Μη πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών
2024 - 2025

Σ. Κυρίτση- Γιάλλουρου

Μη πλήρεις Δ. Ε. 1ης τάξης- Ολοκληρώνοντες Παράγοντες

Ορισμένες φορές συναντούμε Δ.Ε. που δεν είναι πλήρεις, αλλά μπορούν να μετατραπούν σε πλήρεις, αν πολλαπλασιασπούν κατά μέλη, με την κατάλληλη συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται συνήθως $\mu(x,y)$ γενικά.

Οι συναρτήσεις $\mu(x,y)$ ονομάζονται ολοκληρώνοντες παράγοντες ή πολλαπλασιαστές Euler.

Πώς όμως βρίσκουμε αυτές τις συναρτήσεις;

Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1η Περίπτωση

Να μας δίνεται ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας της Δ.Ε.

2η Περίπτωση

Να βρίσκουμε εμείς αυτούς τους παράγοντες εφαρμόζοντας ανάλογη μεθοδολογία.

Η 2η Περίπτωση δεν θα μας απασχολήσει.

Παράδειγμα:

Δίνεται η Δ.Ε: $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$ (1).

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\mu(x,y)=x$ είναι ένας ολοκληρώνοντας της εξίσωσης (1) και στη συνέχεια να λυθεί η Δ.Ε.

Λύση:

$$(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0 \quad (1)$$

Ερώτηση: Είναι η (1) πλήρης;

Δεδομένου ότι από την (1)
$M(x,y)=3xy+y^2$ και $N(x,y)=x^2+xy$,
ελέγχουμε την πληρότητα της Δ.Ε (1),
δηλαδή αν ισχύει

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Είναι: $\frac{\partial M}{\partial y}=3x+2y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2x+y$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$ η (1) δεν είναι πλήρης

Τώρα, για να αποδείξουμε ότι η $\mu(x,y)=x$ είναι ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την $(1)\cdot\mu(x,y)$, $\mu(x,y)=\mu(x)=x$

$$(1)\cdot\mu(x) \Longrightarrow x\,(3x^2y+xy^2)+x\,(x^2+xy)\,y'=0$$

$$\Longrightarrow (3x^2y+xy^2) + (x^3+x^2y)\,y'=0 \quad (2)$$

και η Δ.Ε. (1) είναι ισοδύναμη της (2).

- $M_1(x,y) = 3x^2y+xy^2$
- $N_1(x,y) = x^3+x^2y$

Ελέγχουμε τώρα την πληρότητα της (2), αν

$\dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x}$, όπου τώρα

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = 3x^2+2xy \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x} = 3x^2+2xy \end{array}\right| \Longrightarrow \dfrac{\partial M_1}{\partial y} = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} \Rightarrow \text{η } (2) \text{ είναι πλήρης}$$

και επομένως $\mu(x,y)=\mu(x)=x$ είναι ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας της (1).

Εφ' όσον η (2) είναι πλήρης, σύμφωνα με τον ορισμό της πληρότητας, υπάρχει $F(x,y)$:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = M_1(x,y)$ και $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N_1(x,y)$ και η

γενική λύση της (2) είναι $F(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$.

Γενικά αν έχουμε $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$, η οποία είναι πλήρης $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$, τότε $\exists$ $F(x,y)$: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ και

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ και $F(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$ η γενική λύση της Δ.Ε. Για την απόδειξη, αντικαθιστούμε τις M και N με $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ και

$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ στην Δ.Ε $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$,

οπότε έχουμε: $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{d}{dx}\Big(F(x,y)\Big) = 0 \Rightarrow F(x,y) = c$, $c\in\mathbb{R}$

διότι γνωρίζουμε

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x,y)\Big)=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'$$

Επιστρέφουμε στη λύση της Δ.Ε. (2) και είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+xy^2 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^3+x^2y \quad (4)$$

Επιλέγουμε να ολοκληρώσουμε την (4),

$$(4)\Rightarrow F(x,y)=\int (x^3+x^2y)\,dy+c(x)$$

$$\Rightarrow F(x,y)=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+c(x) \quad (5)$$

$$(3),(5)\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left\{x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+c(x)\right\}=3x^2y+xy^2$$

$$\Rightarrow 3x^2y+xy^2+c'(x)=3x^2y+xy^2$$

$$\Rightarrow c'(x)=0\Rightarrow c(x)=c_1,\quad c_1\in\mathbb{R}$$

Επομένως $F(x,y)=x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+c_1$ $\Rightarrow$

και η γενική λύση $F(x,y)=c$

$$x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+c_1=c\ ,\quad c_1, c\in\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2=c'}\ (6),\ \text{όπου } c-c_1=c'\in\mathbb{R}$$

$y(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση. Η γενική λύση (6) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

Ασκήσεις πλήρων και μη πλήρων

Διαφορικών Εξισώσεων

1. Δίνεται η Δ.Ε:

$$(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2\cos x) y' = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί η γενική λύση

Λύση:

