Εισαγωγή στις Συναρτήσεις

Διδάσκοντες: Ε. Παπαγεωργίου – Δ. Κουλουμπού

Η Έννοια Της Συνάρτησης

Συχνά οι τιμές μιας μεταβλητής εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης

- Η θερμοκρασία στην οποία το νερό βράζει εξαρτάται από το υψόμετρο
- Το ποσό κατά το οποίο θα αυξηθούν οι καταθέσεις σε ένα έτος (ο τόκος) εξαρτάται από το επιτόκιο της τράπεζας

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές, η τιμή μιας μεταβλητής ποσότητας εξαρτάται από την τιμή μιας άλλης.

Ορισμός:

Ορίζουμε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ μία απεικόνιση από το πεδίο ορισμού (domain) $D_f = A$ στο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε για κάθε $x \in A$ υπάρχει μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$.

Το σύνολο $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : f(x) = y \text{ για κάποιο } x \in A\}$ λέγεται σύνολο ή πεδίο τιμών της συνάρτησης f

Γραφική παράσταση ή **γράφιμα** μιας συνάρτησης ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων $M(x, f(x))$ με $x \in A$

Τιμή Συνάρτησης: Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν για κάποιο $\alpha \in A$ ισχύει $f(\alpha) = \beta$. Τότε λέμε ότι για $x = \alpha$ η τιμή της f είναι ίση με β.

Ρίζα Συνάρτησης: Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Ένας αριθμός $\rho \in A$ ονομάζεται ρίζα της συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(\rho) = 0$.

Παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση:
$f(x) = 1 - \sqrt{x-1}$
Να βρεθούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, το σύνολο τιμών της, η τιμή της f για $x = 5$ καθώς και οι ρίζες της.

Παρατήρηση: Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε το γράφιμα τους. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση Dirichlet που ορίζεδται ως εξής:

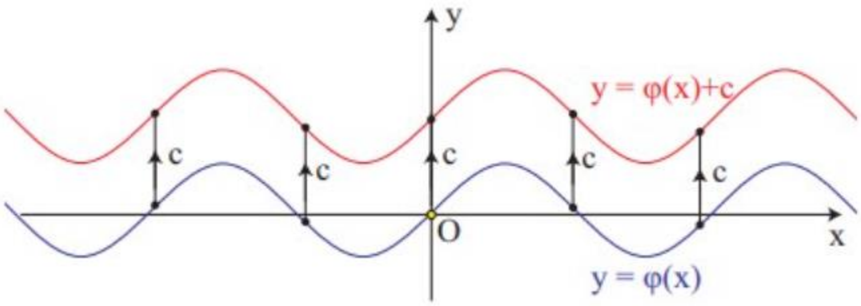
$$f(x)=\begin{cases}1, \alpha\nu\ x\in\mathbb{Q}\\ 0, \alpha\nu\ x\in\mathbb{Q}^{c}\end{cases}$$

Μετατόπιση Γραφικής Παράστασης

Κατακόρυφη Μετατόπιση Γραφήματος

Προκειμένου να μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y=f(x)$ προς τα πάνω προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y=f(x)$
Για μετατόπιση προς τα κάτω προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο δεξιό μέλος του τύπου $y=f(x)$

Γενικά:
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+c$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά c προς τα πάνω αν $c>0$, ή με κατακόρυφη μετατόπιση κατά c προς τα κάτω αν $c<0$



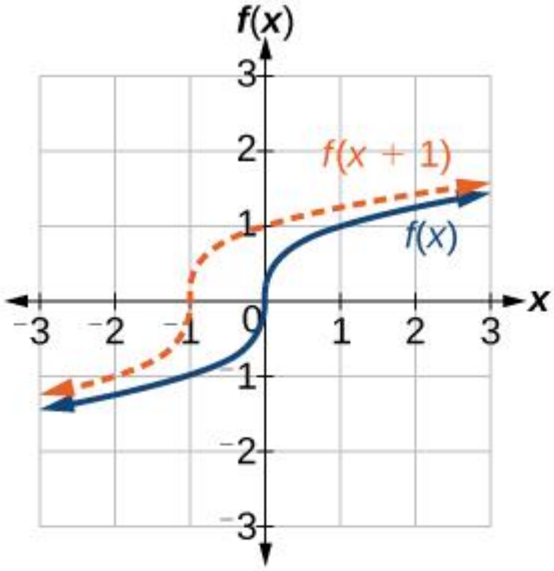
Οριζόντια Μετατόπιση Γραφήματος

Προκειμένου να μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y=f(x)$ προς τα αριστερά προσθέτουμε μια θετική σταθερά στο x στον τύπο $y=f(x)$
Για μετατόπιση προς τα δεξιά προσθέτουμε μια αρνητική σταθερά στο x στον τύπο $y=f(x)$

Γενικά:
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x+c)$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ με οριζόντια μετατόπιση κατά c προς τα αριστερά αν $c>0$, ή με οριζόντια μετατόπιση κατά c προς τα δεξιά αν $c<0$.

<u>Παράδειγμα:</u>

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x+1)$ σε σχέση με το γράφημα της συνάρτησης f



<u>Ειδικές Περιπτώσεις Συναρτήσεων</u>

<u>Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις (Συμμετρία)</u>

1. **(Άρτια Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **άρτια (even function) όταν**
   - Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και
   - $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

   Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$
2. **(Περιττή Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ καλείται **περιττή (odd function) όταν**
   - Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$ και
   - $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$

   Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

<u>Μονοτονία Συναρτήσεων:</u>

3. **(Γνησίως Άυξουσα Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται **γνησίως αύξουσα (strictly increasing)** στο σύνολο $B \subseteq A$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ αληθεύει $f(x_1) < f(x_2)$
4. **(Άυξουσα Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται **αύξουσα (increasing)** στο σύνολο $B \subseteq A$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ αληθεύει $f(x_1) \le f(x_2)$
5. **(Γνησίως Φθίνουσα Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται **γνησίως φθίνουσα (strictly decreasing)** στο σύνολο $B \subseteq A$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ αληθεύει $f(x_1) > f(x_2)$
6. **(Φθίνουσα Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται **φθίνουσα (decreasing)** στο σύνολο $B \subseteq A$ όταν για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $x_1 < x_2$ αληθεύει $f(x_1) \ge f(x_2)$

   Οι (γνησίως) αύξουσες και (γνησίως) φθίνουσες συναρτήσεις καλούνται από κοινού **(γνησίως) μονότονες**.

<u>Φραγμένες Συναρτήσεις:</u>

7. **(Άνω Φραγμένη Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται άνω φραγμένη (upper bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να αληθεύει $f(x) \le M$. Ο αριθμός M ονομάζεται άνω φράγμα (upper bound) της f

8. **(Κάτω Φραγμένη Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται κάτω φραγμένη (lower bounded), όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να αληθεύει $f(x) \ge m$. Ο αριθμός m ονομάζεται κάτω φράγμα (lower bound) της f

9. **(Φραγμένη Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση που είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη καλείται φραγμένη (bounded)

<u>Πρόταση</u>

Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει θετικός αριθμός θ έτσι ώστε $|f(x)| \le \theta$ για κάθε $x \in A$

<u>Περιοδικές Συναρτήσεις:</u>

10. **(Περιοδική Συνάρτηση)** Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ καλείται περιοδική (periodic) με περίοδο $p > 0$ όταν

    - Για κάθε $x \in A$ και $x + p \in A$ και
    - $f(x+p) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

Αμφιμονοσήμαντες Συναρτήσεις (1 – 1)

11. **(Συνάρτηση 1-1)** Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται αμφιμονοσήμαντη ή συνάρτηση 1-1 (injective or one-to-one) όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$

Παρατηρήσεις:

- Για μια συνάρτηση 1-1 ισχύει η ισοδυναμία $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Μι συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και 1-1. Δεν ισχύει κατ’ανάγκη το αντίστροφο (παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$)
- Κάθε συνάρτηση η οποία είναι είτε γνησίως μονότονη είτε 1-1 έχει το πολύ μία ρίζα.
- Για τον προσδιορισμό του είδου της μονοτονίας μιας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ πολλές φορές χρησιμοποιούμε τον **λόγο μεταβολής** της f στα τυχαία $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:
  $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
  (i) Αν $\lambda > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα
  (ii) Αν $\lambda \geq 0$, η f είναι αύξουσα
  (iii) Αν $\lambda < 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα
  (iv) Αν $\lambda \leq 0$, η f είναι φθίνουσα
  (v) Αν $\lambda = 0$, η f είναι σταθερή (Υπάρχει πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in A$)

Ακρότατα Συνάρτησης

Έστω Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 ολικό μέγιστο (global maximum) ή απλά μέγιστο (maximum). Το x_0 λέγεται θέση μεγίστου και η μέγιστη τιμή της f είναι το $f(x_0)$. Γράφουμε στην περίπτωση αυτή ότι
  $$\max f = f(x_0)$$
- Αν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0

ολικό ελάχιστο (global minimum) ή απλά ελάχιστο (minimum). Το x_0 λέγεται θέση ελαχίστου και η ελάχιστη τιμή της f είναι το $f(x_0)$

- Γράφουμε στην περίπτωση αυτή ότι
$$\min f = f(x_0)$$

- Το ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα (global extrema) της f
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο (local maximum) αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση τοπικού μεγίστου και το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο (local minimum) αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση τοπικού ελαχίστου και το $f(x_0)$ λέγεται τοπικό ελάχιστο της f

Παρατηρήσεις:

- Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο
- Μπορεί μια συνάρτηση άνω (κάτω) φραγμένη να μην έχει μέγιστο (ελάχιστο)

Οι έννοιες Supremum και Infimum

Supremum Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άνω φραγμένη. Το ελάχιστο άνω φράγμα της f το ονομάζουμε supremum και το συμβολίζουμε $\sup f$
Ειδικά έχουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άνω φραγμένη. Λέμε ότι $\sup f = M$ αν και μόνο αν

- $f(x) \le M$ για κάθε $x \in A$
- Για κάθε $a < M$ υπάρχει $x_0 \in A\ τέτοιο\ ώστε\ f(x_0) > a$

Αποδεικνύεται ότι κάθε άνω φραγμένη συνάρτηση έχει supremum το οποίο είναι μοναδικό.

Παρατήρηση

Αν μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει ολικό μέγιστο τότε $\sup f = \max f$

<u>Infimum Συνάρτησης</u>

Έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι άνω φραγμένη. Το μέγιστο κάτω φράγμα της f το ονομάζουμε infimum και το συμβολίζουμε $\inf f$
Ειδικά έχουμε τον παρακάτω ορισμό

<u>Ορισμός</u>

Έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κάτω φραγμένη. Λέμε ότι $\inf f = m$ αν και μόνο αν

- $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$
- Για κάθε $a > m$ υπάρχει $x_0 \in A \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) < a$

Αποδεικνύεται ότι κάθε κάτω φραγμένη συνάρτηση έχει Infimum το οποίο είναι μοναδικό.

<u>Παρατήρηση</u>

Αν μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ έχει ολικό ελάχιστο τότε $Inf\, f = \min f$

<u>Πράξεις Μεταξύ Συναρτήσεων:</u>

Έστω συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

(i) Ως άθροισμα $f + g$ των f, g την συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και ισχύει $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$.

(ii) Ως διαφορά $f - g$ των f, g την συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και ισχύει $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$.

(iii) Ως γινόμενο $f \cdot g$ των f, g την συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B$ και ισχύει $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$.

(iv) Ως πηλίκο $\frac{f}{g}$ των f, g την συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A \cap B \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$ και ισχύει $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A \cap B \cap \{x \in B \mid g(x) \neq 0\}$.

Σύνθεση Συναρτήσεων:

Ορισμός:

Έστω συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $g \circ f$ και την ονομάζουμε σύνθεση της g με την f τη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\Gamma = \{x \in A | \, f(x) \in B\}$ τέτοια ώστε $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in \Gamma$.

