Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

1ης - Τάξης

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών

2024 - 2025

Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις

• Γενική μορφή

$y' = f(x,y)$ ή $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, όπου

$f(x,y)$ είναι ομογενής πραγματική συνάρτηση

Ομογενής συνάρτηση

Είναι η συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$\boxed{f(tx,ty) = t^{\lambda} \cdot f(x,y), \quad t \in \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{N},}$$

όπου λ είναι ο βαθμός ομογένειας

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y)$:

$f(x,y) = x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4$

Να αποδειχθεί ότι είναι ομογενής

$$f(x,y) = x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4$$

Για την απόδειξη θέτουμε: $\begin{array}{l|l} x \longrightarrow tx \\ y \longrightarrow ty \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f(tx,ty) = (tx)^4 - 3(tx)^3 ty + 4(tx)^2(ty)^2 - 5(tx)(ty)^3 + 3(ty)^4$$

$$\Rightarrow f(tx,ty) = t^4\left(x^4 - 3x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3 + 3y^4\right)$$

$$\Rightarrow f(tx,ty) = t^4 \cdot f(x,y)$$

> Επομένως η $f(x,y)$ είναι ομογενής ως προς x,y, βαθμού ομογένειας $\lambda = 4$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ρητές συναρτήσεις, στις οποίες ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού ομογένειας. Οι ρητές αυτές συναρτήσεις είναι ομογενείς

Παράδειγμα

$f(x,y) = \dfrac{x^4y - y^5}{x^5 - y^5}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι 5ου βαθμού ομογενείς συναρτήσεις, άρα και $f(x,y)$ ομογενής συνάρτηση.

Έστω ομογενής Διαφορική Εξίσωση

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

Για την λύση κάνουμε

αντικατάσταση $\boxed{y = y(x) = x\,u(x)}$

$$y = xu \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}u + x\frac{du}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}}$$

Με την αντικατάσταση αυτή προκύπτει νέα Δ.Ε, με άγνωστη συνάρτηση την $u(x)$.

Η νέα Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Παραδείγματα

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$ (1), $x \neq 0$. Η (1) είναι ομογενής Δ.Ε, γιατί η $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x}$ είναι ομογενής συνάρτηση, (βαθμός αριθμητή = βαθμό παρονομαστή ως προς x,y).

- Μετασχηματισμός: $y = xu$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Άρα η (1) μετά την αντικατάσταση γίνεται

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{x + xu}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow$$

$$du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int du = \int \frac{1}{x}dx + c$$

$$\Rightarrow u(x) = \ln|x| + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}_+ \text{ και } y(x) = \frac{u(x)}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = x\ln(c|x|).$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε $2xy\frac{dy}{dx} - (x^2 + y^2) = 0$
$x, y \neq 0$.

<u>Λύση</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad x \cdot y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^0 + x^0y^2}{2x^1y^1}$$, ο αριθμητής ως προς x, y

είναι του (αθροίζουμε τους εκθέτες x, y) ίδιου βαθμού με τον παρονομαστή 2ου βαθμού-, το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση του 2ου μέλους είναι ομογενής, άρα και η

Δ.Ε είναι ομογενής της μορφής $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, όπου $f(x,y)$ ομογενής συνάρτηση.

Εφ' όσον η Δ.Ε. είναι ομογενής, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό

$\boxed{y(x) = x\,u(x), \quad y = xu}$, όπου u είναι μια νέα συνάρτηση ως προς x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}, \quad xy \neq 0$$

• $y = xu \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(xu) \Longrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = 1.u + x\frac{du}{dx} \quad \Big| \quad \boxed{(fg)' = f'.g + f.g'}$$

Επομένως αντικαθιστούμε τα $y = xu$ και $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$, οπότε προκύπτει

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x^2+(xu)^2}{2x(xu)}$$

$$\Longrightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{x^2(1+u^2)}{2x^2u}, \quad x \neq 0$$

$$\Longrightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2-2u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow \frac{2u}{1-u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

που είναι μια Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών.

Παρατήρηση

Στόχος της αντικατάστασης είναι η μετατροπή της αρχικής Δ.Ε με άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ σε Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών με άγνωστη πλέον συνάρτηση την $u(x)$.

Συνεπώς $\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{1}{x}dx+c$$

$$\Rightarrow -\int\frac{(1-u^2)'}{1-u^2}du=\ln|x|+c$$

$c\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow -\ln|1-u^2| = \ln|x| + \ln c$$

Μπορούμε να θέσουμε όπου $c=\ln c'$, για να προκύψει πιο εύκολα το αποτέλεσμα

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{|1-u^2|} = \ln|x| + \ln c', \quad c' \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{|1-u^2|} = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow |1-u^2| = \frac{1}{c'|x|}$$

Είναι όμως $y = xu \Rightarrow u(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$\Rightarrow \left|1-\frac{y^2}{x^2}\right| = \frac{1}{c'|x|}, \quad c' \in \mathbb{R}_+$$

3. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{και} \quad y(1) = 1$$

Λύση

$$y' = \frac{x-y}{x+y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \quad (1)$$

Η (1) είναι ομογενής Δ.Ε, διότι η

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ είναι ομογενής συνάρτηση

Άρα θέτουμε $y = xu$ και $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$

οπότε η (1) γίνεται

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x - xu}{x + xu}$$

$$\Longrightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\Longrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1-u-u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2-2u+1}{1+u}$$

$$\Rightarrow \frac{1+u}{-u^2-2u+1}\,du = \frac{1}{x}dx$$, χωρίζομέ-

νων μεταβλητών Δ.Ε.

$$\Rightarrow \int \frac{1+u}{-u^2-2u+1}\,du = \int \frac{1}{x}dx + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{(-u^2-2u+1)'}{-u^2-2u+1}\,du = \ln|x| + \ln c'$$

$\ln c' = c$

διότι $(-u^2-2u+1)' = -2u-2 = -2(1+u)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|-u^2-2u+1| = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow \ln|-u^2-2u+1|^{-\frac{1}{2}} = \ln(c'|x|)$$

$$\Rightarrow |-u^2-2u+1|^{-\frac{1}{2}} = (c'|x|)$$

$$\Rightarrow |-u^2-2u+1| = (c'|x|)^{-2}$$

Τελικά $u = \frac{y}{x}$, άρα

$$\left| -\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} + 1 \right| = \left(c'|x|\right)^{-2}$$

Δίνεται $y(1) = 1$

για $x = 1 \Rightarrow \left| -\frac{1^2}{1^2} - 2\frac{1}{1} + 1 \right| = \left(c'\cdot 1\right)^{-2}$

$$\Rightarrow \quad c' = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| -\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} + 1 \right| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|x|\right)^{-2},$$ όπου $y = y(x)$

η λύση του Π.Α.Τ.