Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως και εφαρμογή στις ταλαντώσεις

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@hna.gr

1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (γενικά)

Μία γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) δευτέρας τάξεως έχει την γενική μορφή:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

όπου $y=y(x)$ και όπου $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ δοσμένες συναρτήσεις. Στην ειδική περίπτωση που $f(x)=0$, η Δ.Ε. (1) λέγεται *ομογενής γραμμική*:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \tag{2}$$

Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, αν μία συνάρτηση $y_1(x)$ είναι λύση τής (2), το ίδιο θα ισχύει και για την συνάρτηση $y_2(x)=Cy_1(x)$ (C=σταθ.). Γενικότερα, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1: Αν $y_1(x)$, $y_2(x)$,… είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2), τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός της μορφής $y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ldots$ (όπου C_1 , C_2 ,… σταθερές) επίσης είναι λύση τής (2).

Απόδειξη: Αντικαθιστώντας το y στο αριστερό μέλος τής (2), και λαμβάνοντας υπόψη ότι καθένα εκ των $y_1(x)$, $y_2(x)$,… ικανοποιεί την (2), έχουμε:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = C_1\,(y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1) + C_2\,(y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2) + \ldots = 0\,.$$

Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο μη-μηδενικές λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2). [Προσέξτε ότι η μηδενική συνάρτηση $y(x)\equiv 0$ είναι *πάντα* λύση τής (2)!] Λέμε ότι οι y_1 , y_2 είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* αν η μία συνάρτηση δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Για να το θέσουμε πιο αυστηρά, γραμμική ανεξαρτησία των y_1 , y_2 σημαίνει ότι μία σχέση της μορφής $C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)\equiv 0$ μπορεί να ισχύει μόνο αν $C_1=C_2=0$.

Αν, λοιπόν, κατορθώσουμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ της ομογενούς Δ.Ε. (2) (με βεβαιότητα σας λέω ότι αποκλείεται να βρούμε τρίτη λύση που να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις δύο προηγούμενες!), τότε η *γενική λύση* τής (2) είναι ο γραμμικός συνδυασμός:

$$y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\,, \quad \text{όπου} \quad C_1\,, C_2 \ \text{σταθερές} \tag{3}$$

Θεώρημα 2: Η γενική λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε. (1) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης (3) της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (2) και *οποιασδήποτε ειδικής λύσης* τής (1).

Αναλυτικά: Έστω $y_1(x)$, $y_2(x)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2), και έστω $y_0(x)$ οποιαδήποτε ειδική λύση τής (1). Τότε, η γενική λύση τής (1) είναι:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x) \tag{4}$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε ειδική λύση τής (1) μπορεί να προκύψει από την (4) με κατάλληλη επιλογή των σταθερών C_1 και C_2 . Αφού, λοιπόν, η (4) περιέχει το σύνολο των ειδικών λύσεων της (1), είναι η γενική λύση τής (1).

2. Ομογενής γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

Έχει τη μορφή:

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0 \tag{5}$$

με σταθερά a και b. Υποθέτουμε ότι τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

Θεώρημα 3: Αν η μιγαδική συνάρτηση $y=u(x)+iv(x)$ ικανοποιεί την Δ.Ε. (5), τότε κάθε μία από τις πραγματικές συναρτήσεις $y_1=u(x)$ και $y_2=v(x)$ (πραγματικό και φανταστικό μέρος τής y) είναι λύση τής (5).

Απόδειξη: Θέτοντας $y=u+iv$ στην (5), βρίσκουμε:

$$(u'' + a\,u' + b\,u) + i\,(v'' + a\,v' + b\,v) = 0\ ,$$

που αληθεύει αν και μόνο αν $u'' + a\,u' + b\,u = 0$ και $v'' + a\,v' + b\,v = 0$.

Μέθοδος για την επίλυση της (5): Δοκιμάζουμε εκθετική λύση της μορφής $y=e^{kx}$. Τότε, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, και η (5) δίνει (απαλείφοντας το e^{kx}):

$$k^2 + ak + b = 0 \quad (\textit{χαρακτηριστική εξίσωση}) \tag{6}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Η (6) έχει πραγματικές ρίζες k_1 , k_2 , *διάφορες* μεταξύ τους. Με βάση τη σχέση (3), η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = C_1\,e^{k_1 x} + C_2\,e^{k_2 x} \tag{7}$$

2. Η (6) έχει πραγματικές και *ίσες* ρίζες: $k_1 = k_2 \equiv k$. Η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{kx} \tag{8}$$

3. Η (6) έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ (α, β πραγματικοί αριθμοί). Η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = e^{\alpha x}(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) \,.$$

Από τον τύπο του Euler, $e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i \sin\beta x$. Έτσι έχουμε:

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i\,(C_1 - C_2)\sin\beta x] \,.$$

Επειδή τα C_1 , C_2 είναι αυθαίρετες (γενικά μιγαδικές) σταθερές, μπορούμε να θέσουμε C_1 στη θέση τού C_1+C_2 και C_2 στη θέση τού $i\,(C_1 - C_2)$, έτσι ώστε, τελικά,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \tag{9}$$

Σε κάθε περίπτωση, η γενική λύση τής (5) περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές C_1 και C_2 . Παίρνουμε μία *ειδική* λύση όταν τα C_1 , C_2 πάρουν συγκεκριμένες τιμές. Για τον προσδιορισμό των C_1 , C_2 χρειαζόμαστε δύο *αρχικές συνθήκες*. Υπάρχουν δύο είδη αρχικών συνθηκών:

(α) Η τιμή τής $y(x)$ και της παραγώγου $y'(x)$ για $x=x_0$.

(β) Οι τιμές τής $y(x)$ για $x=x_1$ και $x=x_2$.

Παραδείγματα:

1. $y'' - y' - 2y = 0 \;\Rightarrow\; a=-1,\; b=-2$. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - k - 2 = 0$, με πραγματικές ρίζες $k_1=2$, $k_2=-1$. Η γενική λύση (7) είναι: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Έστω οι αρχικές συνθήκες: $y=2$ και $y'=-5$ όταν $x=0$. Τότε, $C_1=-1$, $C_2=3$ (δείξτε το!) και έχουμε την *ειδική* λύση: $y = -e^{2x} + 3\,e^{-x}$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0 \;\Rightarrow\; a=-6,\; b=9$. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - 6k + 9 = 0$, με πραγματικές και ίσες ρίζες $k_1=k_2=3$. Η γενική λύση (8) είναι: $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x}$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 0 \;\Rightarrow\; a=-4,\; b=13$. Η εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - 4k + 13 = 0$, με μιγαδικές συζυγείς ρίζες $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. Η γενική λύση (9) είναι (με $\alpha=2$, $\beta=3$): $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x)$. (Δείξτε ότι στο ίδιο, ουσιαστικά, αποτέλεσμα καταλήγουμε αν πάρουμε $\alpha=2$, $\beta=-3$.)

3. Αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Σε μία αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα x, η ολική δύναμη στο ταλαντούμενο σώμα (μάζας m) δίνεται από τη σχέση $F=-kx$ ($k>0$), όπου x η στιγμιαία μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας $x=0$. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F=ma$, όπου a η επιτάχυνση του σώματος: $a=d^2x/dt^2$. Έτσι έχουμε:

$$m\,d^2x/dt^2=-kx$$

ή, θέτοντας $k/m\equiv\omega^2$ (όπου υποθέτουμε ότι $\omega>0$),

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{10}$$

Η (10) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. της μορφής (5), με x στη θέση τού y και t στη θέση τού x (προσέξτε ότι λείπει ο όρος της πρώτης παραγώγου τού x). Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2+\omega^2=0$ (αναλυτικά: $k^2+0.k+\omega^2=0$), με μιγαδικές ρίζες $k=\pm i\omega$ (αναλυτικά: $k_1=0+i\omega$, $k_2=0-i\omega$). Η γενική λύση (9), με $\alpha=0$ και $\beta=\omega$, είναι:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{11}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι συντελεστές C_1 , C_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε η λύση (11) να έχει φυσική σημασία.

Η γενική λύση (11) μπορεί να γραφεί σε εναλλακτική μορφή, με τη βοήθεια του εξής μαθηματικού τεχνάσματος: Θέτουμε

$$C_1 = A\sin\varphi\,,\ \ C_2 = A\cos\varphi\ \ (A>0)\ \ \Leftrightarrow\ \ A=(C_1^2+C_2^2)^{1/2}\,,\ \ \tan\varphi=C_1/C_2\,.$$

Τότε,

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) \tag{12}$$

Το A καλείται *πλάτος* της ταλάντωσης, ενώ η γωνία φ καλείται *αρχική φάση* της ταλάντωσης (η τιμή της *φάσης* $\omega t+\varphi$ τη χρονική στιγμή $t=0$).

Προσέξτε ότι, αν είχαμε θέσει $C_1=A\cos\varphi$, $C_2=-A\sin\varphi$, θα παίρναμε την *ισοδύναμη* γενική λύση

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{13}$$

Πράγματι, η (13) προκύπτει άμεσα από την (12) αν αντικαταστήσουμε το (ούτως ή άλλως αυθαίρετο) φ με $\varphi+(\pi/2)$.

4. Ταλάντωση με απόσβεση

Στην ταλάντωση με απόσβεση, εκτός από τη δύναμη $-kx$, αντίθετη στην απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, επενεργεί και μία δύναμη τριβής $-\lambda v= -\lambda dx/dt$ ($\lambda>0$), αντίθετη στην ταχύτητα v. Η ολική δύναμη στο σώμα είναι $F= -kx-\lambda dx/dt$. Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $F=m\, d^2x/dt^2$. Έτσι,

$$m\, d^2x/dt^2 = -kx - \lambda\, dx/dt\ .$$

Θέτουμε:

$k/m \equiv \omega_0^2$ (ω_0= *φυσική συχνότητα ταλάντωσης* χωρίς απόσβεση), $\lambda/m \equiv 2\gamma$,

οπότε έχουμε:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0 \tag{14}$$

Η (14) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται:

$$k^2 + 2\gamma k + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\gamma \pm (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}\ .$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(Α) Μεγάλη απόσβεση $\Leftrightarrow$ $\gamma > \omega_0$. Έχουμε δύο πραγματικές λύσεις:

$$k_1 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}, \quad k_2 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}\ .$$

Η γενική λύση τής (14) είναι της μορφής (7):

$$x = C_1\, e^{k_1 t} + C_2\, e^{k_2 t} \tag{15}$$

Ας κάνουμε την υπόθεση ότι $C_1>0$ και $C_2>0$. Δοθέντος ότι $k_1<0$ και $k_2<0$ (γιατί;), βλέπουμε ότι $x>0$ για κάθε χρονική στιγμή t, και $x\to 0$ καθώς $t\to\infty$. Δηλαδή, καθώς αυξάνει το t, το κινητό προσεγγίζει τη θέση ισορροπίας $x=0$, χωρίς να ταλαντώνεται γύρω από αυτήν (απεριοδική κίνηση).

(Β) Οριακή (κρίσιμη) απόσβεση $\Leftrightarrow$ $\gamma = \omega_0$. Τότε, $k_1 = k_2 = -\gamma$, και η γενική λύση τής (14) είναι της μορφής (8):

$$x = (C_1 + C_2\, t)\, e^{kt} = (C_1 + C_2\, t)\, e^{-\gamma t} \tag{16}$$

Αν υποθέσουμε ότι $C_1>0$ και $C_2>0$, βλέπουμε και πάλι ότι $x>0$ για κάθε χρονική στιγμή t, και $x\to 0$ καθώς $t\to\infty$. (Για τον όρο $t\, e^{-\gamma t} = t / e^{\gamma t}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Δείξτε το!) Έτσι, και στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ταλάντωση.

(Γ) Μικρή απόσβεση $\Leftrightarrow$ $\gamma < \omega_0$. Έχουμε δύο μιγαδικές συζυγείς λύσεις:

$$k = -\gamma \pm i\, \omega_1 \quad \text{όπου} \quad \omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}\ .$$

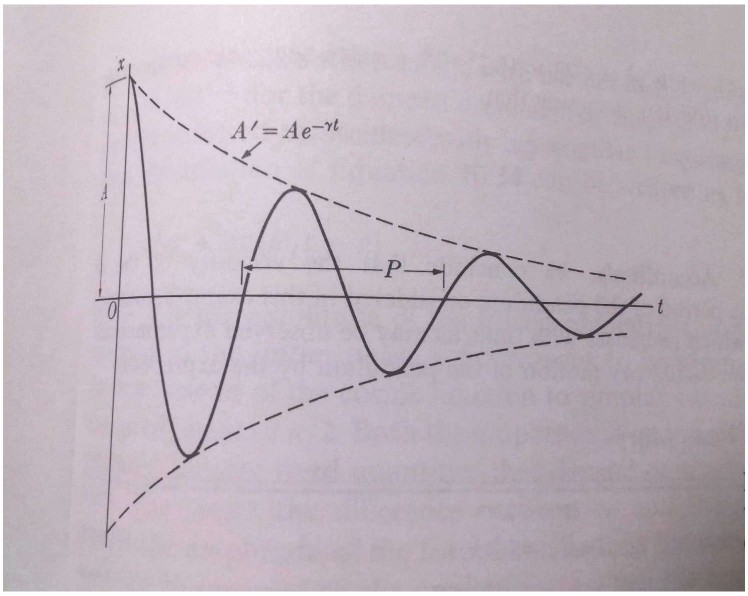
Η γενική λύση θα είναι στη μορφή (9), με $\alpha = -\gamma$ και $\beta = \omega_1$:

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)\ ,$$

ή, θέτοντας $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$ (A>0),

$$x = A\,e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (17)$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος $Ae^{-\gamma t}$ της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο (φθίνουσα ταλάντωση).



5. Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, εκτός από τη δύναμη $-kx$ και την τριβή $-\lambda v$= $-\lambda dx/dt$, δρα και μία εξωτερική δύναμη της μορφής

$$F(t) = F_0 \sin\omega_f t\ .$$

Η ολική δύναμη στο σώμα είναι $F= -kx-\lambda dx/dt+F_0 \sin\omega_f t$. Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $F=m\,d^2x/dt^2$. Έτσι,

$$m\,d^2x/dt^2 = -kx - \lambda\,dx/dt + F_0 \sin\omega_f t\ .$$

Θέτουμε:

$$k/m \equiv \omega_0^2\ (\omega_0 = \textit{φυσική συχνότητα}),\quad \lambda/m \equiv 2\gamma,\quad F_0/m \equiv f_0\ ,$$

οπότε έχουμε:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega_f t \qquad (18)$$

Η (18) είναι μη-ομογενής γραμμική Δ.Ε. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2 (Παρ. 1), η γενική λύση της είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς,

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0\ ,$$

και μίας οποιασδήποτε *ειδικής* λύσης τής (18). Η γενική λύση της ομογενούς για μικρή απόσβεση ($\gamma < \omega_0$) δίνεται από τη σχέση (17):

$$x = A_1\, e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{όπου} \quad \omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}\,.$$

Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε, μία ειδική λύση τής (18) είναι η εξής:

$$x = A \sin(\omega_f t + \varphi) \tag{19}$$

όπου

$$A = \frac{f_0}{\left[\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^{\,2}\right]^{1/2}} \quad \text{και} \quad \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}} \tag{20}$$

Η γενική λύση τής (18) είναι

$$x = A_1\, e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_f t + \varphi) \tag{21}$$

με *αυθαίρετα* A_1 , φ_1 . Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος τής (21) μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, και γρήγορα μηδενίζεται. Έτσι, αυτό που απομένει είναι η ειδική λύση (19):

$$x = A \sin(\omega_f t + \varphi)\,.$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι συνάρτηση της συχνότητας ω_f, σύμφωνα με την (20). Το A γίνεται μέγιστο όταν ο παρονομαστής στην πρώτη σχέση (20) γίνεται ελάχιστος. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\omega_f = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \equiv \omega_A \tag{22}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\omega_f \equiv \omega$, για ευκολία, και θεωρούμε την συνάρτηση

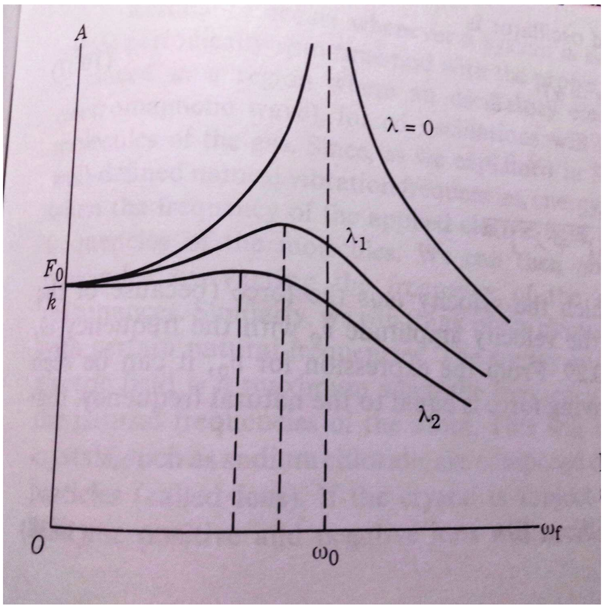
$$\Psi(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\,,$$

έτσι ώστε $A = f_0 / [\Psi(\omega)]^{1/2}$. Έχουμε (δείξτε το):

$$\Psi'(\omega) = 0 \;\; \text{για} \;\; \omega = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} = \omega_A \quad \text{και} \quad \Psi''(\omega_A) = 8\omega_A^2 > 0\,.$$

Άρα, για μικρή απόσβεση ($2\gamma^2 < \omega_0^2$), η συνάρτηση $\Psi(\omega)$ γίνεται *ελάχιστη*, και το πλάτος A γίνεται *μέγιστο*, όταν $\omega_f = \omega_A$. Λέμε τότε ότι έχουμε *συντονισμό πλάτους*.

Στο πιο κάτω σχήμα, $\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow \gamma_1 < \gamma_2$. Αυτό σημαίνει ότι, βάσει της (22), $\omega_{A,1} > \omega_{A,2}$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση ($\lambda = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$), η (22) δίνει $\omega_A = \omega_0$. Με άλλα λόγια, στην εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, και *μόνο σε αυτή την περίπτωση*, το πλάτος γίνεται μέγιστο (στην πραγματικότητα, άπειρο) όταν η συχνότητα ω_f της εξωτερικής δύναμης γίνει ίση με την φυσική συχνότητα ω_0 .



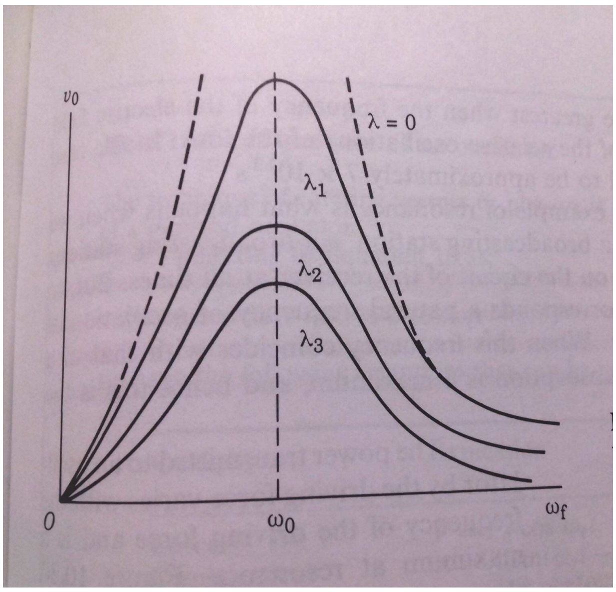
Παραγωγίζοντας την (19) βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος:

$$v = dx/dt = \omega_f A \cos(\omega_f t + \varphi) \equiv v_0 \cos(\omega_f t + \varphi)$$

όπου, λόγω της (20),

$$v_0 = \omega_f A = \frac{f_0}{\left[\left(1 - \frac{\omega_0^{\,2}}{\omega_f^{\,2}}\right)^2 + 4\gamma^2\right]^{1/2}} \;.$$

Το v_0 γίνεται μέγιστο όταν ο παρονομαστής στο κλάσμα είναι ελάχιστος, πράγμα που συμβαίνει όταν $\omega_f = \omega_0$. Η κινητική ενέργεια $mv_0^{\,2}/2$ είναι τότε μέγιστη, και λέμε ότι έχουμε *ενεργειακό συντονισμό*.



Προσέξτε ότι, σε αντίθεση με τον συντονισμό πλάτους, η συχνότητα ω_f για ενεργειακό συντονισμό δεν εξαρτάται από την απόσβεση λ αλλά *ισούται πάντα με την φυσική συχνότητα* ω_0 *του ταλαντωτή*. Στη συχνότητα αυτή, το έργο που προσφέρει η εξωτερική δύναμη $F(t)$ στον ταλαντωτή ανά μονάδα χρόνου είναι μέγιστο. Δηλαδή, ο ταλαντωτής απορροφά την μέγιστη δυνατή ισχύ από τον παράγοντα που ασκεί την δύναμη F.

Προσέξτε επίσης ότι, στην περίπτωση μηδενικής απόσβεσης ($\lambda=0 \Leftrightarrow \gamma=0$), το πλάτος ταχύτητας v_0 γίνεται *άπειρο* στη συχνότητα ενεργειακού συντονισμού $\omega_f=\omega_0$. Αυτό, βέβαια, είναι μία καθαρά θεωρητική υπόθεση, αφού είναι πρακτικά αδύνατο να μην ασκείται έστω και μία απειροελάχιστη δύναμη τριβής πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του!