Αντίστροφη Συνάρτηση:

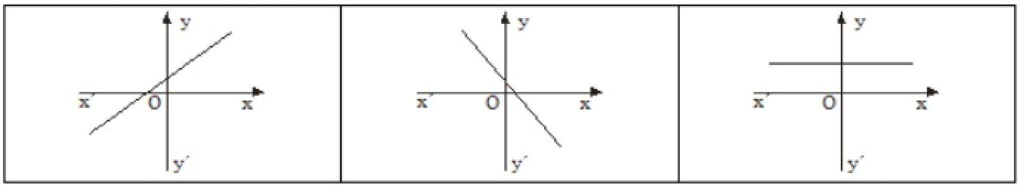
Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση (inverse function) της f και συμβολίζεται με f^{-1} και είναι η συνάρτηση που σε κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχεί το μοναδικό $x \in A$ με $f(x) = y$.
Επομένως αληθεύει η ισοδυναμία
$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
Αποδεικνύονται εύκολα οι επόμενες ιδιότητες:

- $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$
- $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$
- Η συνάρτηση f^{-1} είναι επίσης $1-1$ και έχει πεδίο ορισμού το πεδίο τιμών της f και πεδίο τιμών το πεδίο ορισμού της f.

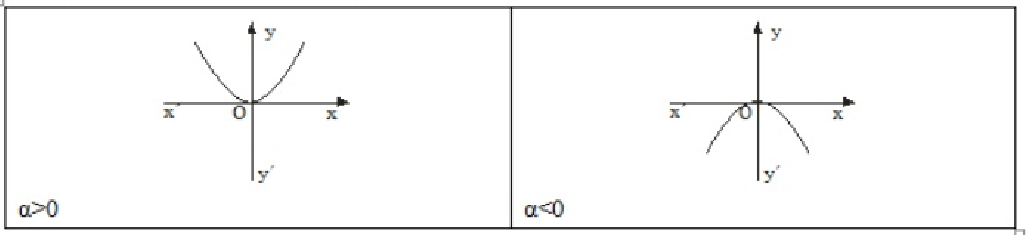
Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων

Θυμίζουμε στο σημείο αυτό τις γνωστές από το λύκειο συναρτήσεις και τις γραφικές Παραστάσεις τους.

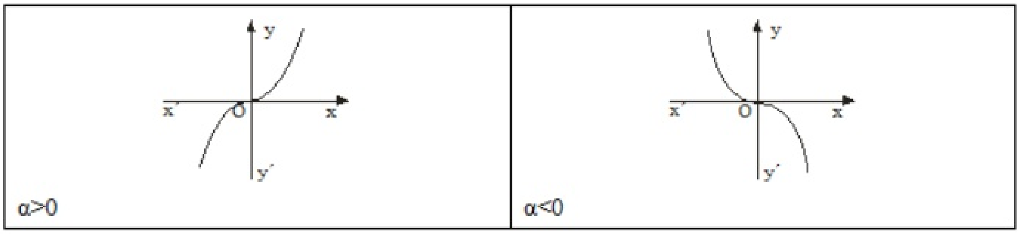
- *Πολυωνυμική συνάρτηση* $f(x)=\alpha x+\beta$



