Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας – Θεώρημα Bayes

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Διαμέριση Δειγματικού Χώρου

Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε

- είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ Για κάθε $i, j = 1,2, \dots, n$ με $i \neq j$
- και

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \Omega$$

Τότε λέμε ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω.

Διαμέριση Δειγματικού Χώρου

Παράδειγμα 1:

Αν $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, τότε τα $A_1 = \{1,3,5\}$ και $A_2 = \{2,4,6\}$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω, αφού

- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

και

- $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω, τότε αν $A \subseteq \Omega$

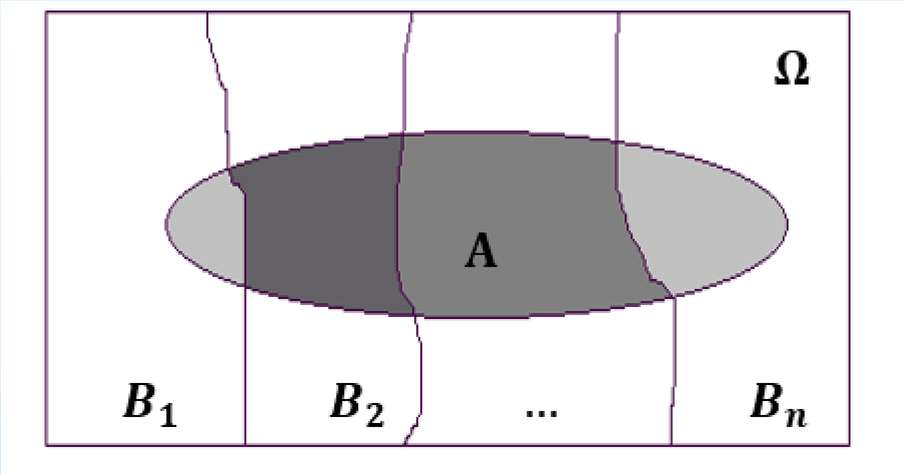
$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)\big) =$$

$$= P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots (A \cap B_n)\big) =$$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Επομένως αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

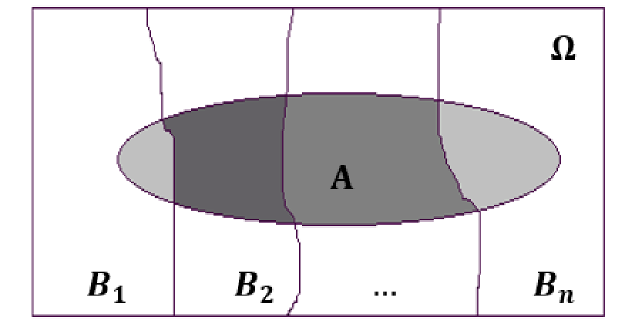


$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Όμως από τον πολλαπλασιαστικό νόμο γνωρίζουμε ότι

$$P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$$



Επομένως

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν αποτελέσματα του επόμενου θεωρήματος που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.**

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$$

Παράδειγμα 1:

Παράδειγμα 1:

Σε μία αποθήκη είναι αποθηκευμένα εξαρτήματα του ίδιου τύπου που προέρχονται από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές A, B, Γ σε ποσοστά $50\%, 40\%$ και 10% αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι οι προμηθευτές παράγουν A, B, Γ ελλαττωματικά εξαρτήματα $6\%, 10\%$ και 15% αντίστοιχα. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη ένα εξάρτημα από την αποθήκη. Να βρεθεί η πιθανότητα το εξάρτημα να είναι ελαττωματικό.

Παράδειγμα 1:

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Α

Β: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Β

Γ: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Γ

Ε: Το εξάρτημα είναι ελλαττωματικό

Παράδειγμα 1:

- Τα ενδεχόμενα A, B, Γ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω
- Επίσης γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = 50\%, P(B) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(E|A) = 6\%, P(E|B) = 10\%, P(E|\Gamma) = 15\%,$$

Παράδειγμα 1:

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε ότι

$$P(\mathrm{E}) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|\Gamma)P(\Gamma)$$

Δηλαδή

$$P(\mathrm{E}) = 8{,}5\%$$

Το Θεώρημα Bayes:

- Γνωρίζουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου B_k, δεδομένου του A με $P(A) > 0$, ορίζεται ως εξής:

$$P(B_k|\, A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}$$

- Όμως από τον πολλαπλασιαστικό τύπο γνωρίζουμε ότι $P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$

Το Θεώρημα Bayes:

- Επιπλέον αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει ότι

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Το Θεώρημα Bayes:

- Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$P(B_k|\ A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο Θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Bayes**

Θεώρημα του Bayes

Θεώρημα του Bayes:

Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , με $P(B_i) > 0$ για κάθε $i = 1,2, \dots, n$, τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ με $P(\mathrm{A}) > 0$ και $k = 1,2, \dots, n$ ισχύει ότι

$$P(B_k | \, A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Παράδειγμα 2 – Συνέχεια Παραδείγματος 1

<u>Παράδειγμα 2:</u>

Σε μία αποθήκη είναι αποθηκευμένα εξαρτήματα του ίδιου τύπου που προέρχονται από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές A, B, Γ σε ποσοστά $50\%, 40\%$ και 10% αντίστοιχα. Είναι γνωστό ότι οι προμηθευτές παράγουν A, B, Γ ελλαττωματικά εξαρτήματα $6\%, 10\%$ και 15% αντίστοιχα. Έστω ότι επιλέγουμε στην τύχη ένα εξάρτημα από την αποθήκη. Να βρεθεί η πιθανότητα αν το εξάρτημα είναι ελαττωματικό να προέρχεται από τον προμηθευτεί A.

