Μερική Παράγωγος

Διδάσκοντες: Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα

Μερική Παράγωγος:

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ ορισμένη στο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και $(x_0, y_0) \in D$. Ονομάζουμε **μερική παράγωγο** της $f(x, y)$ ως προς x στη θέση (x_0, y_0) και συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ το όριο (εφόσον υπάρχει)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

(Δηλαδή θεωρούμε το x σαν μεταβλητή και το $y = y_0$ σταθερό).

Όμοια ορίζεται η **μερική παράγωγος** της $f(x, y)$ ως προς y στη θέση (x_0, y_0) και συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ το όριο (εφόσον υπάρχει)

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

(Δηλαδή θεωρούμε το y σαν μεταβλητή και το $x = x_0$ σταθερό).

Ιδιότητες – Συμβολισμοί – Ορισμοί :

- Χρησιμοποιούμε το σύμβολο ∂ για τη μερική παράγωγο, ώστε να την αντιδιαστείλουμε με την συνήθη παράγωγο που συμβολίζεται με το γράμμα d.
- Οι κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής ισχύουν και για τις μερικές παραγώγους.
- Αν ένα από τα παραπάνω όρια ισούται με $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$), τότε λέγεται ότι η αντίστοιχη μερική παράγωγος **απειρίζεται θετικά** (αντίστοιχα **αρνητικά**).

- Μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών ονομάζεται **μερικώς παραγωγίσιμη** αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της σε κάθε σημείο της $(x, y) \in D$. Στην περίπτωση αυτή, οι **(πρώτες) μερικές παράγωγοι** της f ως προς τις μεταβλητές x, y και σημειώνονται με

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

<u>Λυμένες Ασκήσεις (Εύρεση Μερικών Παραγώγων):</u>

1. Αν $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $A(4,-5)$.

<u>Λύση:</u>

- Για να βρούμε το $\frac{\partial f}{\partial x}$, κρατάμε το y σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς x.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3xy + y - 1)}{\partial x} = 2x + 3y$$

Η τιμή της $\frac{\partial f}{\partial x}$στο σημείο $A(4,-5)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -7$$

- Για να βρούμε το $\frac{\partial f}{\partial y}$, κρατάμε το x σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 3xy + y - 1)}{\partial y} = 3x + 1$$

Η τιμή της $\frac{\partial f}{\partial x}$στο σημείο $A(4,-5)$ είναι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

2. Αν $f(x,y) = x^2y + y^3$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και$\frac{\partial f}{\partial y}$.

<u>Λύση:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2y+y^3\right)}{\partial y}=x^2+3y^2$$

3. Αν $f(x,y)=\cos(xy)+x\cos y$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\left(\cos(xy)+x\cos y\right)}{\partial x}=-y\sin(xy)+\cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(\cos(xy)+x\cos y\right)}{\partial y}=-x\sin(xy)-x\sin y$$

4. Αν $f(x,y)=y\sin(xy)$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$

Λύση:

- Για να βρούμε το $\frac{\partial f}{\partial x}$, κρατάμε το y σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς x

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\left(y\sin(xy)\right)}{\partial x}=y\cos(xy)\frac{\partial(xy)}{\partial x}=y^2\cos(xy)$$

- Για να βρούμε το $\frac{\partial f}{\partial y}$, κρατάμε το x σταθερό και παραγωγίζουμε ως προς y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(y\sin(xy)\right)}{\partial y}=\frac{\partial(y)}{\partial y}\sin(xy)+\frac{\partial\left(\sin(xy)\right)}{\partial y}y=\sin(xy)+xy\cos(xy)$$

5. Αν $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ να βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}=\frac{y\left(x^2+y^2\right)-x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}=\frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\partial y}=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-xy\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}^2}=\frac{x\left(x^2+y^2\right)-xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)}$$

6. Αν $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$

στο σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$.

<u>Λύση</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\dfrac{0}{y}=0$ για κάθε $y\neq 0$. Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

7. (Μερική Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης)

8. Βρείτε το $\frac{\partial f}{\partial x}$ από την εξίσωση $yz-\ln z=x+y$, όπου z είναι συνάρτηση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x,y και δεδομένου ότι η ζητούμενη μερική παράγωγος υπάρχει.