- *Πολυωνυμική συνάρτηση* $f(x)=\alpha x^2$

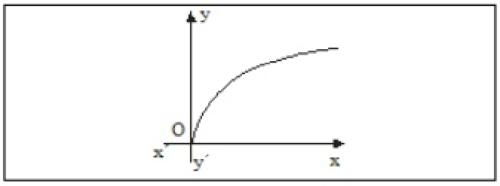


- *Πολυωνυμική συνάρτηση* $f(x)=\alpha x^3$

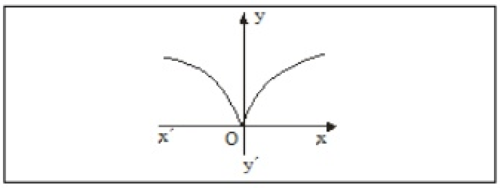


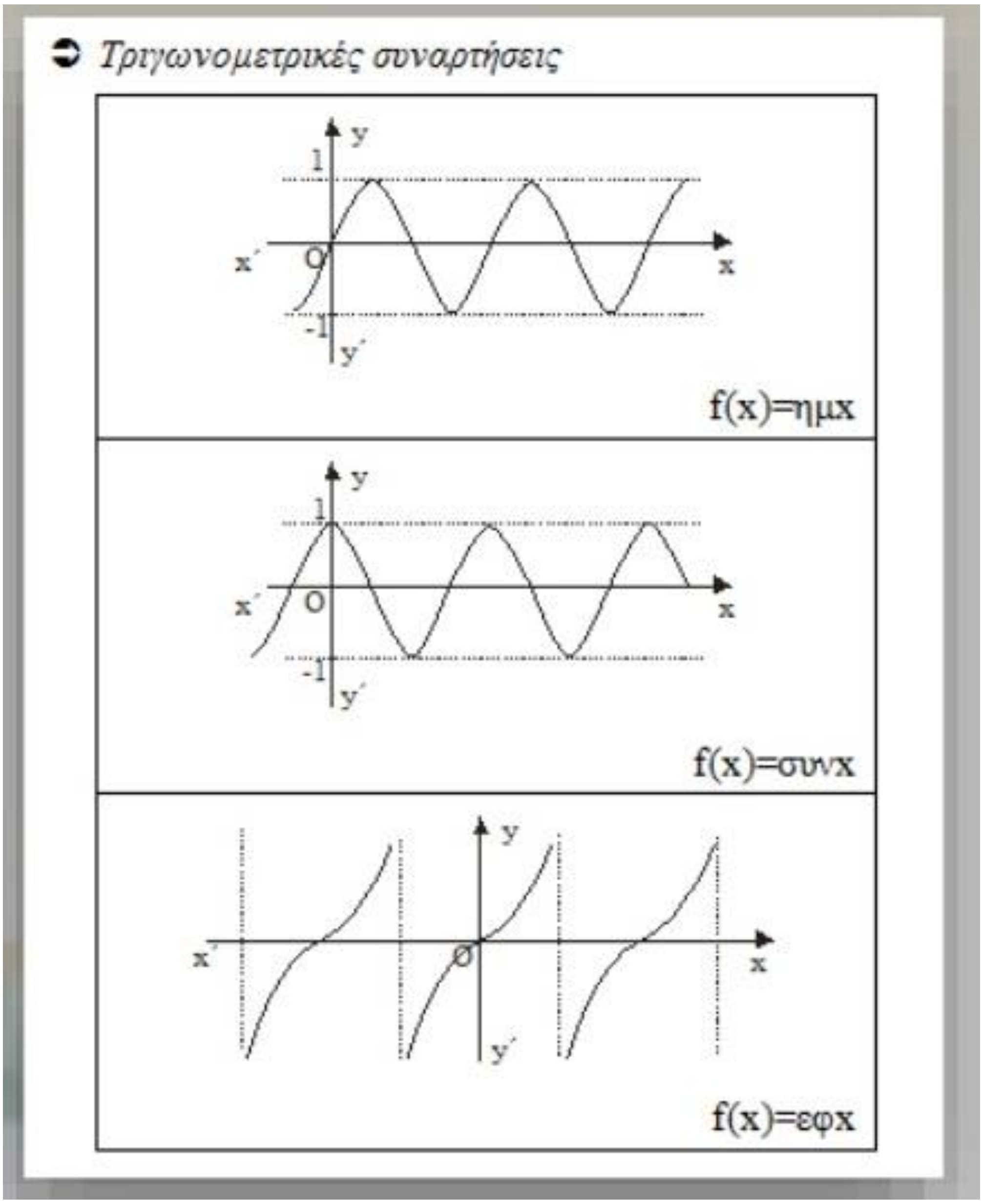
- *Ρητή συνάρτηση* $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$