Παράδειγμα 2:

Λύση:

Όπως και στο παράδειγμα 1 θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή A

B: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή B

Γ: Το εξάρτημα προέρχεται από τον προμηθευτή Γ

E: Το εξάρτημα είναι ελλαττωματικό

Παράδειγμα 2:

- Τα ενδεχόμενα A, B, Γ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω.
- Επίσης γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = 50\%, P(B) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(E|A) = 6\%, P(E|B) = 10\%, P(E|\Gamma) = 15\%,$$

Παράδειγμα 2:

Από το Θεώρημα του Bayes έχουμε

$$P(\mathrm{A}|\,\mathrm{E}) = \frac{P(E|\mathrm{A})P(\mathrm{A})}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|\Gamma)P(\Gamma)}$$

Δηλαδή

$$P(\mathrm{A}|\,\mathrm{E}) = \frac{0{,}03}{0{,}085} = 0{,}35$$

Παράδειγμα 3:

Η πιθανότητα να συμβεί μια πυρκαγιά σε μια πόλη σε ένα έτος είναι 12% και η πιθανότητα να συμβούν 2 πυρκαγιές είναι 4%, ενώ για 3 ή περισσότερες πυρκαγιές η πιθανότητα είναι μηδενική. Αν η πιθανότητα μια πυρκαγιά να προκαλέσει σοβαρές ζημιές είναι 25% και η πιθανότητα δύο πυρκαγιές στο ίδιο έτος να προκαλέσουν σοβαρές ζημιές είναι 6,25% να υπολογιστούν οι πιθανότητες :

Παράδειγμα 3:

Α. Να μην προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές από πυρκαγιά.

Β. Να προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές σε ένα νομό που έχει 3 πόλεις, (δηλαδή τουλάχιστον σε μία πόλη του νομού). Θεωρείστε ότι ότι συμβαίνει στην μία πόλη του νομού είναι ανεξάρτητο από το τι συμβαίνει στις άλλες και ότι για κάθε πόλη ισχύουν οι παραπάνω πιθανότητες.

Παράδειγμα 3:

Λύση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Π_i: Συμβαίνουν i Πυρκαγιές στην πόλη $i = 1,2$

Z: Συμβαίνουν σοβαρές ζημιές στην πόλη από πυρκαγιά

Παράδειγμα 3:

Γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(\Pi_1) = 12\%, P(\Pi_2) = 40\%, P(\Gamma) = 10\%,$$

$$P(\mathrm{Z}|\Pi_1) = 25\%, P(\mathrm{Z}|\Pi_2) = 6{,}25\%,$$

Α. Έχουμε: $P(Z) = P(\mathrm{Z}|\Pi_1) \cdot P(\Pi_1) + P(\mathrm{Z}|\Pi_2) \cdot P(\Pi_2)$

$$P(Z) = 0,25 \cdot 0,12 + 0,04 \cdot 0,0625 = 3{,}25\%$$

Άρα η πιθανότητα να μην συμβούν σοβαρές ζημιές είναι

$$P(Z^c) = 100\% - 3{,}25\% = 96{,}75\%$$

Παράδειγμα 3:

Β. Έστω ο νομός έχει τις πόλεις 1,2,3

Αν B_i το ενδεχόμενο να μην προκληθεί ζημιά από πυρκαγιά στην πόλη $i, i = 1,2,3.$

Και B το ενδεχόμενο να μην προκληθεί ζημιά στο νομό τότε,

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \cap \mathrm{B}_3) =$$

$$= P(\mathrm{B}_1) \cdot P(\mathrm{B}_2) \cdot P(\mathrm{B}_3) = (0{,}9675)^3 = 0{,}9056$$

Παράδειγμα 3:

Η πιθανότητα να προκληθούν σε ένα έτος σοβαρές ζημιές στον νομό που έχει 3 πόλεις (δηλαδή να προκληθεί ζημιά σε τουλάχιστον μία πόλη) είναι

$$P(\mathrm{B}^c) = 1 - P(\mathrm{B}) = 1 - 0{,}9056 = 0{,}0943$$

Άσκηση 1

Στις Πανελλήνιες εξετάσεις, από τους υποψήφιους τεχνολογικής κατεύθυνσης, το 25% απέτυχε στα Μαθηματικά, το 15% στη Φυσική και το 10% και στα δύο μαθήματα. Επιλέγουμε έναν υποψήφιο στην τύχη.

Άσκηση 1

Α. Ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει σ’ένα τουλάχιστον μάθημα από τα δύο

Β. Ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, αλλά όχι στη Φυσική

Γ. Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;

Άσκηση 1

Δ. Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποια η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στη Φυσική;

Άσκηση 2

Σε μια πόλη το 40% είναι άντρες και το 60% γυναίκες. Επίσης το 50% των αντρών και το 30% των γυναικών είναι καπνιστές. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας καπνιστής να είναι άντρας.

Άσκηση 3

Αν ρίξουμε δύο ζάρια, ποια η πιθανότητα να έρθει ακριβώς μία φορά 5, όταν,

Α) Δεν δίνεται άλλη πληροφορία

Β) Είναι γνωστό ότι η ρίψη έφερε άθροισμα μεγαλύτερο του 9.

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons
- Γ. Παπαδόπουλος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Εκδόσεις Gutenberg