<u>Λύση</u>

Θα παραγωγίσουμε κατά μέλη την εξίσωση ως προς x, κρατώντας σταθερό το y και θεωρώντας το z ως διαφορίσιμη συνάρτηση των μεταβλητών x,y

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz-\ln z)=\frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

$$\frac{\partial(yz)}{\partial x}-\frac{\partial(\ln z)}{\partial x}=\frac{\partial(x)}{\partial x}+\frac{\partial(y)}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(y-\frac{1}{z}\right)=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{yz-1}{z}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{yz-1}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία Μερικής Παραγώγου

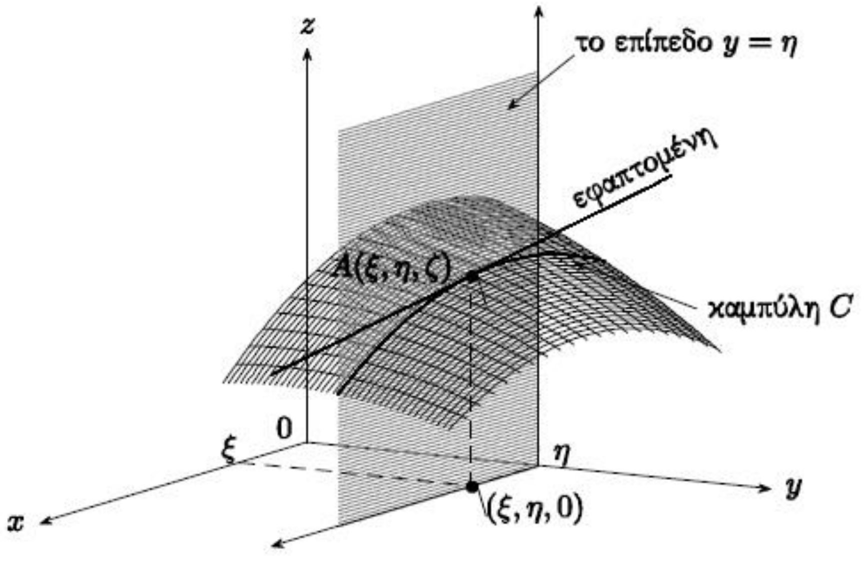
Έστω μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών και το σημείο $A(x_0,y_0,z_0)$ της γραφικής της παράστασης, δηλαδή $z_0=f(x_0,y_0)$.
Το επίπεδο $y=y_0$, το οποίο διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλο με το επίπεδο Oxz, τέμνεται με την επιφάνεια στην καμπύλη C η οποία είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $z=f(x,y_0)$ (βλ. τα δύο επόμενα σχήματα, όπου x_0=ξ, y_0=η, z_0=ζ).

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

(i) Αν υποτεθεί ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της καμπύλης C στο σημείο A η ευθεία που κείται στο επίπεδο $y=y_0$, διέρχεται από το A και έχει κλίση ίση με $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.
Στην περίπτωση αυτή, η εφαπτομένη ορίζεται από τις εξισώσεις

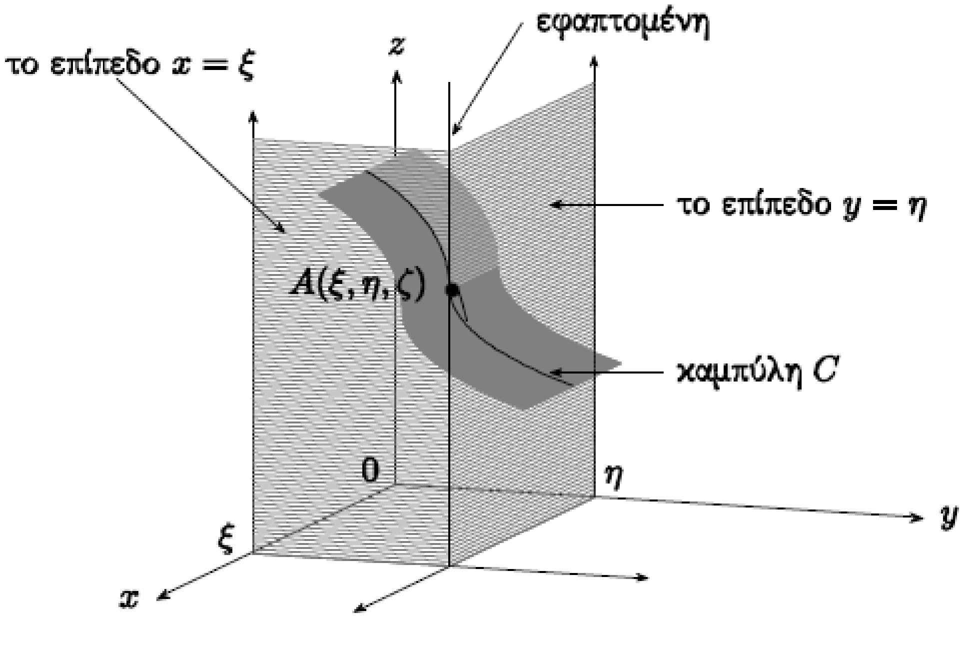
$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0),\ \ y=y_0.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η κλήση της καμπύλης $z=f(x,y_0)$ στο σημείο $A(x_0,y_0,z_0)$ του επιπέδου $y=y_0$ είναι η τιμή της μερικής παραγώγου της f ως προς x στο σημείο (x_0,y_0). Δηλαδή η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$.



(ii) Αν υποτεθεί ότι η μερική παράγωγος απειρίζεται θετικά ή αρνητικά τότε ορίζεται ως εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο A η ευθεία που διέρχεται από το σημείο αυτό και είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy.

Στην περίπτωση αυτή η εφαπτομένη ορίζεται από τις εξισώσεις
$x = x_0,\ y = y_0$



Αντίστοιχη είναι η γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Μερικές Παράγωγοι και Συνέχεια

- Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ μπορεί να έχει μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάποιο σημείο της, χωρίς ωστόσο να είναι συνεχής εκεί. Κάτι το οποίο δεν μπορούσε να συμβαίνει για συναρτήσεις μιας μεταβλητής.
- Για να είναι συνεχής η $z = f(x, y)$ σε ένα σημείο της(x_0, y_0), θα πρέπει η μερικές παράγωγοι ως προς x και y στο (x_0, y_0) να υπάρχουν και να είναι συνεχείς σε κάθε σημείο ενός κυκλικού δίσκου με κέντρο το
- Αν για μία συνάρτηση $z = f(x, y)$. Δεν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι σε ένα σημείο (x_0, y_0) τότε η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

(α) να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x,y)$ ως προς την συνέχεια στο σημείο $(x_0, y_0) = (0,0)$

Λύση

(α) $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{1-1}{x} = 0$ για κάθε $x \neq 0$ άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \dfrac{1-1}{x} = 0$ για κάθε $y \neq 0$ άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{y} = 0.$$

(β) Έλεγχος συνέχειας: Θεωρούμε ακολουθίες $P_n(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ και $Q_n(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$.

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x_n, y_n) = \lim_{n \to +\infty} Q_n(x_n, y_n) = (0,0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f\left[P_n\left(x_n,y_n\right)\right]=\lim_{n\to+\infty} f\left[\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty} 0=0$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} f\left[Q_n\left(x_n,y_n\right)\right]=\lim_{n\to+\infty} f\left[\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty} 1=1.$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left[P_n\left(x_n,y_n\right)\right]\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f\left[Q_n\left(x_n,y_n\right)\right]$, το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει και επομένως η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω η μερικώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: D\to\mathbb{R}$, όπου $D\subseteq\mathbb{R}^2$. και έστω ότι οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}=f_x$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=f_y$ είναι επίσης μερικώς παραγωγίσιμες. Τότε, οι μερικές παράγωγοι αυτών ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι** ή **μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης** της συνάρτησης f και σημειώνονται με

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς y

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ οι μεικτές δεύτερες μερικές παράγωγοι ως προς x και y και ως προς y και x αντίστοιχα. Δηλαδή, βλέπουμε ότι οι 2 πρώτες μερικές παράγωγοι (η μια ως προς x και η άλλη ως προς y) οδηγούν σε 4 δεύτερες μερικές παραγώγους.

Παρατήρηση:

Οι μεικτές δεύτερες μερικές παράγωγοι εν γένει δεν είναι ίσες.

Αν όμως οι δεύτερες μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι συνεχείς τότε οι μικτές είναι ίσες, δηλαδή $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Μια ικανή συνθήκη για την ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **Θεώρημα των μεικτών παραγώγων** ή **Θεώρημα Schwarz**.

Θεώρημα των Μεικτών Παραγώγων (Schwarz)

- Έστω ένα εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του D και μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}$ δύο μεταβλητών. Έστω επίσης ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y και $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ είναι συνεχής στο (x_0, y_0). Τότε υπάρχει και η $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

- Το θεώρημα επεκτείνεται σε όλο το D, όταν υφίσταται συνέχεια σε αυτό.

Ανάλογα με τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ορίζονται και οι μερικές παράγωγοι n-οστής τάξης. Γενικά, σημειώνονται με

$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ η μερική παράγωγος n-οστής τάξης ως προς x και

$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ η μερική παράγωγος n-οστής τάξης ως προς y.

$\frac{\partial^n}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \ldots \partial x^{n_{k-1}} \partial y^{n_k}}$ μερική μεικτή παράγωγος n-οστής τάξης όπου $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$ με σειρά παραγώγισης από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Λυμένες Ασκήσεις (Εύρεση Μερικών Παραγώγων Ανώτερης Τάξης):

1. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(xy + (x+2y)^2\right)}{\partial x} = y + 2(x+2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(xy + (x+2y)^2\right)}{\partial y} = x + 4(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(y + 2(x+2y)\right)}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(x + 4(x+2y)\right)}{\partial y} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(x + 4\left(x + 2y\right)\right)}{\partial x} = 5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(y + 2\left(x + 2y\right)\right)}{\partial y} = 5$$

2. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f\left(x,y\right) = \sin x \sin^2 y$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(\sin x \sin^2 y\right)}{\partial x} = \cos x \sin^2 y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\sin x \sin^2 y\right)}{\partial y} = 2\sin x \sin y \cos y = \sin x \sin\left(2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\cos x \sin^2 y\right)}{\partial x} = -\sin x \sin^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(\sin x \sin\left(2y\right)\right)}{\partial y} = 2\sin x \cos\left(2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(\sin x \sin\left(2y\right)\right)}{\partial x} = \cos x \sin\left(2y\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\cos x \sin^2 y\right)}{\partial y} = 2\cos x \sin y \cos y = \cos x \sin\left(2y\right)$$

3. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f\left(x,y\right) = x\cos y + ye^x$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(x\cos y + ye^x\right)}{\partial x} = \cos y + ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(x\cos y + ye^x\right)}{\partial y} = -x\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(-x\sin y + e^x\right)}{\partial x} = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\cos y + y e^x\right)}{\partial y} = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(\cos y + y e^x\right)}{\partial x} = y e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(-x \sin y + e^x\right)}{\partial y} = -x \cos y$$

4. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(x,y) = e^{xy} + 2^x$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\left(e^{xy} + 2^x\right)}{\partial x} = y e^{xy} + 2^x \ln 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^{xy} + 2^x\right)}{\partial y} = x e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\left(y e^{xy} + 2^x \ln 2\right)}{\partial x} = y^2 e^{xy} + 2^x \ln^2 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\left(x e^{xy}\right)}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial(x e^{xy})}{\partial x} = e^{xy}(xy + 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial(y e^{xy} + 2^x \ln 2)}{\partial y} = e^{xy}(xy + 1)$$

5. **(Επιλογή της σειράς παραγώγισης)** Να βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ της συνάρτησης $f(x,y) = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$

Λύση

Σύμφωνα **με το Θεώρημα των Μεικτών Παραγώγων (Schwarz)** ισχύει ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\left(xy+\frac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial x}=y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial(y)}{\partial y}=1$$

Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1$

Παρατηρείστε ότι οι πράξεις γίνονται πολύ πιο κοπιαστικές αν παραγωγίσουμε πρώτα ως προς y.

6. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους τρίτης τάξης ως προς x της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^3+3x^2y+4xz$

<u>Λύση</u>

$f_x=3x^2+6xy+4z$

$f_{xx}=6x+6y$

$f_{xxx}=6$

7. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Να βρεθούν οι παράγωγοι δεύτερης τάξης $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ στο σημείο $(0,0)$.

<u>Λύση</u>

Για $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Όμοια βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

Ασκήσεις:

1. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης των συναρτήσεων

(i) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

(ii) $f(x,y)=\cos\left(xy^2\right)$

(iii) $f(x,y)=e^{-xy^2}+y^3x^4$

(iv) $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2 x+e^{-y}}$

(v) $f(x,y)=x\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(vi) $f(x,y)=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

(vii) $f(x,y)=\exp\left(-x^2+y^2\right)$

2. Έστω $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & =(0,0) \end{cases}$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $\left(x_0,y_0\right)=\left(0,0\right)$.

3. Έστω $\mathrm{f(x,y)}=\begin{cases} \mathrm{x+y}, & \mathrm{xy}\neq 0 \\ 2\ , & \mathrm{xy}=0 \end{cases}$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $\left(x_0,y_0\right)=\left(0,0\right)$.

Είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $(0,0)$;

4. Έστω η συνάρτηση $f\left(x.y,z\right)=x^3+y^3+z^3$. Να βρεθούν οι $f_x, f_{xx}, f_{xxx}.f_{xy}, f_{xyz}$

5. Έστω $f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ καθώς και όλες τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της συνάρτησης f

Βιβλιογραφία:

1. Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002
2. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
3. Διανυσματικός Λογισμός Jerold E. Mardsen & Antony J. Tromba (2017) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
4. Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Βαγγέλης Σπανδάγος (1993) Εκδόσεις Αίθρα.
5. Μπράτσος Α. (2011). Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμουλή
6. Σημειώσεις Σχολής Ναυτικών Δοκίμων Open e-class.