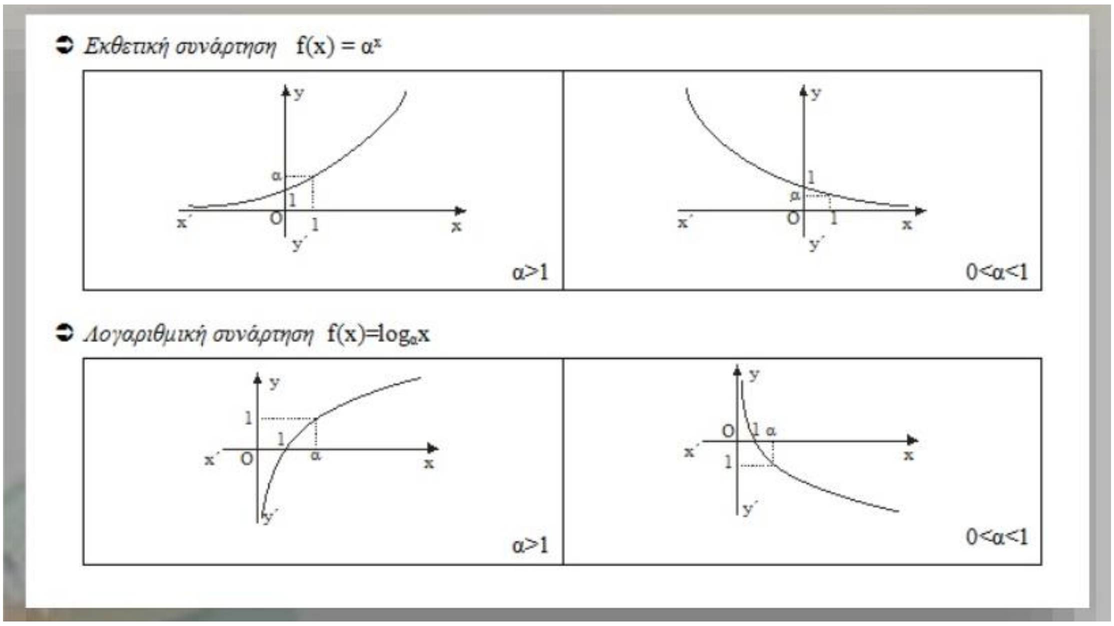
- *Η συνάρτηση* $f(x)=\sqrt{x}$



- *Η συνάρτηση* $f(x)=\sqrt{|x|}$




Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
y
1
x'
O
x
-1
y'
f(x)=ημx
y
1
x'
O
x
-1
y'
f(x)=συνx
y
x'
O
x
y'
f(x)=εφx


Εκθετική συνάρτηση f(x) = α^x
α>1
0<α<1
Λογαριθμική συνάρτηση f(x)=log_α x
α>1
0<α<1

Ασκήσεις:

1. Εκφράστε την περιφέρεια και την περίμετρο ισόπλευρου τριγώνου συναρτήσει του μήκους πλευράς x
2. Εκφράστε το μήκος πλευράς τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου του d. Κατόπιν εκφράστε το εμβαδόν του τετραγώνου συναρτήσει του μήκους της διαγωνίου
3. Ένα σημείο P βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Εκφράστε τις συντεταγμένες του P συναρτήσει της κλίσης της ευθείας που συνδέει το P με την αρχή των αξόνων.
4. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

$(\text{i})\ f(x) = 5x^2 + 3$

$(\text{ii})\ f(x) = 6x^3 - 3x$

$(\text{iii})\ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$(\text{iv})\ f(x) = \sqrt{x^3 - x}$

$(\text{v})\ f(x) = \dfrac{1}{|x| + 1}$

5. Να βρεθεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

   $(\text{i})\ f(x) = 5(x+1)^3 + 3$

   $(\text{ii})\ f(x) = 6x^3 + 3x + 1$

   $(\text{iii})\ f(x) = \sqrt{1 - x^5}$

   $(\text{iv})\ f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$

   $(\text{v})\ f(x) = \ln(5x+1) + 3x$

6. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ είναι περιττή και ορίζεται η αντίστροφη της τότε και η f^{-1} είναι περιττή
7. Αν $f(x) = x - 1$ και $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $f \circ f, f \circ g, g \circ f$
8. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να την βρείτε. Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων;
9. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$
10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και αμφιμονοσήμαντη
11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $|f(x_1) - f(x_2)| \le \kappa |x_1 - x_2|$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f(x) - \kappa x$ είναι φθίνουσα

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ και $g:[0,1] \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [0,1]$, ώστε να αληθεύει $|f(x) + g(x) - xy| \geq \frac{1}{4}$

13. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες να ικανοποιούν συγχρόνως τις σχέσεις
$(f \circ g)(x) = x^2$ και $(g \circ f)(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Να βρεθούν όλες οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα
$f\big(x + f(y)\big) = f(x + y) + 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

15. Έστω συνάρτηση $f: □ \to □$ τέτοια ώστε $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in □$. Να δείξετε ότι

(i) Η f είναι περιττή

(ii) $f(nx) = nf(x)$ για κάθε $n \in □, x \in □$

(iii) $f(kx) = kf(x)$ για κάθε $k \in □, x \in □$

(iv) $f\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}f(x)$ για κάθε $k \in □^*, x \in □$

(v) $f(px) = pf(x)$ για κάθε $p \in □, x \in □$

Βιβλιογραφία:

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Α Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης