Κ. Ι. Παπαχρήστου

Νευτώνεια Συστήματα σε Μία Διάσταση

- **Συντηρητικά Συστήματα**
- **Περιοδικές Κινήσεις**

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

2022

Συντηρητικά Νευτώνεια συστήματα σε μία διάσταση

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@hna.gr

1. Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης

Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας m, το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x κάτω από την επίδραση μιας *ολικής* δύναμης $F(x)$. Η θέση $x(t)$ του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου βρίσκεται με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξης που εκφράζει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\, d^2x/dt^2 = F(x) \qquad (1)$$

για δοσμένες αρχικές συνθήκες $x(t_0)=x_0$, $v(t_0)=v_0$, όπου $v=dx/dt$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

Ορίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $U(x)$ (*δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου)

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx' \;\Leftrightarrow\; F(x) = -dU/dx \qquad (2)$$

Η σχέση (1) τότε γράφεται

$$m\, d^2x/dt^2 + dU/dx = 0 \,.$$

Πολλαπλασιάζουμε με την ταχύτητα $v=dx/dt$, που παίζει εδώ τον ρόλο ολοκληρωτικού παράγοντα για την πιο πάνω διαφορική εξίσωση:

$$(dx/dt)(m\, d^2x/dt^2 + dU/dx) = 0 \,.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(dx/dt)(m\, d^2x/dt^2) = v\,(m\, dv/dt) = (d/dt)(m v^2/2)$$

και ότι $(dx/dt)(dU/dx) = dU/dt$, έχουμε: $(d/dt)(m v^2/2 + U) = 0 \;\Rightarrow$

$$m v^2/2 + U(x) \equiv T + U = E = \textit{σταθερό} \qquad (3)$$

(όπου T = κινητική ενέργεια), που εκφράζει την *διατήρηση της μηχανικής ενέργειας*.

Από τη σχέση (3) παίρνουμε μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$(dx/dt)^2 = (2/m)\,[E-U(x)] \;\Rightarrow\; dx/dt = \pm\left\{(2/m)\,[E-U(x)]\right\}^{1/2} .$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη $x=x_0$ για $t=t_0$, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\pm\, dx}{\left\{ \dfrac{2}{m}\left[E - U(x) \right] \right\}^{1/2}} = t - t_0 \qquad (4)$$

όπου επιλέγουμε θετικό πρόσημο για κίνηση στη *θετική* κατεύθυνση (v>0, x>x_0) και αρνητικό πρόσημο για κίνηση στην *αρνητική* κατεύθυνση (v<0, x<x_0).

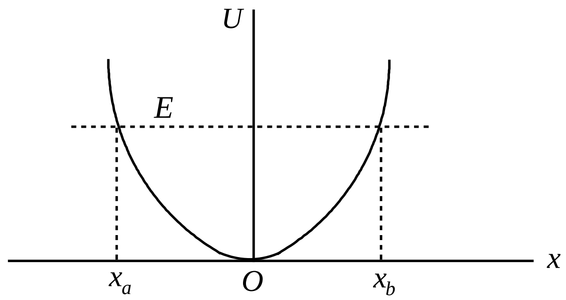
Η τιμή της σταθεράς E μπορεί να προσδιοριστεί εφαρμόζοντας τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στην (3):

$$E = m v_0^2/2 + U(x_0) \qquad (5)$$

(αν και, όπως θα δούμε, άλλες φυσικές συνθήκες μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθούν).

2. Η περίπτωση της περιοδικής κίνησης

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δυναμική ενέργεια $U(x)$ έχει τη μορφή ενός «πηγαδιού δυναμικού» (όπως στο Σχήμα 1) έτσι ώστε $U(0)=0$ και $U(x)>0$ για $x\neq 0$ (αυτή η γεωμετρική διάταξη είναι πάντα δυνατή λόγω της αυθαιρεσίας στον ορισμό του μηδενικού επιπέδου της δυναμικής ενέργειας). Γενικά μιλώντας, η καμπύλη που παριστά την $U(x)$ δεν είναι απαραίτητα συμμετρική ως προς τον άξονα x=0.



Σχήμα 1

Έστω E η ολική μηχανική ενέργεια του σωματιδίου. Επειδή $E=T+U$ όπου $T\geq 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $E \geq U(x)$ για κάθε φυσική κίνηση. Η κίνηση είναι έτσι οριοθετημένη ανάμεσα στα σημεία x_a και x_b του άξονα x, όπου τα σημεία αυτά είναι *σημεία αναστροφής* στα οποία το σωματίδιο σταματά στιγμιαία ($E=U \Rightarrow T=0 \Rightarrow v_a=v_b=0$). Ο χρόνος που απαιτείται για μία πλήρη διαδρομή από το x_a στο x_b και πίσω στο x_a βρίσκεται με χρήση της (4), επιλέγοντας το κατάλληλο πρόσημο για κάθε κατεύθυνση κίνησης:

$$P = \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\{\cdots\}^{1/2}} + \int_{x_b}^{x_a} \frac{-dx}{\{\cdots\}^{1/2}} \;\Rightarrow$$

$$P = 2\int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\left\{ \dfrac{2}{m}\left[E - U(x) \right] \right\}^{1/2}} \qquad (6)$$

Επειδή το P είναι σταθερό για δοσμένα x_a και x_b, η κίνηση είναι *περιοδική* με *περίοδο* P. Γενικά, η περίοδος εξαρτάται από τα όρια ολοκλήρωσης x_a και x_b και, άρα, από την ολική ενέργεια E του σωματιδίου. Μία *εξαίρεση* όπου το P *δεν* εξαρτάται από το E είναι η *απλή αρμονική κίνηση*, όπως θα δείξουμε τώρα.

3. Απλή αρμονική κίνηση

Στην απλή αρμονική κίνηση η δυναμική ενέργεια έχει την *παραβολική* μορφή $U(x)=kx^2/2$, που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x=0$ (βλ. Σχήμα 1). Η ολική δύναμη στο σωματίδιο είναι *δύναμη επαναφοράς* που το τραβά πάντα προς το σημείο ισορροπίας $x=0$:

$$F(x) = -\,dU/dx = -\,kx \tag{7}$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν *και* δυνάμεις τριβής, η ολική δύναμη θα περιέχει και έναν όρο που εξαρτάται από την ταχύτητα, της μορφής $-\lambda v= -\lambda dx/dt$. Το σύστημα, έτσι, δεν θα είναι πλέον συντηρητικό.

Σύμφωνα με το Σχήμα 1, η κίνηση λαμβάνει χώρα μεταξύ $x_a= -A$ και $x_b=A$, όπου $A\geq 0$ το *πλάτος* ταλάντωσης. Στα δύο ακραία σημεία η κινητική ενέργεια T μηδενίζεται στιγμιαία, ενώ η ολική ενέργεια $E=T+U$ (η οποία παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης) ισούται με τη δυναμική ενέργεια: $E=U(\pm A)=kA^2/2$. Επειδή η E έχει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία x, συμπεραίνουμε ότι

$$E = m v^2/2 + k x^2/2 = k A^2/2 \tag{8}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης βρίσκεται με χρήση της (6):

$$P = 2\int_{-A}^{A}\left\{\frac{2}{m}(E-kx^2/2)\right\}^{-1/2} dx\,.$$

Αντικαθιστώντας το E από την (8), βρίσκουμε:

$$P = \frac{2}{\omega}\int_{-A}^{A}\left(A^2-x^2\right)^{-1/2} dx$$

όπου θέσαμε $\omega=(k/m)^{1/2}$ (κυκλική συχνότητα). Θέτοντας $x/A=u$ και χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

βρίσκουμε τελικά:

$$P = 2\pi/\omega = 2\pi\,(m/k)^{1/2}\,.$$

Συμπέρασμα: Αν η δυναμική ενέργεια έχει την παραβολική μορφή $U(x)=kx^2/2$, η περίοδος P της κίνησης είναι ανεξάρτητη του πλάτους ταλάντωσης A, άρα ανεξάρτητη της ολικής ενέργειας $E=kA^2/2$.

Όμως, τι θα συνέβαινε αν η $U(x)$ ήταν όπως στο Σχήμα 1 αλλά *όχι* παραβολικής μορφής; Για παράδειγμα, έστω ότι η U είναι της μορφής $U(x)=\lambda x^4/4$, έτσι ώστε $F(x)= -dU/dx = -\lambda x^3$. Επειδή η $U(x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x=0$, η περιοδική κίνηση θα λαμβάνει χώρα μεταξύ των σημείων $x_a= -A$ και $x_b=A$, και η ολική ενέργεια θα ισούται με $E=U(\pm A)=\lambda A^4/4$. Η περίοδος θα είναι

$$P = 2\int_{-A}^{A}\left\{\frac{2}{m}(E-\lambda x^4/4)\right\}^{-1/2} dx = \frac{2}{\mu}\int_{-A}^{A}\left(A^4 - x^4\right)^{-1/2} dx = \frac{2}{\mu A}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

όπου θέσαμε $u=x/A$ και $\mu=(\lambda/2m)^{1/2}$. Προφανώς, η P εξαρτάται από το πλάτος A, άρα από την ολική ενέργεια E.

Επιστρέφοντας στην απλή αρμονική κίνηση, μπορούμε να βρούμε την εξίσωση κίνησης $x=x(t)$ χρησιμοποιώντας την (4) με $U(x)=kx^2/2$ και $E=kA^2/2$. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η κίνηση είναι στη θετική κατεύθυνση, έτσι ώστε $x>x_0$. Θέτοντας $\omega=(k/m)^{1/2}$, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x}\left(A^2 - x^2\right)^{-1/2} dx = \omega\,(t - t_0)\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int\left(A^2 - x^2\right)^{-1/2} dx = \arcsin(x/A) + C$$

και κάνοντας κατάλληλες αντικαταστάσεις για σταθερές ποσότητες που προκύπτουν, βρίσκουμε μία εξίσωση της μορφής[1]

$$\arcsin(x/A) = \omega t+\alpha \quad \Rightarrow \quad x = A\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

Για κίνηση στην αρνητική κατεύθυνση ($x<x_0$) επιλέγουμε το αρνητικό πρόσημο στην (4), οπότε

$$\int_{x_0}^{x}\left(A^2 - x^2\right)^{-1/2} dx = -\,\omega\,(t - t_0)\,.$$

Αυτό οδηγεί σε μία σχέση της μορφής[2]

$$\arcsin(x/A) = -\,\omega t+\beta \quad \Rightarrow \quad x = -A\sin(\omega t-\beta)\,.$$

Επειδή η σταθερά β είναι αυθαίρετη (αφού εξαρτάται από τις αυθαίρετες σταθερές x_0 και t_0) μπορούμε να θέσουμε $-\beta\equiv\pi+\alpha$, έτσι ώστε $x = A\sin(\omega t+\alpha)$, όπως πριν.

Συμπέρασμα: Η γενική λύση για την απλή αρμονική κίνηση είναι

$$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

Από φυσική άποψη, το A είναι το *πλάτος* ταλάντωσης, το ω είναι η *κυκλική συχνότητα*, ενώ το α είναι η *αρχική φάση* (η *φάση* $\omega t+\alpha$ τη χρονική στιγμή $t=0$).

---

[1] Αναλυτικά: $\alpha = \arcsin(x_0/A) - \omega t_0$.
[2] Αναλυτικά: $\beta = \arcsin(x_0/A) + \omega t_0$.

4. Κίνηση κάτω από σταθερή δύναμη βαρύτητας

Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω τη χρονική στιγμή $t_0=0$ από τη θέση $x=0$ του κατακόρυφου άξονα x, με αρχική ταχύτητα $v_0>0$ (επιλέγουμε την θετική κατεύθυνση του άξονα x προς τα πάνω). Η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας έχει κατεύθυνση προς τα κάτω. Έτσι, η επιτάχυνση του βλήματος είναι $a=dv/dt= -g$. Η ολική δύναμη στο βλήμα (αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα) και η αντίστοιχη δυναμική του ενέργεια δίνονται από τις σχέσεις

$$F(x) = ma = -mg \quad \Leftrightarrow \quad U(x) = mgx \quad [\text{θεωρούμε ότι } U(0)=0] \; .$$

Η σχέση (4) (με θετικό πρόσημο για κίνηση προς τα πάνω) γράφεται:

$$\int_0^x \frac{dx}{(E - mgx)^{1/2}} = (2/m)^{1/2}\, t \; .$$

Από την (5) και τις δοσμένες αρχικές συνθήκες έχουμε ότι $E=mv_0^2/2+U(0)=mv_0^2/2$ (αφού $U=0$ για $x_0=0$). Έτσι, η απαίτηση ότι $E-mgx\geq 0$ δίνει ότι $x\leq v_0^2/2g$. Από φυσική άποψη αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο θα φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος $h=v_0^2/2g$ όπου θα σταματήσει στιγμιαία, ενώ αμέσως μετά θα αρχίσει να κινείται προς τα κάτω (δηλαδή, στην αρνητική κατεύθυνση).

Με τον περιορισμό αυτό στις τιμές που μπορεί να πάρει το x, η πιο πάνω ολοκληρωτική σχέση δίνει

$$(E - mgx)^{1/2} = E^{1/2} - (m/2)^{1/2}\, g\, t \; .$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, βρίσκουμε:

$$x = (2E/m)^{1/2}\, t - g\, t^2/2 \; .$$

Όμως, $E = m\, v_0^2/2 \;\Rightarrow (2E/m)^{1/2} = v_0$ (αφού $v_0 > 0$). Έτσι, τελικά,

$$x = v_0\, t - g\, t^2/2$$

που είναι μία γνώριμη σχέση της κινηματικής!

5. Φασικές καμπύλες ενός συντηρητικού συστήματος

Ο νόμος του Νεύτωνα σε μία διάσταση: $md^2x/dt^2=F(x)$, που είναι διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης, μπορεί να γραφεί σαν σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$dx/dt = v\,, \qquad m\, dv/dt = F(x) \tag{9}$$

Διαιρώντας κατά μέλη ώστε να απαλείψουμε το dt, έχουμε:

$$m\, v\, dv = F(x)\, dx = -\, dU$$

όπου

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx' \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = -\, dU/dx \, .$$

Έτσι, $m\, v\, dv + dU = d\,(m\, v^2/2 + U\,) = 0 \;\Rightarrow$

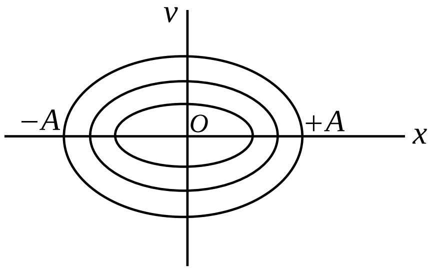
$$m\, v^2/2 + U(x) = E \equiv \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad (10)$$

Για κάθε τιμή της σταθεράς E (ολική ενέργεια) η εξίσωση (10) ορίζει μία καμπύλη σε έναν *φασικό χώρο* 2 διαστάσεων με συντεταγμένες (x, v). Η καμπύλη αυτή ονομάζεται *φασική καμπύλη*. Η τιμή της σταθεράς E προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, σύμφωνα με την (5). Επειδή η λύση του συστήματος (9) είναι μοναδική για δοσμένες αρχικές συνθήκες, *δύο φασικές καμπύλες δεν είναι δυνατό να τέμνονται* στον φασικό χώρο. Ας δούμε δύο παραδείγματα:

1. Απλή αρμονική κίνηση (βλ. Παρ. 3)

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εκφράζεται με τη σχέση $mv^2/2 + kx^2/2 = E \;\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{v^2}{2E/m} = 1 \qquad (\text{εξίσωση } \textit{έλλειψης})$$



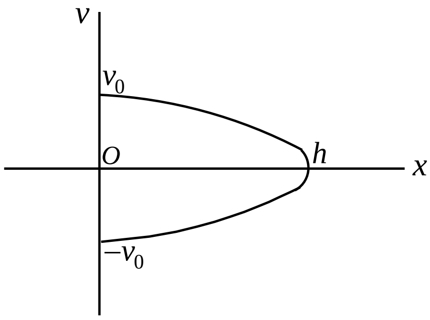
Σχήμα 2

Το Σχήμα 2 δείχνει μία οικογένεια από ελλείψεις στον φασικό χώρο, για διάφορες τιμές τού E. Προσέξτε ότι για v=0 $\Rightarrow x = \pm(2E/k)^{1/2} \equiv \pm A$, έτσι ώστε E=$kA^2/2$.

2. Κατακόρυφη κίνηση κάτω από σταθερή δύναμη βαρύτητας (βλ. Παρ. 4)

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εκφράζεται με τη σχέση $mv^2/2 + mgx = E \;\Rightarrow$

$$v^2 = (2/m)\,(E - mgx) \qquad (\text{εξίσωση } \textit{παραβολής})$$



Σχήμα 3

Επειδή $v^2 \geq 0$, θα πρέπει $E - mgx \geq 0 \Rightarrow x \leq E/mg$. Δηλαδή, το σωματίδιο θα φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος h=E/mg όπου θα σταματήσει στιγμιαία και στη συνέχεια θα κινηθεί στην αντίθετη κατεύθυνση. Στη θέση x=0 η ταχύτητα είναι $\pm v_0$ όπου v_0^2=$2E/m$ $\Rightarrow$ E=$mv_0^2/2$. Το μέγιστο ύψος, έτσι, είναι h=$v_0^2/2g$.

Εξάρτηση της περιόδου από το πλάτος ταλάντωσης σε περιοδική κίνηση σε μία διάσταση

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@hna.gr

Αποδεικνύουμε ότι η μόνη περιοδική κίνηση σε μία διάσταση όπου η περίοδος δεν εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης – άρα από την ολική ενέργεια του ταλαντούμενου σώματος – είναι η απλή αρμονική κίνηση.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας m, το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x κάτω από την επίδραση ολικής δύναμης $F(x)$. Η θέση $x(t)$ του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου βρίσκεται με ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξης που εκφράζει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\, d^2x/dt^2 = F(x) \tag{1}$$

για δοσμένες αρχικές συνθήκες $x(t_0)=x_0$ και $v(t_0)=v_0$, όπου $v=dx/dt$ η ταχύτητα του σωματιδίου.

Ο νόμος του Νεύτωνα (1) μπορεί να γραφεί σαν σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$dx/dt = v\,, \quad m\, dv/dt = F(x) \tag{2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη ώστε να απαλείψουμε το dt, έχουμε:

$$m\, v\, dv = F(x)\, dx = -\, dU$$

όπου $U(x)$ η *δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου:

$$U(x) = -\int_0^x F(x')dx' \;\Leftrightarrow\; F(x) = -\,dU/dx\,.$$

Έτσι, $m\, v\, dv + dU = d\,(m\, v^2/2 + U) = 0 \;\Rightarrow$

$$m\, v^2/2 + U(x) \equiv T + U = E = \textit{σταθερό} \tag{3}$$

(όπου $T=$ κινητική ενέργεια), που εκφράζει την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

Από τη σχέση (3) παίρνουμε μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης:

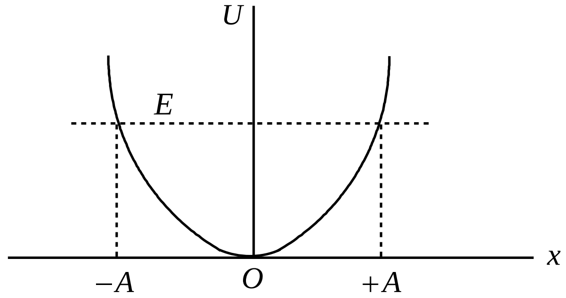
$$(dx/dt)^2 = (2/m)\,[E-U(x)] \;\Rightarrow\; dx/dt = \pm\left\{(2/m)\,[E-U(x)]\right\}^{1/2}.$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή και λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη $x=x_0$ για $t=t_0$, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\pm\, dx}{\left\{ \frac{2}{m} \left[E - U(x) \right] \right\}^{1/2}} = t - t_0 \tag{4}$$

όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε κίνηση στη *θετική* κατεύθυνση ($v>0$, $x>x_0$) ενώ το αρνητικό πρόσημο σε κίνηση στην *αρνητική* κατεύθυνση ($v<0$, $x<x_0$). Η τιμή της σταθεράς E στη σχέση (4) μπορεί να προσδιοριστεί εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στην (3): $E=mv_0^2/2+U(x_0)$, ή με βάση άλλες φυσικές θεωρήσεις που αφορούν το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δυναμική ενέργεια $U(x)$ έχει τη μορφή ενός «πηγαδιού δυναμικού» (όπως στο Σχήμα 1) όπου $U(0)=0$ και $U(x)>0$ για $x\neq 0$. Υποθέτουμε, επί πλέον, ότι η καμπύλη τής $U(x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση $U(x)$ είναι *άρτια*: $U(-x)=U(x)$.



Σχήμα 1

Έστω E η ολική μηχανική ενέργεια του σωματιδίου. Επειδή $E=T+U$ όπου $T\geq 0$, έπεται ότι $E\geq U(x)$ για κάθε φυσική κίνηση. Η κίνηση είναι, έτσι, οριοθετημένη και λαμβάνει χώρα ανάμεσα στα σημεία $-A$ και $+A$ του άξονα x. Τα σημεία αυτά είναι *σημεία αναστροφής* όπου το σωματίδιο σταματά στιγμιαία ($E=U \Rightarrow T=0 \Rightarrow v=0$). Τώρα, επειδή η ενέργεια E είναι σταθερή, η τιμή της σε όλα τα σημεία ισούται με την τιμή της στα σημεία αναστροφής. Δηλαδή,

$$E = U(\pm A) \tag{5}$$

Ο χρόνος για μία πλήρη διαδρομή από το $-A$ στο $+A$ και πίσω στο $-A$ βρίσκεται με χρήση της (4) και με κατάλληλη επιλογή προσήμου για κάθε κατεύθυνση κίνησης:

$$P = \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\{\ldots\}^{1/2}} + \int_{A}^{-A} \frac{-dx}{\{\ldots\}^{1/2}} \quad \Rightarrow$$

$$P = 2\int_{-A}^{A} \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} \left[E - U(x) \right] \right\}^{1/2}} = (2m)^{1/2} \int_{-A}^{A} \left[E - U(x) \right]^{-1/2} dx \tag{6}$$

Επειδή το P είναι σταθερό για δοσμένο A, η κίνηση είναι περιοδική γύρω από το σημείο $x=0$, με πλάτος A και περίοδο P. Από την (6) έπεται ότι η περίοδος P εξαρτάται από το A και, επομένως, από την ολική ενέργεια E του σωματιδίου, σύμφωνα με την

(5). Θα δείξουμε τώρα ότι η μοναδική εξαίρεση όπου το P *δεν* εξαρτάται από το A (άρα ούτε από το E) είναι η *απλή αρμονική κίνηση*.

Επειδή η συνάρτηση $U(x)$ είναι άρτια με $U(0)=0$, μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin, της μορφής

$$U(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l\, x^{2l} \tag{7}$$

όπου οι συντελεστές a_l δεν είναι απαραίτητα όλοι διάφοροι του μηδενός. Από την (5) έχουμε ότι

$$E = U(\pm A) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l\, A^{2l}$$

έτσι ώστε

$$E - U(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(A^{2l} - x^{2l} \right).$$

Η σχέση (6) τότε δίνει

$$P = \left(2m\right)^{1/2} \int_{-A}^{A} \left[\sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(A^{2l} - x^{2l} \right) \right]^{-1/2} dx\,.$$

Θέτοντας $x/A = u \;\Leftrightarrow\; x = Au$, έχουμε:

$$P = \left(2m\right)^{1/2} A \int_{-1}^{1} \left[\sum_{l=1}^{\infty} a_l\, A^{2l} \left(1 - u^{2l} \right) \right]^{-1/2} du \tag{8}$$

Όπως είναι φανερό, το P εξαρτάται από το A. Η μόνη εξαίρεση όπου το P είναι *ανεξάρτητο* από το A είναι η περίπτωση όπου ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη: $a_l = 0$ για $l \neq 1$. Δηλαδή, ο μόνος μη-μηδενικός συντελεστής a_l της σειράς (7) είναι το a_1. Θέτοντας $a_1 = k/2$, η δυναμική ενέργεια (7) ανάγεται τότε στην $U(x) = kx^2/2$, που αντιστοιχεί σε μία δύναμη επαναφοράς της μορφής

$$F(x) = -\,dU/dx = -\,kx \tag{9}$$

Η περιοδική κίνηση είναι *απλή αρμονική κίνηση* και η περίοδος (8) είναι

$$P = 2(m/k)^{1/2} \int_{-1}^{1} \left(1 - u^2\right)^{-1/2} du \;=\; 2(m/k)^{1/2} \left[\arcsin u\right]_{-1}^{1}$$
$$= 2(m/k)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \;\Rightarrow$$
$$P = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2} \equiv \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{όπου} \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2}.$$

Παρατηρούμε ότι η περίοδος στην ειδική αυτή περίπτωση είναι *ανεξάρτητη του πλάτους ταλάντωσης*, άρα και *ανεξάρτητη της ολικής μηχανικής ενέργειας*.

Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση κίνησης $x=x(t)$ για την απλή αρμονική κίνηση χρησιμοποιώντας την (4) με $U(x)=kx^2/2$ και $E=U(\pm A)=kA^2/2$. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η κίνηση γίνεται στην θετική κατεύθυνση, έτσι ώστε $x>x_0$. Θέτοντας $\omega=(k/m)^{1/2}$, έχουμε:

$$\int_{x_0}^{x}\left(A^2-x^2\right)^{-1/2}dx=\omega\,(t-t_0)\,.$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο

$$\int\left(A^2-x^2\right)^{-1/2}dx=\arcsin(x/A)+C$$

και κάνοντας κατάλληλες αντικαταστάσεις για τις σταθερές που προκύπτουν, βρίσκουμε μία εξίσωση της μορφής[1]

$$\arcsin(x/A)=\omega t+\alpha \quad\Rightarrow\quad x=A\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

Για κίνηση στην αρνητική κατεύθυνση ($x<x_0$) επιλέγουμε το αρνητικό πρόσημο στην (4), έτσι ώστε

$$\int_{x_0}^{x}\left(A^2-x^2\right)^{-1/2}dx=-\,\omega\,(t-t_0)\,.$$

Αυτό οδηγεί σε μια σχέση της μορφής[2]

$$\arcsin(x/A)=-\,\omega t+\beta \quad\Rightarrow\quad x=-A\sin(\omega t-\beta)\,.$$

Επειδή η σταθερά β είναι αυθαίρετη (αφού εξαρτάται από τις αυθαίρετες σταθερές x_0 και t_0) μπορούμε να θέσουμε $-\beta\equiv\pi+\alpha$, έτσι ώστε $x=A\sin(\omega t+\alpha)$, όπως πριν.

Συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) για περιοδική κίνηση που λαμβάνει χώρα κάτω από την επίδραση δύναμης της μορφής (9), είναι

$$x(t)=A\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

Από φυσική άποψη, το A παριστά το *πλάτος* της ταλάντωσης, το $\omega=(k/m)^{1/2}$ είναι η *κυκλική συχνότητα*, ενώ το α είναι η *αρχική φάση* (δηλαδή, η *φάση* $\omega t+\alpha$ τη χρονική στιγμή $t=0$).

[1] Αναλυτικά: $\alpha=\arcsin(x_0/A)-\omega t_0$.
[2] Αναλυτικά: $\beta=\arcsin(x_0/A)+\omega t_0$.

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως και εφαρμογή στις ταλαντώσεις

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@hna.gr

1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (γενικά)

Μία γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) δευτέρας τάξεως έχει την γενική μορφή:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x) \qquad (1)$$

όπου $y=y(x)$ και όπου $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ δοσμένες συναρτήσεις. Στην ειδική περίπτωση που $f(x)=0$, η Δ.Ε. (1) λέγεται *ομογενής γραμμική*:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, αν μία συνάρτηση $y_1(x)$ είναι λύση τής (2), το ίδιο θα ισχύει και για την συνάρτηση $y_2(x)=Cy_1(x)$ (C=σταθ.). Γενικότερα, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1: Αν $y_1(x)$, $y_2(x)$,… είναι λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2), τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός της μορφής $y=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ldots$ (όπου C_1 , C_2 ,… σταθερές) επίσης είναι λύση τής (2).

Απόδειξη: Αντικαθιστώντας το y στο αριστερό μέλος τής (2), και λαμβάνοντας υπόψη ότι καθένα εκ των $y_1(x)$, $y_2(x)$,… ικανοποιεί την (2), έχουμε:

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = C_1\,(y_1'' + a\,y_1' + b\,y_1) + C_2\,(y_2'' + a\,y_2' + b\,y_2) + \ldots = 0\ .$$

Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο μη-μηδενικές λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2). [Προσέξτε ότι η μηδενική συνάρτηση $y(x)\equiv 0$ είναι *πάντα* λύση τής (2)!] Λέμε ότι οι y_1 , y_2 είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* αν η μία συνάρτηση δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Για να το θέσουμε πιο αυστηρά, γραμμική ανεξαρτησία των y_1 , y_2 σημαίνει ότι μία σχέση της μορφής $C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)\equiv 0$ μπορεί να ισχύει μόνο αν $C_1=C_2=0$.

Αν, λοιπόν, κατορθώσουμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ της ομογενούς Δ.Ε. (2) (με βεβαιότητα σας λέω ότι αποκλείεται να βρούμε τρίτη λύση που να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις δύο προηγούμενες!), τότε η *γενική λύση* τής (2) είναι ο γραμμικός συνδυασμός:

$$y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\ , \quad \text{όπου} \quad C_1\,,\, C_2 \ \text{σταθερές} \qquad (3)$$

Θεώρημα 2: Η γενική λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε. (1) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης (3) της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (2) και *οποιασδήποτε ειδικής λύσης* τής (1).

Αναλυτικά: Έστω $y_1(x)$, $y_2(x)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς Δ.Ε. (2), και έστω $y_0(x)$ οποιαδήποτε ειδική λύση τής (1). Τότε, η γενική λύση τής (1) είναι:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x) \tag{4}$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε ειδική λύση τής (1) μπορεί να προκύψει από την (4) με κατάλληλη επιλογή των σταθερών C_1 και C_2 . Αφού, λοιπόν, η (4) περιέχει το σύνολο των ειδικών λύσεων της (1), είναι η γενική λύση τής (1).

2. Ομογενής γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

Έχει τη μορφή:

$$y'' + a y' + b y = 0 \tag{5}$$

με σταθερά a και b. Υποθέτουμε ότι τα a και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

Θεώρημα 3: Αν η μιγαδική συνάρτηση $y=u(x)+iv(x)$ ικανοποιεί την Δ.Ε. (5), τότε κάθε μία από τις πραγματικές συναρτήσεις $y_1=u(x)$ και $y_2=v(x)$ (πραγματικό και φανταστικό μέρος τής y) είναι λύση τής (5).

Απόδειξη: Θέτοντας $y=u+iv$ στην (5), βρίσκουμε:

$$(u'' + a u' + b u) + i\,(v'' + a v' + b v) = 0\ ,$$

που αληθεύει αν και μόνο αν $u'' + a u' + b u = 0$ και $v'' + a v' + b v = 0$.

Μέθοδος για την επίλυση της (5): Δοκιμάζουμε εκθετική λύση της μορφής $y=e^{kx}$. Τότε, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, και η (5) δίνει (απαλείφοντας το e^{kx}):

$$k^2 + ak + b = 0 \quad (\textit{χαρακτηριστική εξίσωση}) \tag{6}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Η (6) έχει πραγματικές ρίζες k_1 , k_2 , *διάφορες* μεταξύ τους. Με βάση τη σχέση (3), η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \tag{7}$$

2. Η (6) έχει πραγματικές και *ίσες* ρίζες: $k_1 = k_2 \equiv k$. Η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{kx} \tag{8}$$

3. Η (6) έχει ρίζες μιγαδικές συζυγείς: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ (α, β πραγματικοί αριθμοί). Η γενική λύση τής (5) είναι

$$y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x} = e^{\alpha x}\,(C_1\, e^{i\beta x} + C_2\, e^{-i\beta x})\ .$$

Από τον τύπο του Euler, $e^{\pm i\beta x} = \cos\beta x \pm i\sin\beta x$. Έτσι έχουμε:

$$y = e^{\alpha x}\,[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i\,(C_1 - C_2)\sin\beta x\,]\ .$$

Επειδή τα C_1 , C_2 είναι αυθαίρετες (γενικά μιγαδικές) σταθερές, μπορούμε να θέσουμε C_1 στη θέση τού C_1+C_2 και C_2 στη θέση τού $i\,(C_1 - C_2)$, έτσι ώστε, τελικά,

$$y = e^{\alpha x}\,(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \tag{9}$$

Σε κάθε περίπτωση, η γενική λύση τής (5) περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές C_1 και C_2 . Παίρνουμε μία *ειδική* λύση όταν τα C_1 , C_2 πάρουν συγκεκριμένες τιμές. Για τον προσδιορισμό των C_1 , C_2 χρειαζόμαστε δύο *αρχικές συνθήκες*. Υπάρχουν δύο είδη αρχικών συνθηκών:

(α) Η τιμή τής $y(x)$ και της παραγώγου $y'(x)$ για $x=x_0$.

(β) Οι τιμές τής $y(x)$ για $x=x_1$ και $x=x_2$.

Παραδείγματα:

1. $y'' - y' - 2y = 0 \;\Rightarrow\; a = -1,\; b = -2$. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - k - 2 = 0$, με πραγματικές ρίζες $k_1=2$, $k_2=-1$. Η γενική λύση (7) είναι: $y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}$. Έστω οι αρχικές συνθήκες: $y=2$ και $y'=-5$ όταν $x=0$. Τότε, $C_1=-1$, $C_2=3$ (δείξτε το!) και έχουμε την *ειδική* λύση: $y = -e^{2x} + 3\,e^{-x}$.

2. $y'' - 6y' + 9y = 0 \;\Rightarrow\; a = -6,\; b = 9$. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - 6k + 9 = 0$, με πραγματικές και ίσες ρίζες $k_1=k_2=3$. Η γενική λύση (8) είναι: $y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{3x}$.

3. $y'' - 4y' + 13y = 0 \;\Rightarrow\; a = -4,\; b = 13$. Η εξίσωση (6) γράφεται: $k^2 - 4k + 13 = 0$, με μιγαδικές συζυγείς ρίζες $k_1=2+3i$, $k_2=2-3i$. Η γενική λύση (9) είναι (με $\alpha=2$, $\beta=3$): $y = e^{2x}\,(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. (Δείξτε ότι στο ίδιο, ουσιαστικά, αποτέλεσμα καταλήγουμε αν πάρουμε $\alpha=2$, $\beta=-3$.)

3. Αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Σε μία αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα x, η ολική δύναμη στο ταλαντούμενο σώμα (μάζας m) δίνεται από τη σχέση $F=-kx$ (k>0), όπου x η στιγμιαία μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας x=0. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, $F=ma$, όπου a η επιτάχυνση του σώματος: $a=d^2x\,/\,dt^2$. Έτσι έχουμε:

$$m\,d^2x\,/\,dt^2=-kx$$

ή, θέτοντας $k/m\equiv\omega^2$ (όπου υποθέτουμε ότι ω>0),

$$x''+\omega^2x=0 \tag{10}$$

Η (10) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. της μορφής (5), με x στη θέση τού y και t στη θέση τού x (προσέξτε ότι λείπει ο όρος της πρώτης παραγώγου τού x). Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται: $k^2+\omega^2=0$ (αναλυτικά: $k^2+0.k+\omega^2=0$), με μιγαδικές ρίζες $k=\pm i\omega$ (αναλυτικά: $k_1=0+i\omega$, $k_2=0-i\omega$). Η γενική λύση (9), με α=0 και $\beta=\omega$, είναι:

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t \tag{11}$$

όπου υποθέτουμε ότι οι συντελεστές C_1 , C_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε η λύση (11) να έχει φυσική σημασία.

Η γενική λύση (11) μπορεί να γραφεί σε εναλλακτική μορφή, με τη βοήθεια του εξής μαθηματικού τεχνάσματος: Θέτουμε

$$C_1=A\sin\varphi\,,\;\; C_2=A\cos\varphi\;\; (A>0)\;\;\Leftrightarrow\;\; A=(C_1^{\,2}+C_2^{\,2})^{1/2}\,,\;\; \tan\varphi=C_1/C_2\,.$$

Τότε,

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{12}$$

Το A καλείται *πλάτος* της ταλάντωσης, ενώ η γωνία φ καλείται *αρχική φάση* της ταλάντωσης (η τιμή της *φάσης* $\omega t+\varphi$ τη χρονική στιγμή t=0).

Προσέξτε ότι, αν είχαμε θέσει $C_1=A\cos\varphi$, $C_2=-A\sin\varphi$, θα παίρναμε την *ισοδύναμη* γενική λύση

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{13}$$

Πράγματι, η (13) προκύπτει άμεσα από την (12) αν αντικαταστήσουμε το (ούτως ή άλλως αυθαίρετο) φ με $\varphi+(\pi/2)$.

4. Ταλάντωση με απόσβεση

Στην ταλάντωση με απόσβεση, εκτός από τη δύναμη $-kx$, αντίθετη στην απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, επενεργεί και μία δύναμη τριβής $-\lambda v= -\lambda dx/dt$ ($\lambda>0$), αντίθετη στην ταχύτητα v. Η ολική δύναμη στο σώμα είναι $F= -kx-\lambda dx/dt$. Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $F=m\, d^2x/dt^2$. Έτσι,

$$m\, d^2x/dt^2 = -kx - \lambda\, dx/dt\ .$$

Θέτουμε:

$$k/m \equiv \omega_0^2 \ (\omega_0 = \textit{φυσική συχνότητα ταλάντωσης} \text{ χωρίς απόσβεση}), \quad \lambda/m \equiv 2\gamma,$$

οπότε έχουμε:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0 \tag{14}$$

Η (14) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. Η χαρακτηριστική εξίσωση (6) γράφεται:

$$k^2 + 2\gamma k + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\gamma \pm (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}\ .$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(Α) Μεγάλη απόσβεση $\Leftrightarrow\ \gamma > \omega_0$. Έχουμε δύο πραγματικές λύσεις:

$$k_1 = -\gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}, \quad k_2 = -\gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}\ .$$

Η γενική λύση τής (14) είναι της μορφής (7):

$$x = C_1\, e^{k_1 t} + C_2\, e^{k_2 t} \tag{15}$$

Ας κάνουμε την υπόθεση ότι $C_1>0$ και $C_2>0$. Δοθέντος ότι $k_1<0$ και $k_2<0$ (γιατί;), βλέπουμε ότι $x>0$ για κάθε χρονική στιγμή t, και $x\to 0$ καθώς $t\to\infty$. Δηλαδή, καθώς αυξάνει το t, το κινητό προσεγγίζει τη θέση ισορροπίας $x=0$, χωρίς να ταλαντώνεται γύρω από αυτήν (απεριοδική κίνηση).

(Β) Οριακή (κρίσιμη) απόσβεση $\Leftrightarrow\ \gamma = \omega_0$. Τότε, $k_1= k_2 = -\gamma$, και η γενική λύση τής (14) είναι της μορφής (8):

$$x = (C_1 + C_2\, t)\, e^{kt} = (C_1 + C_2\, t)\, e^{-\gamma t} \tag{16}$$

Αν υποθέσουμε ότι $C_1>0$ και $C_2>0$, βλέπουμε και πάλι ότι $x>0$ για κάθε χρονική στιγμή t, και $x\to 0$ καθώς $t\to\infty$. (Για τον όρο $t\, e^{-\gamma t} = t\,/\,e^{\gamma t}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Δείξτε το!) Έτσι, και στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε ταλάντωση.

(Γ) Μικρή απόσβεση $\Leftrightarrow\ \gamma < \omega_0$. Έχουμε δύο μιγαδικές συζυγείς λύσεις:

$$k = -\gamma \pm i\,\omega_1 \quad \text{όπου} \quad \omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}\ .$$

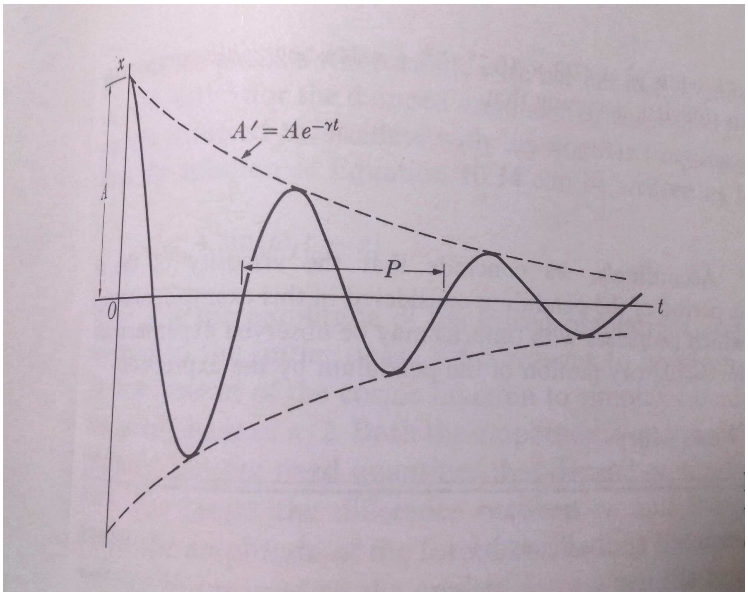
Η γενική λύση θα είναι στη μορφή (9), με $\alpha=-\gamma$ και $\beta=\omega_1$:

$$x = e^{-\gamma t}\,(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)\ ,$$

ή, θέτοντας $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$ (A>0),

$$x = A\, e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \qquad (17)$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος $Ae^{-\gamma t}$ της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο (φθίνουσα ταλάντωση).



5. Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, εκτός από τη δύναμη $-kx$ και την τριβή $-\lambda v= -\lambda dx/dt$, δρα και μία εξωτερική δύναμη της μορφής

$$F(t) = F_0 \sin \omega_f t\ .$$

Η ολική δύναμη στο σώμα είναι $F= -kx-\lambda dx/dt+F_0 \sin \omega_f t$. Από τον νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $F=m\, d^2x/dt^2$. Έτσι,

$$m\, d^2x/dt^2 = -kx - \lambda\, dx/dt + F_0 \sin \omega_f t\ .$$

Θέτουμε:

$$k/m \equiv \omega_0^2 \ (\omega_0 = \textit{φυσική συχνότητα}),\quad \lambda/m \equiv 2\gamma,\quad F_0/m \equiv f_0\ ,$$

οπότε έχουμε:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_f t \qquad (18)$$

Η (18) είναι μη-ομογενής γραμμική Δ.Ε. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2 (Παρ. 1), η γενική λύση της είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς,

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0\ ,$$

και μίας οποιασδήποτε *ειδικής* λύσης τής (18). Η γενική λύση της ομογενούς για μικρή απόσβεση ($\gamma < \omega_0$) δίνεται από τη σχέση (17):

$$x = A_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{όπου} \quad \omega_1 = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} .$$

Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε, μία ειδική λύση τής (18) είναι η εξής:

$$x = A \sin(\omega_f t + \varphi) \tag{19}$$

όπου

$$A = \frac{f_0}{\left[\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2\right]^{1/2}} \quad \text{και} \quad \tan\varphi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_f^2 - \omega_0^2} \tag{20}$$

Η γενική λύση τής (18) είναι

$$x = A_1 e^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_f t + \varphi) \tag{21}$$

με *αυθαίρετα* A_1 , φ_1 . Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος τής (21) μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, και γρήγορα μηδενίζεται. Έτσι, αυτό που απομένει είναι η ειδική λύση (19):

$$x = A \sin(\omega_f t + \varphi) .$$

Το πλάτος A της ταλάντωσης είναι συνάρτηση της συχνότητας ω_f, σύμφωνα με την (20). Το A γίνεται μέγιστο όταν ο παρονομαστής στην πρώτη σχέση (20) γίνεται ελάχιστος. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\omega_f = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} \equiv \omega_A \tag{22}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\omega_f \equiv \omega$, για ευκολία, και θεωρούμε την συνάρτηση

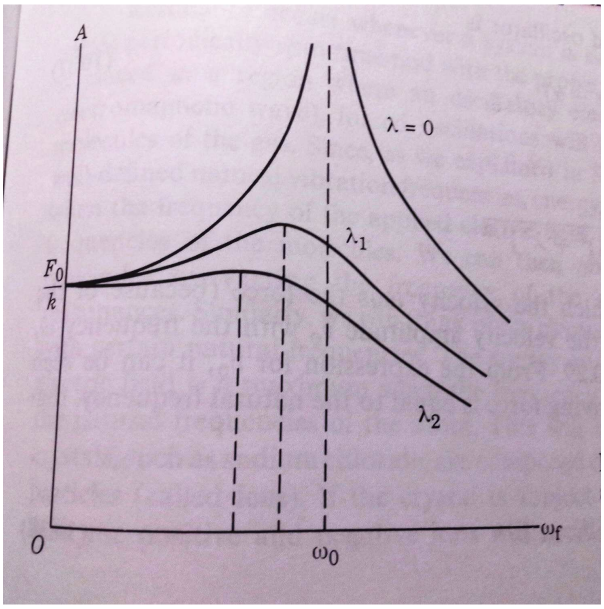
$$\Psi(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 ,$$

έτσι ώστε $A = f_0 / [\Psi(\omega)]^{1/2}$. Έχουμε (δείξτε το):

$$\Psi'(\omega) = 0 \;\; \text{για} \;\; \omega = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2} = \omega_A \quad \text{και} \quad \Psi''(\omega_A) = 8\omega_A^2 > 0 .$$

Άρα, για μικρή απόσβεση ($2\gamma^2 < \omega_0^2$), η συνάρτηση $\Psi(\omega)$ γίνεται *ελάχιστη*, και το πλάτος A γίνεται *μέγιστο*, όταν $\omega_f = \omega_A$. Λέμε τότε ότι έχουμε *συντονισμό πλάτους*.

Στο πιο κάτω σχήμα, $\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow \gamma_1 < \gamma_2$. Αυτό σημαίνει ότι, βάσει της (22), $\omega_{A,1} > \omega_{A,2}$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση ($\lambda=0 \Leftrightarrow \gamma=0$), η (22) δίνει $\omega_A = \omega_0$. Με άλλα λόγια, στην εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, και *μόνο σε αυτή την περίπτωση*, το πλάτος γίνεται μέγιστο (στην πραγματικότητα, άπειρο) όταν η συχνότητα ω_f της εξωτερικής δύναμης γίνει ίση με την φυσική συχνότητα ω_0 .



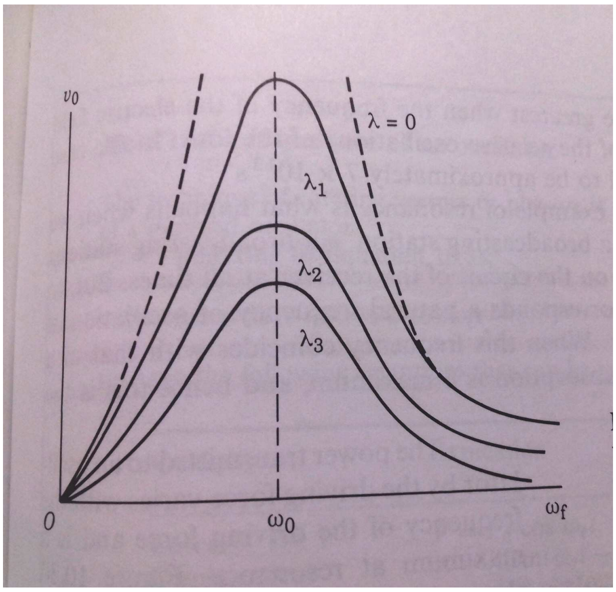
Παραγωγίζοντας την (19) βρίσκουμε την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος:

$$v = dx/dt = \omega_f A \cos(\omega_f t + \varphi) \equiv v_0 \cos(\omega_f t + \varphi)$$

όπου, λόγω της (20),

$$v_0 = \omega_f A = \frac{f_0}{\left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_f^2}\right)^2 + 4\gamma^2\right]^{1/2}} \; .$$

Το v_0 γίνεται μέγιστο όταν ο παρονομαστής στο κλάσμα είναι ελάχιστος, πράγμα που συμβαίνει όταν $\omega_f = \omega_0$. Η κινητική ενέργεια $m v_0^2/2$ είναι τότε μέγιστη, και λέμε ότι έχουμε *ενεργειακό συντονισμό*.



Προσέξτε ότι, σε αντίθεση με τον συντονισμό πλάτους, η συχνότητα ω_f για ενεργειακό συντονισμό δεν εξαρτάται από την απόσβεση λ αλλά *ισούται πάντα με την φυσική συχνότητα* ω_0 *του ταλαντωτή*. Στη συχνότητα αυτή, το έργο που προσφέρει η εξωτερική δύναμη $F(t)$ στον ταλαντωτή ανά μονάδα χρόνου είναι μέγιστο. Δηλαδή, ο ταλαντωτής απορροφά την μέγιστη δυνατή ισχύ από τον παράγοντα που ασκεί την δύναμη F.

Προσέξτε επίσης ότι, στην περίπτωση μηδενικής απόσβεσης ($\lambda=0 \Leftrightarrow \gamma=0$), το πλάτος ταχύτητας v_0 γίνεται *άπειρο* στη συχνότητα ενεργειακού συντονισμού $\omega_f = \omega_0$. Αυτό, βέβαια, είναι μία καθαρά θεωρητική υπόθεση, αφού είναι πρακτικά αδύνατο να μην ασκείται έστω και μία απειροελάχιστη δύναμη τριβής πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του!