Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών

2024 - 2025

2στ. Πλήρεις ή ακριβείς ή ολικού διαφορικού Διαφορικές Εξισώσεις
Exact Differential Equations

$$\boxed{\text{Γενική μορφή:} \quad M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0} \quad (1)$$

$M(x,y)$ και $N(x,y)$ γνωστές πραγματικές συναρτήσεις

- Η άγνωστη συνάρτηση της (1) είναι η $y(x)$

Παράδειγμα:

$$x^3 + 2xy + (x^2+y^2-1)\,y' = 0$$

$$M(x,y) = x^3+2xy, \quad N(x,y) = x^2+y^2-1$$

Ορισμός

Έστω Δ.Ε $M(x,y) + N(x,y)\,y' = 1$ (1)

Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται πλήρης, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $F(x,y)$: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$. Επί πλέον δε, η γενική λύση της (1), είναι $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Θεώρημα πληρότητας

Έστω η Δ.Ε (1) : $M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$ και οι συναρτήσεις $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ σύνολο ή σ' ένα υποσύνολό του.

Λέμε ότι η Δ.Ε (1) είναι πλήρης αν και μόνο αν ισχύει:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2), \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \text{ ή στο υποσύνολο}$$

Τρόπος επίλυσης πλήρων Δ.Ε.

Παράδειγμα: $x^2 + 2xy + (x^2+y)\, y' = 0 \quad (1)$

$M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$

Λύση:

1ο Βήμα

$M(x,y) = x^2 + 2xy, \quad N(x,y) = x^2 + y$

2ο Βήμα

Σύμφωνα με το Θεώρημα Πληρότητας πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(2) και σύμφωνα με τον ορισμό

$\exists\, F(x,y): \frac{\partial F}{\partial x} = M, \ \frac{\partial F}{\partial y} = N$

και η γενική λύση $F(x,y) = c, \ c\in\mathbb{R}$

$$M(x,y) = x^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \text{ και}$$

$$N(x,y) = x^2 + y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \text{, επομένως}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$, άρα η (1) είναι πλήρης

3ο βήμα

Εφ' όσον η (1) είναι πλήρης, τότε με τον ορισμό της πλήρους Δ.Ε

$$\exists\ F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = x^2 + 2xy \quad (2)$$

και ταυτόχρονα $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x^2 + y \quad (3)$

Εύρεση της $F(x,y)$ από (2) και (3)

$F(x,y)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 + 2xy \quad (3)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y \quad (4)$ $\Rightarrow$ $F(x,y) = \int (x^2 + 2xy)\,dx + c(y) \quad (3)$

$c(y)$ συνάρτηση y

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y \quad (4)$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + c(y)} \quad (3)$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y \quad (4)$ $\Rightarrow$ Παραγωγίζουμε την (3) ως προς y

και σε συνδυασμό με την (4) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x^3}{3}+x^2y+c(y)\right\}=x^2+y$$

$$\Rightarrow x^2+c'(y)=x^2+y \Rightarrow c'(y)=y$$

$$\Rightarrow c(y)=\int y\,dy+c_1,\ c_1\in\mathbb{R} \Rightarrow \boxed{c(y)=\frac{y^2}{2}+c_1}$$

Άρα $F(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$

και από τον ορισμό η γενική λύση της (1)

είναι $F(x,y)=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}+c_1=c$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}+c_1=c$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}=c'}\ (5)\quad c'=c-c_1\in\mathbb{R}$$

$y(x)$ άγνωστη, δεν χρειάζεται να επιλύσουμε ως προς $y(x)$, γιατί από την (5) η λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

2. $\frac{y}{x+y}\,dx + \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right)dy = 0 \quad (1)$

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \ , \quad x+y>0$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{y}{x+y} + \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right)y' = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

- Έλεγχος πληρότητας

Ελέγχουμε αν $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, όπου

$$M(x,y) = \frac{y}{x+y} \quad \text{και}$$

$$N(x,y) = \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x+y}\right) \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1(x+y) - y.1}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-y.1}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} = \frac{x}{(x+y)^2}$$

Άρα $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ (1) πλήρης

Εφ' όσον η (1) πλήρης, υπάρχει $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = \frac{y}{x+y} \quad (2) \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)\right) (3)$$

$$(2) \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{y}{x+y}\, dx + c(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = y \ln(x+y) + c(y) \quad (4), \quad x+y>0$$

$$(3),(4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(y \ln(x+y) + c(y)\right) =$$

$$\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \ln(x+y) + y \frac{1}{x+y} \cdot 1 + c'(y) =$$

$$\frac{y}{x+y} + \ln(x+y)$$

$$\Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Επομένως $F(x,y) = y\ln(x+y) + c_1$

και η γενική λύση $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y\ln(x+y) = c - c_1 = c' \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{y\ln(x+y) = c'}$

3. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\left(x - \frac{y}{x^2}\right) + \left(y + \frac{1}{x}\right)y' = 0, (1),\ x \neq 0,\ y(1) = 3$$

λύση

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} \\ N(x,y) = y + \dfrac{1}{x} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Ελέγχουμε αν $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, που ισχύει

άρα η Δ.Ε (1) είναι πλήρης, οπότε θα βρούμε

την $F(x,y)$: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$,

διότι έτσι θα πάρουμε τη γενική λύση

της (1), $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y + \frac{1}{x} \quad (3)$$

Ολοκληρώνουμε την (3) ως προς y

$$\Rightarrow F(x,y) = \int \left(y + \frac{1}{x}\right) dy + c(x)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x} y + c(x) \quad (4)$$

Παραγωγίζουμε την (4) ως προς x, επομένως από τις (2) και (4)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{x} y + c(x)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + c'(x) = x - \frac{y}{x^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Άρα $\boxed{F(x,y)=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{x}y+\frac{x^2}{2}+c_1}$

Ξέρουμε ότι η γενική λύση είναι $F(x,y)=c$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{1}{x}y+\frac{x^2}{2}+c_1=c = c-c_1=c_2$$

$c_2\in R$

Μας δίνεται $y(1)=3$

$$\Rightarrow \frac{3^2}{2}+1\cdot 3+\frac{1^2}{2}=c_2 \Rightarrow c_2=8$$

$\Rightarrow$ λύση του Π.Α.Τ. $\boxed{\frac{y^2}{2}+\frac{1}{x}y+\frac{x^2}{2}=8}$