Παράγωγος Συνάρτησης

Διδάσκοντες: Ε. Παπαγεωργίου – Δ. Κουλουμπού

Ορισμός:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ ένα σημείο συσσώρευσης του A.

Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0, όταν και μόνο όταν το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και λαμβάνει πεπερασμένη τιμή. Την τιμή αυτή την ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0 και την συμβολίζουμε με

$$f'(x_0) \text{ ή } \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \text{ ή } Df(x_0) \text{ ή } \dot{f}(x_0).$$

Ορίζουμε την **αριστερή παράγωγο** και τη **δεξιά παράγωγο** της f **στο σημείο** x_0 ως το αριστερό και το δεξιό πλευρικό όριο, αντίστοιχα,

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ και } f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αν η αριστερή (δεξιά) παράγωγος υπάρχει, η f καλείται **αριστερά (δεξιά) παραγωγίσιμη** στο x_0.

Παρατήρηση:

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ ένα σημείο συσσώρευσης του A.

Η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0, όταν και μόνο όταν το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και λαμβάνει πεπερασμένη τιμή.

Παράγωγος Συνάρτηση

Ορισμός:

Αν $D_{f'}$ είναι το σύνολο των $x \in D_f$ για τα οποία η f είναι παραγωγίσιμη τότε η συνάρτηση $f': D_{f'} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ λέγεται η πρώτη παράγωγο της f. Αναλογικά ορίζουμε τις συναρτήσεις $f'', \ldots f^{(n)}$ οι οποίες ονομάζονται δεύτερη παράγωγος της f, τρίτη παράγωγος της f κλπ.

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ καλείται **παραγωγίσιμη στο διάστημα** $I \subseteq A$ αν είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα εσωτερικά του σημεία, δεξιά παραγωγίσιμη στο αριστερό του άκρο και αριστερά παραγωγίσιμη στο δεξί του άκρο. Η συνάρτηση f' καλείται **παράγωγος της** f**.**

Θεώρημα (Παράγωγος και Συνέχεια)

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$.

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ τότε η f είναι και συνεχής στο $x_0 \in A$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $I \subseteq A$ τότε η f είναι και συνεχής στο $I \subseteq A$.
- Αν η f είναι αριστερά παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ τότε η f είναι και αριστερά συνεχής στο $x_0 \in A$.
- Αν η f είναι δεξιά παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ τότε η f είναι και δεξιά συνεχής στο $x_0 \in A$.
- Αν η f είναι αριστερά παραγωγίσιμη στο $I \subseteq A$ τότε η f είναι και αριστερά συνεχής στο $I \subseteq A$.
- Αν η f είναι δεξιά παραγωγίσιμη στο $I \subseteq A$ τότε η f είναι και δεξιά συνεχής στο $I \subseteq A$.

Κανόνες Παραγώγισης:

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Οι παραπάνω κανόνες επεκτείνονται και στην περίπτωση συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού τους.

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, τότε

$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$ Για κάθε $x \in \Delta$

<u>Θεώρημα (Κανόνας Αλυσίδας):</u>

Έστω συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ και $f : B \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $g(x_0) \in B$. Τότε η σύνθεση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

<u>Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης</u>

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $1-1$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ με $f'(x_0) \neq 0$, τότε είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} στο $f(x_0)$ με $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Σχετικά με την παράγωγο του αντίστροφου ημίτονου, έχουμε
$f(x) = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $f^{-1}(x) = \arcsin x,\ x \in [-1,1]$.

Έστω $y \in (-1,1)$, τότε $y = \sin x$ με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

2. Σχετικά με την παράγωγο του τόξου εφαπτομένης, έχουμε
$f(x)=\tan x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $f^{-1}(x)=\arctan x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω $y\in\mathbb{R}$, τότε $y=\tan x$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα $(\arctan y)'=\dfrac{1}{(\tan x)'}=\dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\dfrac{1}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+y^2}$.

<u>Παράγωγοι Βασικών Συναρτήσεων:</u>

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

Σε κατάλληλα διαστήματα και υπό κατάλληλες συνθήκες των σταθερών.