$M(x,y) = e^x \sin y - 2y \sin x$

$N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x$

Ελέγχουμε αν η (1) είναι πλήρης,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= e^x \cos y - 2\sin x \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^x \cos y - 2\sin x \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

οπότε η (1) πλήρης, άρα

$$\exists\ F(x,y) : \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = e^x \sin y - 2y \sin x \quad (2)$$

και $$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = e^x \cos y + 2\cos x \quad (3)$$

Ακόμη, η γενική λύση της (1) είναι $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \sin y - 2y\sin x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^x \cos y + 2\cos x \quad (3),$$ ολοκληρώνουμε την (3),

$$(3) \Rightarrow F(x,y) = \int (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy + c(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = e^x \sin y + 2y\cos x + c(x)} \quad (4)$$

$$(2),(4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left\{e^x \sin y + 2y\cos x + c(x)\right\} = e^x \sin y - 2y\sin x$$

$$\Rightarrow e^x \sin y - 2y\sin x + c'(x) = e^x \sin y - 2y\sin x$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{c(x) = c_1}, \; c_1 \in \mathbb{R}.$$ Επομένως

$$F(x,y) = e^x \sin y + 2y\cos x + c_1$$ και

γενική λύση της (1) $F(x,y) = c \Rightarrow (c \in \mathbb{R})$

$$\boxed{e^x \sin y + 2y\cos x = c - c_1 = c'}, \quad c' \in \mathbb{R}$$

όπου $y(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση, η δε λύση της (1) δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικού τιμών (Π.Α.Τ.):

$$(y-1)^2 + \left(xy - 2x + \frac{x-1}{y}\right)y' = 0 \quad (1), \; y \neq 0$$

$\boxed{\text{αν έχει ολοκληρώνοντα παράγοντα}}$

$\mu(x,y) = \dfrac{y}{(y-1)^2}$, $y \neq 1$. Ισχύει δε $y(1) = 2$.

Λύση:

Παίρνουμε την Δ.Ε (1), όπου

$M(x,y) = (y-1)^2$

$N(x,y) = xy - 2x + \dfrac{x-1}{y}$, ελέγχουμε πληρότητα

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2(y-1)$

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = y - 2 + \dfrac{1}{y}$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, επομένως η (1) δεν είναι πλήρης

$\mu(x,y) = \mu(y) = \dfrac{y}{(y-1)^2}$, $y \neq 1$, ένας ολοκληρώνοντας παράγοντας

Πολλαπλασιάζουμε την (1)$\cdot \mu(y)$ και παίρνουμε

$$\frac{y}{(y-1)^2}\cdot (y-1)^2 + \frac{y}{(y-1)^2}\cdot\left(xy-2x+\frac{x-1}{y}\right)y'=0$$

$$\Rightarrow y + \frac{xy^2-2xy+x-1}{(y-1)^2}y'=0 \qquad (2)$$

$M_1(x,y)=y$ και $N_1(x,y)=\dfrac{xy^2-2xy+x-1}{(y-1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_1}{\partial y}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial x}=\frac{y^2-2y+1}{(y-1)^2}=\frac{(y-1)^2}{(y-1)^2}=1,\ y\neq 1$$

οπότε $\dfrac{\partial M_1}{\partial y}=\dfrac{\partial N_1}{\partial x}$, άρα η (2) είναι πλήρης

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό πλήρους Δ.Ε. $\exists\ F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M_1(x,y)=y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N_1(x,y)=\frac{xy^2-2xy+x-1}{(y-1)^2} \qquad (4)$$

και $F(x,y)=c,\ c\in\mathbb{R}$ η γενική λύση

Ολοκληρώνουμε την (3) $\Rightarrow F(x,y)=\int y\,dx + c(y)$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = xy + c(y)} \quad (5)$$

$$(4),(5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left\{xy + c(y)\right\} = \frac{xy^2-2xy+x-1}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow x + c'(y) = \frac{xy^2-2xy+x-1}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = \frac{xy^2-2xy+x-1-x(y-1)^2}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = \frac{xy^2-2xy+x-1-xy^2+2xy-x}{(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow c'(y) = -\frac{1}{(y-1)^2} \Rightarrow c(y) = -\int (y-1)^{-2}dy + c_1$$

$$c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow c(y) = -\frac{(y-1)^{-2+1}}{-2+1} + c_1 \Rightarrow \boxed{c(y) = \frac{1}{y-1} + c_1}$$

η δε $F(x,y)$ γίνεται:

$$F(x,y) = xy + \frac{1}{y-1} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \; y \neq 1$$

Γενική λύση της $(2) \Leftrightarrow (1)$ είναι

$$F(x,y) = c \Rightarrow \boxed{xy + \frac{1}{y-1} = c'}, \text{ όπου } c - c_1 = c'$$

$$c' \in \mathbb{R}$$

Μας δίνεται όμως $y(1) = 2$, άρα

$$1 \cdot 2 + \frac{1}{2-1} = c' \Rightarrow c' = 3.$$

Τελικά, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\boxed{xy + \frac{1}{y-1} = 3} \quad \text{και } y \neq 1$$