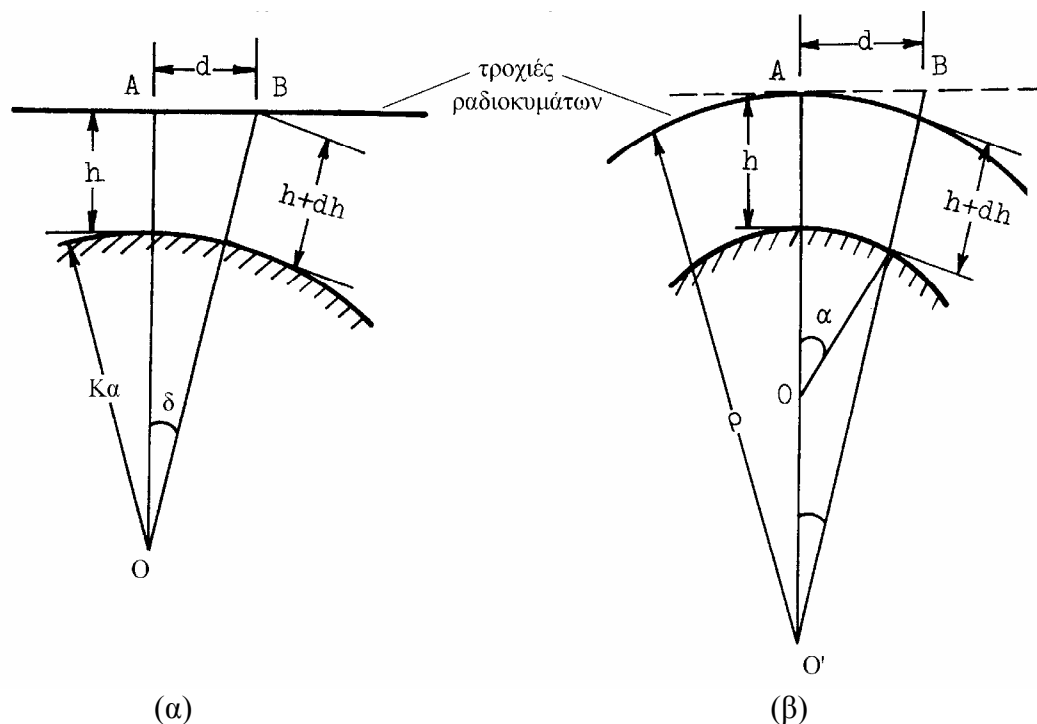
Ειδικότερα στην περίπτωση που ο ρυθμός μείωσης dn/dh είναι σταθερός (πράγμα που ισχύει για την πρότυπη ατμόσφαιρα, όπως προαναφέρθηκε), η ακτίνα καμπυλότητας προκύπτει σταθερή. Πιο συγκεκριμένα, εισάγοντας στην (8.3.18) την τιμή της (8.3.11) για πρότυπη ατμόσφαιρα, παίρνουμε την ακτίνα καμπυλότητας

$$\rho \cong 25 \cdot 10^6 \text{ m} \cong 4\alpha \quad (8.3.19)$$

όπου $\alpha = 6370 \text{ km}$ είναι (όπως έχει αναφερθεί και στα προηγούμενα) η ακτίνα της γης. Η προσέγγιση $\rho \cong 4\alpha$ της (8.3.19) περιέχει αρκετά μεγάλη στρογγύλευση και είναι μάλλον μια ενδεικτική σχέση γενικού χαρακτήρα παρά μια πολύ ακριβής προσέγγιση, η οποία άλλωστε δεν θα μπορούσε να έχει καθολική ισχύ λόγω των μεγάλων διαφοροποιήσεων (ως προς τον χώρο και τον χρόνο) που παρατηρούνται στη συμπεριφορά του n με το ύψος. Επειδή το ζητούμενο στην (8.3.19) δεν είναι η μεγάλη ακρίβεια, ακόμη και αν αντικατασταθεί η τιμή της (8.3.11) με την τιμή που δίνει η (8.3.7) για τον ρυθμό dn/dh , η στρογγύλευση $\rho \cong 4\alpha$ διατηρείται, πράγμα που σημαίνει ότι η σχετικά μικρή διαφορά (που έχει ήδη επισημανθεί) ανάμεσα στην πρότυπη ατμόσφαιρα και στο ακριβέστερο μοντέλο της (8.3.7) δεν έχει ιδιαίτερη σημασία στην προσέγγιση αυτή.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, σε πρότυπη ατμόσφαιρα η τροχιά των ραδιοκυμάτων καμπυλώνεται προς τα κάτω (κυρτώνεται), με αποτέλεσμα το ύψος h πάνω από τη γη σε τυχόν σημείο της τροχιάς να είναι μικρότερο από ό,τι θα ήταν για ευθύγραμμη τροχιά (αυτό άλλωστε σημαίνει καμπύλωση προς τα κάτω). Για να αποσαφηνίσουμε την εικόνα, ας συγκρίνουμε την (πραγματική) καμπυλόγραμμη τροχιά των ραδιοκυμάτων με μια (υποθετική) ευθύγραμμη τροχιά η οποία ξεκινάει από κάποιο ύψος h πάνω από τη γη και διαδίδεται σε διεύθυνση παράλληλη προς την εφαπτομένη της γης (όπως στο Σχ. 8.16). Αν η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ήταν $\rho = \alpha + h$, δηλ. περίπου ίση με την ακτίνα της γης (αφού προφανώς $h \ll \alpha$), τότε η τροχιά θα αντιστοιχούσε σε έναν κύκλο ομόκεντρο με τη γη και επομένως το ύψος h θα παρέμενε σταθερό κατά τη διάδοση, δηλ. τα ραδιοκύματα θα διαδίδονταν παράλληλα με την επιφάνεια της γης. Αν πάλι η ακτίνα καμπυλότητας ήταν ακόμα μικρότερη, $\rho < \alpha + h$, τότε η τροχιά θα αντιστοιχούσε σε κύκλο μικρότερης

ακτίνας από τη γη και επομένως το ύψος h θα μειωνόταν κατά τη διάδοση, δηλ. τα ραδιοκύματα θα έτειναν να συναντήσουν την επιφάνεια της γης. Για πρότυπη ατμόσφαιρα η τροχιά έχει ακτίνα καμπυλότητας μεγαλύτερη από την ακτίνα της γης (περίπου 4π λάσια). Αυτό σημαίνει ότι καμπλώνεται λιγότερο (έχει μικρότερη καμπυλότητα*) από ό,τι η επιφάνεια της γης και επομένως τα κύματα, καθώς διαδίδονται, απομακρύνονται από την επιφάνεια της γης αλλά λιγότερο από ό,τι θα απομακρύνονταν σε ευθύγραμμη διάδοση (βλ. και το Σχ. 8.17).



Σχ. 8.16: Διάδοση ραδιοκυμάτων πάνω από τη γη: (α) ευθύγραμμη (β) καμπυλόγραμμη

Ξεκινώντας από την παραπάνω συλλογιστική, μπορεί να διατυπωθεί μια γεωμετρική ισοδυναμία η οποία χρησιμεύει για υπολογισμούς. Έστω η (πραγματική) καμπυλόγραμμη τροχιά των ραδιοκυμάτων του Σχ. 8.16β και μια (υποθετική) ευθύγραμμη τροχιά που φαίνεται στο Σχ. 8.16α, με διεύθυνση τοπικά οριζόντια σε κάποιο σημείο A, όπου το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης είναι h , ενώ σε μια μικρή οριζόντια απόσταση d το ύψος θα έχει αυξηθεί από h σε $h + dh$. Θεωρούμε τις τροχιές αυτές ως ισοδύναμες εφόσον παρουσιάζουν την ίδια μεταβολή του ύψους, δηλ. εφόσον (έχοντας ξεκινήσει από ύψος h) μετά από απόσταση d θα βρίσκονται και οι δύο στο ίδιο ύψος πάνω από τη γη. Προφανώς αυτό δεν μπορεί να συμβεί για δύο διαφορετικές τροχιές πάνω από την ίδια σφαιρική επιφάνεια (της γης), αλλά μπορεί να συμβεί για δύο διαφορετικές τροχιές πάνω από διαφορετικές σφαιρικές επιφάνειες. Με άλλα λόγια, αν τροποποιήσουμε την επιφάνεια της

* Γεωμετρικά η καμπυλότητα είναι το αντίστροφο της ακτίνας καμπυλότητας, δηλ. εδώ το $1/\rho$ για την τροχιά των ραδιοκυμάτων και το $1/a$ για την επιφάνεια της γης.

γης μπορούμε να βρούμε μια ευθύγραμμη τροχιά ραδιοκυμάτων η οποία σε κάθε σημείο της να έχει το ίδιο ύψος πάνω από την (τροποποιημένη) γη με αυτό που είχε η προηγούμενη καμπυλόγραμμη τροχιά πάνω από την (πραγματική) γη, και τότε θεωρούμε την τροχιά αυτή ως ισοδύναμη με την προηγούμενη. Όπως φαίνεται στο Σχ. 8.16, για να συμβεί αυτό θα πρέπει να θεωρήσουμε μια υποθετική γη με ακτίνα $K\alpha$ ($K > 1$) μεγαλύτερη από την πραγματική. Πιο γενικά, αν φανταστούμε ότι η επιφάνεια της γης καμπυλώνεται λιγότερο (αυτό σημαίνει μεγαλύτερη ακτίνα $K\alpha$), τότε και η τροχιά των ραδιοκυμάτων για να διατηρεί το ίδιο ύψος πάνω από την επιφάνεια αυτή θα πρέπει να καμπυλώνεται λιγότερο: αν η καμπυλότητα της γης μειωθεί αρκετά τότε η καμπυλότητα της τροχιάς μπορεί να μειωθεί στο 0, οπότε η τροχιά θα γίνει ευθύγραμμη.

Μπορούμε να διατυπώσουμε την παραπάνω επιχειρηματολογία και με έναν άλλο τρόπο, λέγοντας ότι αν μετατρέψουμε την καμπυλόγραμμη τροχιά των ραδιοκυμάτων (ακτίνας ρ) σε ευθύγραμμη, τότε η καμπυλότητα αυτών μειώνεται από $1/\rho$ σε 0, δηλ. μειώνεται κατά $1/\rho$. Για να υπάρχει ισοδυναμία όπως την ορίσαμε παραπάνω, θα πρέπει και η καμπυλότητα της γης να μειωθεί ισόποσα κατά $1/\rho$, δηλ. η ακτίνα της γης από α να αυξηθεί σε μια τιμή $\alpha' = K\alpha$ (με $K > 1$) τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{K\alpha} = \frac{1}{\rho} \quad (8.3.20)$$

Για την απόδειξη της (8.3.20), από το τρίγωνο OAB του Σχ. 8.16α παίρνουμε

$$dh = (OB) - (OA) = \left(\frac{1}{\cos \delta} - 1 \right) (OA) = \left(\frac{1}{\cos \delta} - 1 \right) (K\alpha + h)$$

Για μικρές γωνίες δ , από την προσέγγιση του $\cos \delta$ και το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$\cos \delta \cong 1 - \frac{\delta^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos \delta} \cong \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right)^{-1} \cong 1 + \frac{\delta^2}{2}$$

και αφού $h \ll \alpha$ (άρα και $h \ll K\alpha$), προκύπτει $K\alpha + h \cong K\alpha$ και έτσι $dh \cong \frac{\delta^2}{2} K\alpha$.

Για μικρές γωνίες δ ισχύει επίσης $\delta \cong \sin \delta = \frac{d}{K\alpha + h} \cong \frac{d}{K\alpha}$, και επομένως:

$$dh \cong \frac{d^2}{2K\alpha} \quad (8.3.21)$$

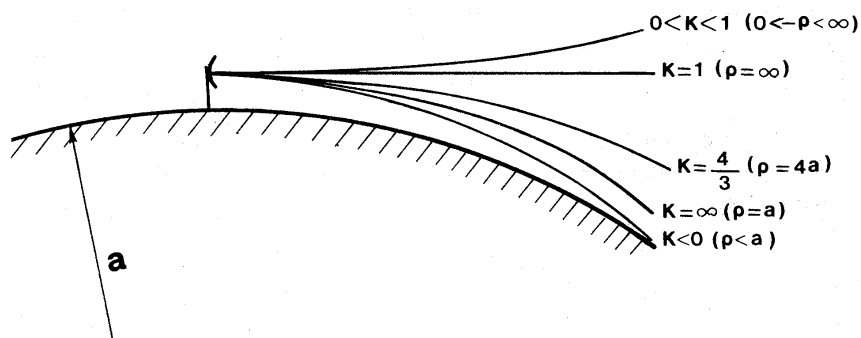
Η σχέση αυτή δίνει την «υψομετρική διαφορά» ανάμεσα στην ευθεία AB και την σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $K\alpha$ του Σχ. 8.16α. Παρατηρούμε τώρα ότι στο Σχ. 8.16β υπάρχουν δύο παρόμοιες σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες α και ρ , και η (8.3.21) μπορεί να εφαρμοσθεί σε καθεμία από αυτές και να δώσει τις «υψομετρικές διαφορές» αυτών από την ευθεία AB. Τότε η διαφορά των δύο αυτών «υψομετρικών διαφορών» ισούται με dh , δηλαδή

$$dh \cong \frac{d^2}{2K\alpha} \cong \frac{d^2}{2\alpha} - \frac{d^2}{2\rho} \Leftrightarrow \frac{1}{K\alpha} \cong \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho}$$

που είναι η (8.3.20). Εισάγοντας σε αυτή την (8.3.19), δηλ $\rho = 4\alpha$, παίρνουμε

$$K = \frac{4}{3}, \quad K\alpha = \frac{4}{3}\alpha \cong 8500 \text{ km} \quad (8.3.22)$$

όπου ο συντελεστής K λέγεται **τροποσφαιρικός δείκτης** και η ακτίνα $K\alpha$ αποκαλείται **ενεργός** (effective) ακτίνα της γης. Η τιμή $K = 4/3$ αντιστοιχεί σε συνθήκες πρότυπης ατμόσφαιρας, ενώ σε άλλες συνθήκες η τιμή του K υπολογίζεται από την (8.3.20) εισάγοντας την (8.3.18) που δίνει την ακτίνα καμπυλότητας ρ της τροχιάς. Όπως προαναφέρθηκε, η κλίση dn/dh μεταβάλλεται σε σημαντικό βαθμό με την γεωγραφική περιχή και τον χρόνο, οπότε αντίστοιχα μεταβάλλεται και η τιμή του K , η οποία σε γενικές γραμμές κυμαίνεται μεταξύ 0,5 και 5. Η παραπάνω τιμή $4/3$ είναι καλή προσέγγιση για μέσα γεωγραφικά πλάτη, ενώ ενδεικτικά αναφέρεται για αρκτικές περιοχές η περιοχή τιμών από $6/5$ ως $4/3$ και για τον ισημερινό από $4/3$ ως $3/2$. Όπως φαίνεται από την (8.3.20), αύξηση (ή μείωση) του K αντιστοιχεί σε μείωση (ή αύξηση) της ακτίνας καμπυλότητας ρ , δηλ. σε μεγαλύτερη (ή μικρότερη) καμπύλωση των ραδιοκυμάτων. Για την τιμή $K = 1$ είναι $\rho = \infty$ (πράγμα που σημαίνει ότι $dn/dh = 0$, δηλ. δεν υπάρχει διάθλαση), οπότε η τροχιά των ραδιοκυμάτων είναι ευθύγραμμη (χωρίς καμπύλωση), ενώ για $K < 1$ η τροχιά καμπυλώνεται προς τα πάνω και τα ραδιοκύματα αποκλίνουν προς τον ουρανό αντί να συγκλίνουν προς τη γη. Το Σχ. 8.17 δείχνει διάφορες περιπτώσεις.



Σχ. 8.17: Καμπύλωση των ραδιοκυμάτων για διάφορες τιμές του τροποσφαιρικού δείκτη

Η έννοια της ενεργού ακτίνας (και της προαναφερόμενης ισοδυναμίας καμπυλόγραμμης με ευθύγραμμη τροχιά) είναι η εξής: Αν αντικαταστήσουμε την πραγματική γη ακτίνας a με την τροποποιημένη γη ακτίνας $K\alpha$, τότε η διάδοση γίνεται ευθύγραμμη όπως σε ομογενή ατμόσφαιρα (χωρίς διάθλαση). Η έννοια αυτή είναι χρήσιμη για τους υπολογισμούς επειδή επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την ακτίνα της γης με την ενεργό ακτίνα και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε ό,τι ισχύει για ευθύγραμμη διάδοση. Για παράδειγμα, ο συντελεστής D της παραγρ. 8.2.7, που εκφράζει τη μείωση του ανακλώμενου πεδίου λόγω του σφαιρικού σχήματος της γης, υπολογίζεται από την

(8.2.47) θέτοντας $K\alpha$ αντί α , ενώ η ίδια αντικατάσταση πρέπει να γίνει και στις υπόλοιπες σχετικές εκφράσεις, π.χ. στις (8.2.52α-β) που δίνουν τα «διορθωμένα ύψη» h''_1 και h''_2 . Κατά τον ίδιο τρόπο πρέπει να τροποποιηθεί η σχέση που δίνει την μέγιστη απόσταση ζεύξης οπτικής επαφής, διότι η καμπύλωση των ραδιοκυμάτων (όπως ήδη επισημάνθηκε) επιτρέπει την κατευθείαν διάδοσή τους πέραν του ορίζοντα. Έτσι η (8.2.41) γίνεται

$$d_{0R} \cong \sqrt{2K\alpha h} \quad (8.3.23)$$

Συνήθως λέγεται ότι από την έκφραση (8.3.23) προκύπτει ο **ραδιοηλεκτρικός ορίζοντας** ο οποίος (για $K > 1$) είναι μεγαλύτερος από τον οπτικό ορίζοντα. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, η μέγιστη απόσταση κατευθείαν ζεύξης μεταξύ δύο κεραιών τοποθετημένων σε ύψη h_1 και h_2 δίνεται πλέον από την

$$d_{\max} \cong \sqrt{2K\alpha h_1} + \sqrt{2K\alpha h_2} \quad (8.3.24)$$

Σημειώνουμε όμως ότι κατά την σχεδίαση μιας ζεύξης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και ο χρόνος διαθεσιμότητας αυτής. Επειδή ο τροποσφαιρικός δείκτης K μεταβάλλεται με το χρόνο, είναι δυνατό να λαμβάνει την τιμή 4/3 για το μεγαλύτερο ποσοστό του χρόνου αλλά για κάποιο υπολογίσιμο ποσοστό, π.χ. 5%, να λαμβάνει μικρότερες τιμές, οπότε και η μέγιστη απόσταση μειώνεται αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή, μια ζεύξη στα όρια της μέγιστης απόστασης που επιτρέπει ο ραδιοηλεκτρικός ορίζοντας θα βρεθεί εκτός λειτουργίας για το αντίστοιχο ποσοστό του χρόνου. Κατά συνέπεια, για τον προσδιορισμό του χρόνου διαθεσιμότητας μιας ζεύξης πέραν του ορίζοντα απαιτούνται στατιστικά στοιχεία για τις μεταβολές του K , κατά προτίμηση στη μορφή κατανομής πιθανότητας, οπότε αυτό που ενδιαφέρει είναι η τιμή $P(K < K_m)$, όπου K_m συμβολίζει την «οριακή» τιμή του τροποσφαιρικού δείκτη από την οποία και κάτω δεν είναι δυνατή η μετάδοση για την απόσταση που μας ενδιαφέρει. Μια εναλλακτική λύση είναι να λαμβάνεται η ελάχιστη τιμή του K στην συγκεκριμένη περιοχή, εφόσον είναι διαθέσιμη.