<u>Άλλες Μορφές Συναρτήσεων – Πεπλεγμένη Συνάρτηση</u>

Αν η συνάρτηση δεν δίνεται στην συνήθη μορφή $y = f(x)$, αλλά με μια εξίσωση $F(x, y) = 0$, τότε η συνάρτηση λέγεται πεπλεγμένη (implicit function)

Για παράδειγμα πεπλεγμένες είναι οι συναρτήσεις που ορίζονται με τους τύπους

$x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + 3xy + y^2 = x + y$

<u>Εύρεση Παραγώγων Πεπλεγμένων Συναρτήσεων</u>

Σε ορισμένες εφαρμογές, οι μεταβλητές σχετίζονται με μια εξίσωση παρά με μια συνάρτηση. Ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να ορίσουμε με τον ρυθμό μεταβολής σε σχέση με την άλλη με την τεχνική της πεπλεγμένης παραγώγισης.

Για να παραγωγίσουμε μία πεπλεγμένη συνάρτηση τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

Βήμα 1: Παραγωγίζουμε κάθε μέλος της εξίσωσης ως προς x, θεωρώντας την μεταβλητή y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x.

Βήμα 2: Συγκεντρώνουμε στο ένα μέλος της εξίσωσης όλους τους όρους που περιέχουν την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

Βήμα 3: Βγάζουμε κοινό παράγοντα την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

Βήμα 4: Λύνουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$.

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ της συνάρτησης που δίνεται από τον τύπο $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας ως προς x

Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 + y^2 - 5y - x^2\right) = \frac{d}{dx}(-4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 + 2y - 5\right) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

2. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $y(x)$ που δίνεται από την σχέση
$x^2+y^3+3xy^2-x\ln y=0$

<u>Λύση</u>

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^3+3xy^2-x\ln y\right)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$2x+3y^2y'+3y^2+6xyy'-\ln y-y'\frac{x}{y}=0$$

$$y'\left(3y^2+6xy-\frac{x}{y}\right)=-2x-3y^2+\ln y$$

$$y'=\frac{-2x-3y^2+\ln y}{3y^2+6xy-\dfrac{x}{y}}$$

$$y'=\frac{-2xy-3y^3+y\ln y}{3y^3+6xy^2-x}$$

3. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της πεπλεγμένης συνάρτησης
$y^3-x^2=4$

<u>Λύση</u>

$$\frac{d}{dx}\left(y^3-x^2\right)=\frac{d}{dx}(4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}-2x=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}$$

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης.
Για την δεύτερη τάξης παράγωγο έχουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\dfrac{2x}{3y^2}\right)}{dx}=\frac{2\cdot 3y^2-2x\cdot 6y\cdot\dfrac{dy}{dx}}{9y^4}=\frac{6y^2-2xy\cdot\dfrac{2x}{3y^2}}{9y^4}$$

Δηλαδή

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6y^3-8x^2}{9y^5}$$

<u>Κανόνες De L’Hospital</u>

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα, που είναι γνωστά ως κανόνες de l’ Hospital.

Θεώρημα (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,\ x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Θεώρημα (μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,\ x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>Εφαπτομένης καμπύλης:</u>

<u>Ορισμός:</u>

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Ορίζουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

- Αν το $\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός τοτε η συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι η $x=x_0$ (Η γραφική παράσταση της f δέχεται στο σημείο αυτό κατακόρυφη εφαπτομένη)
- Αν το όριο δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ δεν δέχεται εφαπτομένη.

<u>Γωνιακό Σημείο:</u>

Αν μία συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο $x=x_0$ και
- υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (πεπερασμένα ή άπειρα) , αλλά $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

  τότε το σημείο $M(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται **γωνιακό σημείο** της γραφικής παράστασης της f.

  Σε αυτό το σημείο η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται εφαπτομένη, αλλά οι δύο «ημιεφαπτομένες» (η δεξιά και η αριστερή ημιεφαπτομένη) σχηματίζουν γωνία $\varphi\in(0,\pi)$

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης του μοναδιαίου κύκλου στο σημείο του $A\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>Λύση:</u>

Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $x^2+y^2=1$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη ως προς x

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(1)$$
$$2x+2yy'=0$$
$$y'=-\frac{x}{y},\quad \text{για}\ \ y\neq 0$$

Άρα η κλίση της εφαπτομένης του μοναδιαίου κύκλου στο σημείο του $A\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η

$y+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ή

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$ στο σημείο της $M(0,1)$.

<u>Λύση:</u>

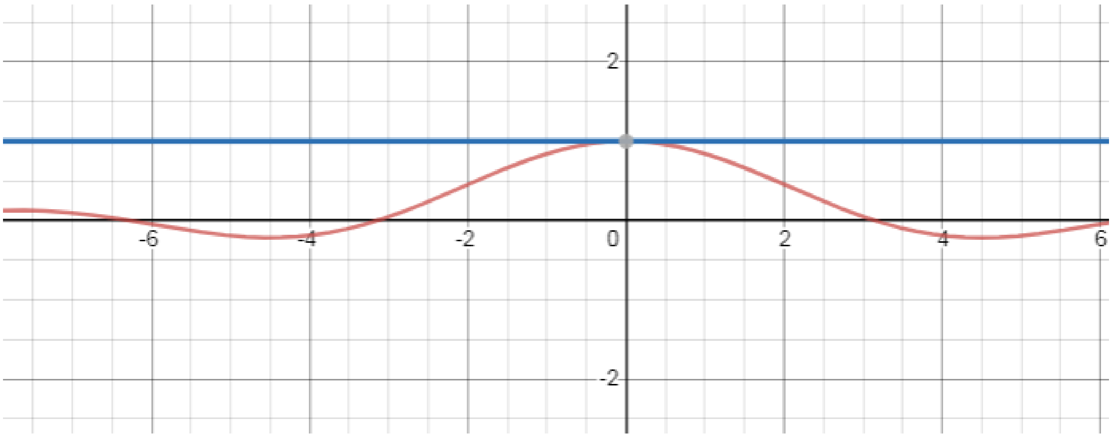
$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η

$y=1$ όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



3. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο σημείο της $A(1,0)$.

Λύση:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f δέχεται στο σημείο αυτό κατακόρυφη εφαπτομένη την

$$\varepsilon:\ \ x = 1$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}$ να αποδείξετε ότι το σημείο $P\big(1, f(1)\big)$ είναι γωνιακό σημείο της C_f και να βρείτε τις ημιεφαπτομένες της C_f στο σημείο αυτό.

Λύση:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$, δηλαδή $f'(1^-) = 1$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$, (η f δεν είναι δεξιά

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$)

Αφού η

- f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και

- Υπάρχουν τα $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ και $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ (πεπερασμένα ή άπειρα) αλλά $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

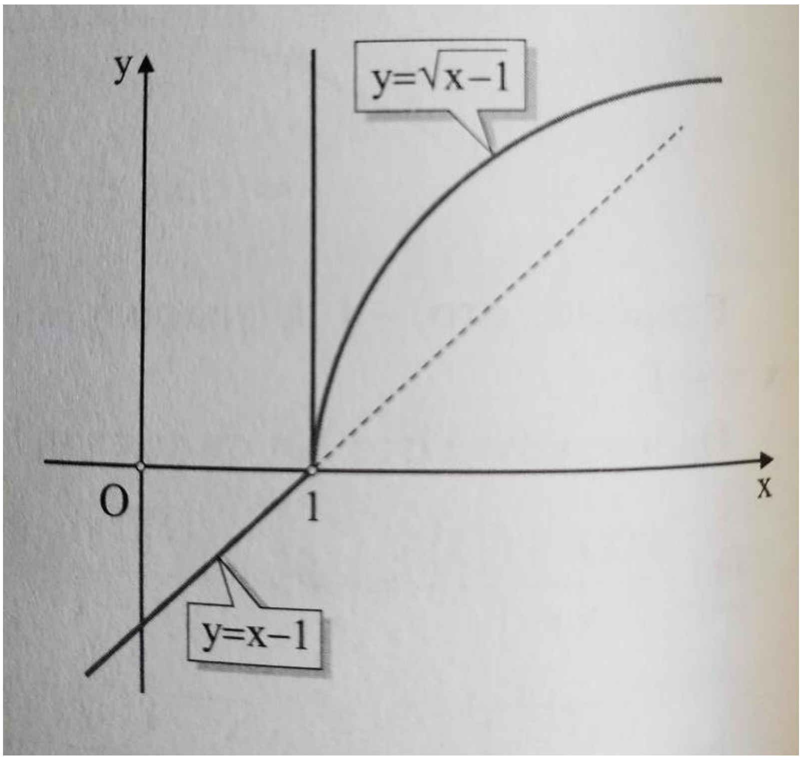
Έπεται ότι το σημείο $P(1,f(1))$ είναι γωνιακό σημείο της C_f.

Αριστερή εφαπτομένη: $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$. Άρα $\lambda=1$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$y-f(1)=\lambda(x-1)$, δηλαδή $y=x-1$

Δεξιά εφπατομένη: $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$, άρα η δεξιά εφαπτομένη στο $x_0=1$ είναι κατακόρυφη και η εξίσωση της είναι η $x=1$.

Τα παραπάνω φαίνονται και στο παρακάτω σχήμα.



<u>Μονοτονία Συνάρτησης:</u>

Κριτήρια Μονοτονίας:

Έστω $f:I \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I

1. Αν $f'(x) \geq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι αύξουσα στο I.
2. Αν $f'(x) > 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I.
3. Αν $f'(x) \leq 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι φθίνουσα στο I.
4. Αν $f'(x) < 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I.
5. Αν $f'(x) = 0$ στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι σταθερή στο I.

Ασκήσεις:

1. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0=0$$
2. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0=0$$
3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
$$f(x)=(3-2\sin x)^5$$
$$f(x)=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}$$
$$f(x)=\sqrt[3]{x^4}$$
$$f(x)=\sqrt{x}\sin x$$
$$f(x)=x^{\sin x}, x>0$$
$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}, \ x\neq \pm 1$$
4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
$$f(x)=\arctan(2x+1)$$
$$f(x)=\arcsin\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$
$$f(x)=\arcsin(\cos x), x\in(0,\pi)$$
$$f(x)=\arctan(\arcsin x), \ x\in(-1,1)$$

5. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων
$$x^2y+xy^2=6$$
$$x^2(x-y)^2=x^2-y^2$$
$$y^2cos\left(\frac{1}{y}\right)=2x+2y$$
$$x=tany$$
$$y^2=\frac{x-1}{x+1}$$
6. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dr}{d\theta}$των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων
$$\sqrt{\theta}+\sqrt{r}=1$$
$$r-2\sqrt{\theta}=\frac{3}{2}\theta^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{3}\theta^{\frac{3}{4}}$$

$$sin(r\theta) = \frac{1}{2}$$
$$cosr + cos\theta = r\theta$$

7. Να βρείτε τα δύο σημεία τομής της καμπύλης $x^2 + xy + y^2 = 7$ με τον άξονα $x'x$ και να δείξετε ότι η εφαπτομένες της καμπύλης στα σημεία αυτά είναι παράλληλες. Ποια είναι η κοινή κλίση των εφαπτομένων αυτών;

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι

(i) Αν η f είναι άρτια συνάρτηση τότε η f' είναι περιττή

(ii) Αν η f είναι περιττή συνάρτηση τότε η f' είναι άρτια

9. Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της συνάρτησης, να δείξετε ότι

$$\frac{x_1}{f'(x_1)} + \frac{x_2}{f'(x_2)} + \frac{x_3}{f'(x_3)} = 0$$

10. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της καμπύλης $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$

Στο σημείο $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

<u>Βιβλιογραφία:</u>

1. Θ. Ρασσιάς. Μαθηματική Ανάλυση Ι , Τεύχος Α Εκδόσεις Σαββάλας
2. Σ. Τουμπής, Σ. Γκιτζένης Λογισμός Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και βοηθήματα. HEALINK www.kallipos.gr
3. Tom M. Apostol One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Volume I. John Wiley & Sons
4. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης