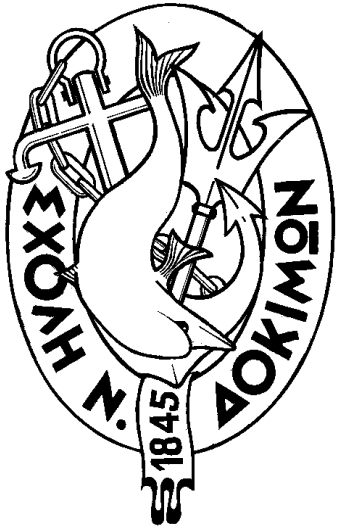


Ενεργά Φίλτρα



Ηλεκτρονική
Γ' τάξη
Λέκτορας Ε. Καραγιάννη

2

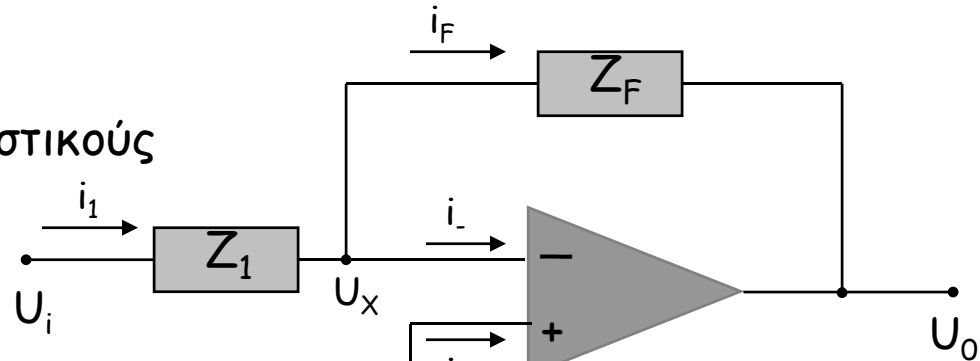
Αναστρέφουσα Συνδεσμολογία

- Γενικές παραδοχές για τους τελεστικούς ενισχυτές

- $U_+ = U_- = U_x$

- $i_+ = i_- \approx 0$

- Επίλυση Κυκλώματος



$$i_1 = i_- + i_F \xRightarrow{i_- = 0} i_1 = i_F \Rightarrow \frac{U_x - U_i}{Z_F} = \frac{U_o - U_x}{Z_1} \xRightarrow{U_x = 0} A_V = \frac{U_o}{U_i} = -\frac{Z_F}{Z_1}$$

- Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως διαφοριστής

- Αν $Z_F = R$ και $Z_1 = 1/j\omega C$ τότε $\frac{U_o}{U_i} = -j\omega CR = -sRC \Rightarrow U_o = -RC \frac{dU_i}{dt}$

- Ο Τελεστικός Ενισχυτής ως ολοκληρωτής

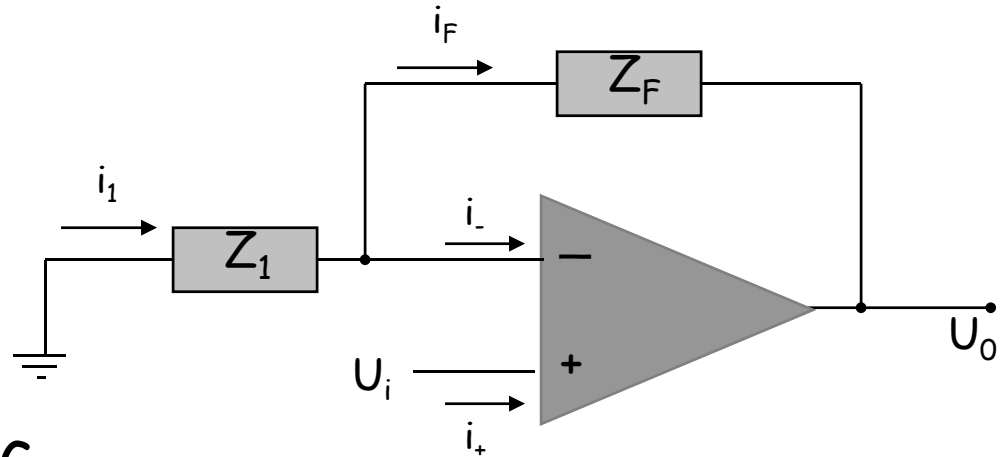
- Αν $Z_1 = R$ και $Z_F = 1/j\omega C$ τότε $\frac{U_o}{U_i} = -\frac{1}{j\omega RC} = -\frac{1}{sRC} \Rightarrow U_o = \frac{1}{RC} \cdot \int U_i dt$



Μη Αναστρέφουσα Συνδεσμολογία

■ Γενική παραδοχή

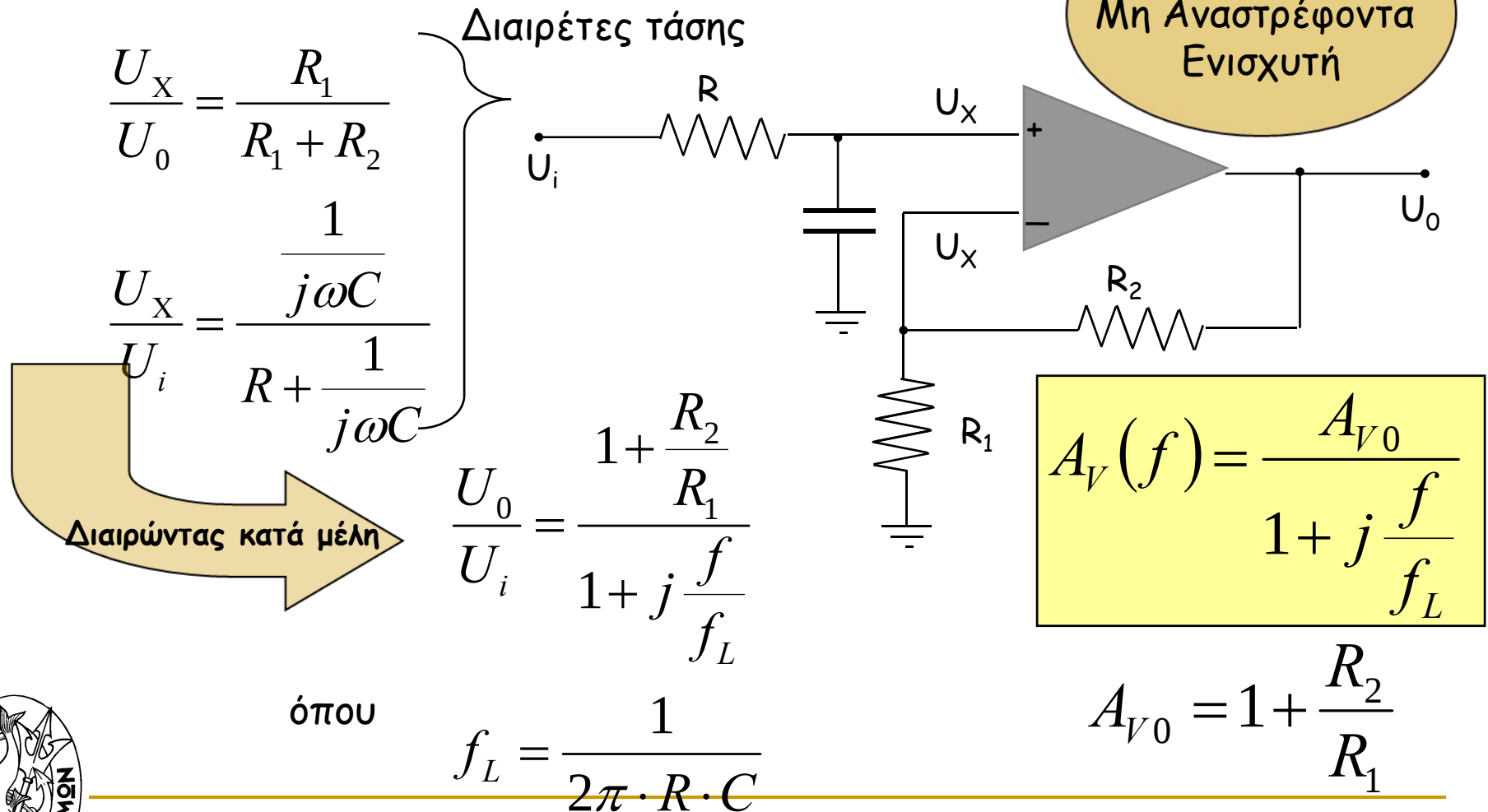
□ $U_+ = U_- = U_i$



■ Επίλυση Κυκλώματος

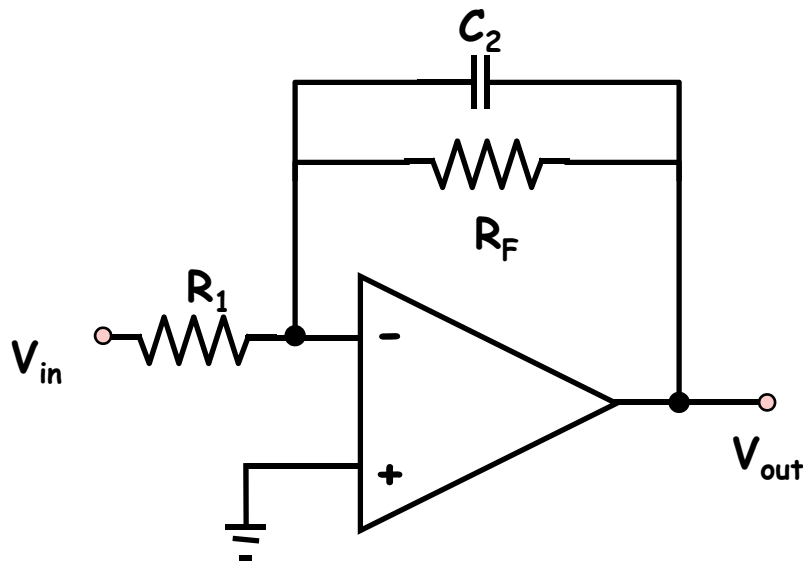
$$i_1 = i_F \Rightarrow \frac{U_i - 0}{Z_1} = \frac{U_o - U_i}{Z_F} \Rightarrow \frac{Z_F}{Z_1} = \frac{U_o}{U_i} - 1 \Rightarrow A_V = \frac{U_o}{U_i} = \frac{Z_F}{Z_1} + 1$$

Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο Sallen-Key



Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο (B)

Συνδεσμολογία
Αναστρέφοντα
Ενισχυτή



Συχνότητα αποκοπής:

$$f_H = \frac{1}{2\pi R_F C_2}$$

Κέρδος DC $A_{V0} = -\frac{R_F}{R_1}$

Παράδειγμα:

Σχεδιάστε ένα φίλτρο χαμηλών
συχνοτήτων με συχνότητα
αποκοπής στα 5kHz, και DC
κέρδος 10:

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$A_V = A_{V0} \frac{\omega_0}{s + \omega_0}$$



Παράδειγμα Ενεργού Βαθυπερατού Φίλτρο Sallen-Key

- $R=5\text{ K}\Omega$
- $C=3.14\text{ nF}$
- $R_1=1\text{ K}\Omega$
- $R_2=9\text{ K}\Omega$

$$|A_V| = \left| \frac{U_0}{U_i} \right| = \frac{A_{V0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_L} \right)^2}} \text{ και } \varphi = -\arctan(f/f_L)$$

προκύπτει

$$f_L = 10\text{ KHz και } A_{V0} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10$$

όπου

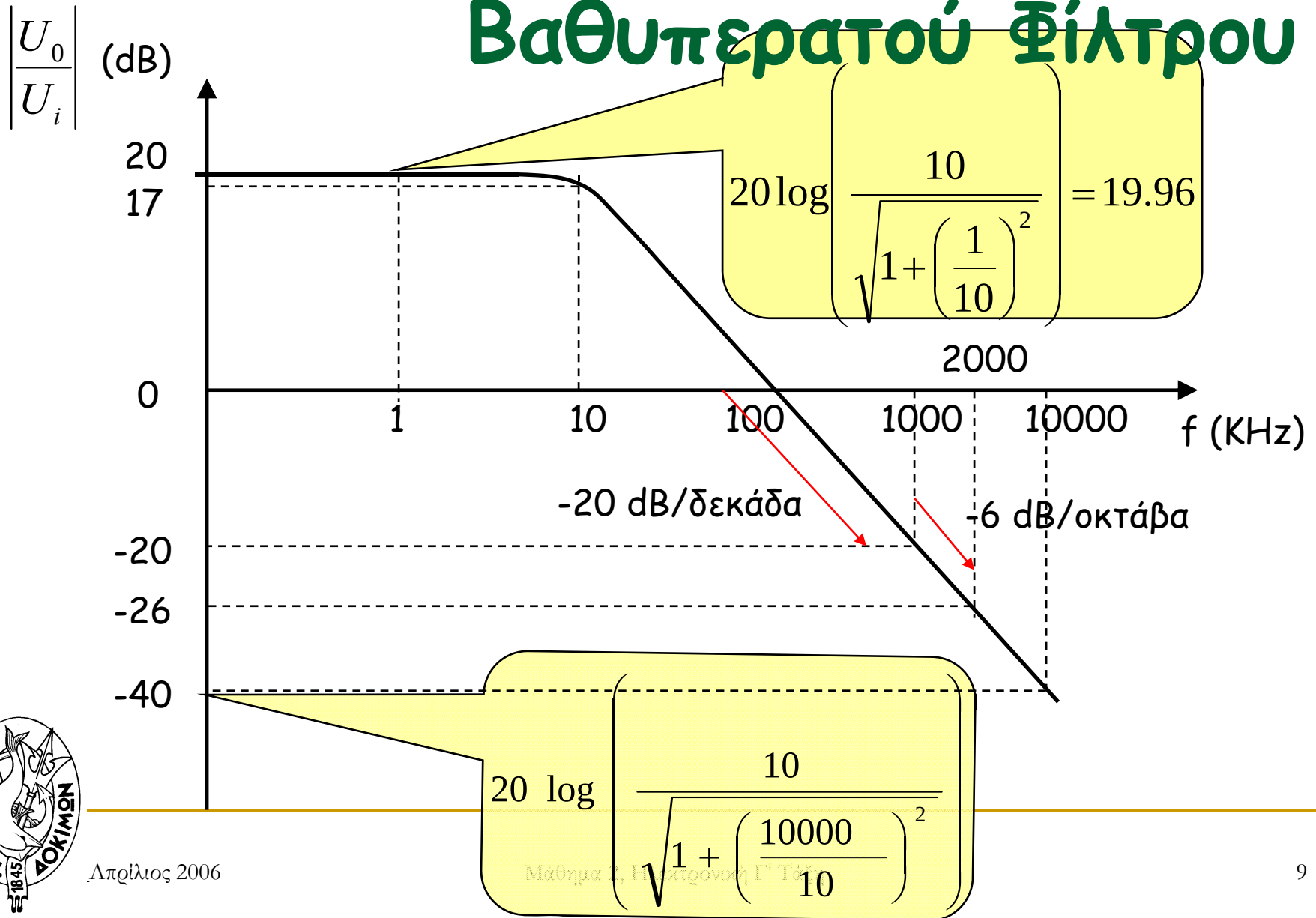
$$f_L = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

Αυτό το φίλτρο, σε σχέση με το παθητικό βαθυπερατό φίλτρο, έχει κέρδος, δηλαδή είναι και ενισχυτής!!!

Το A_{V0} λέγεται κέρδος στη ζώνη διέλευσης ή κέρδος χαμηλών συχνοτήτων



Απόκριση Συχνότητας Βαθυπερατού Φίλτρου

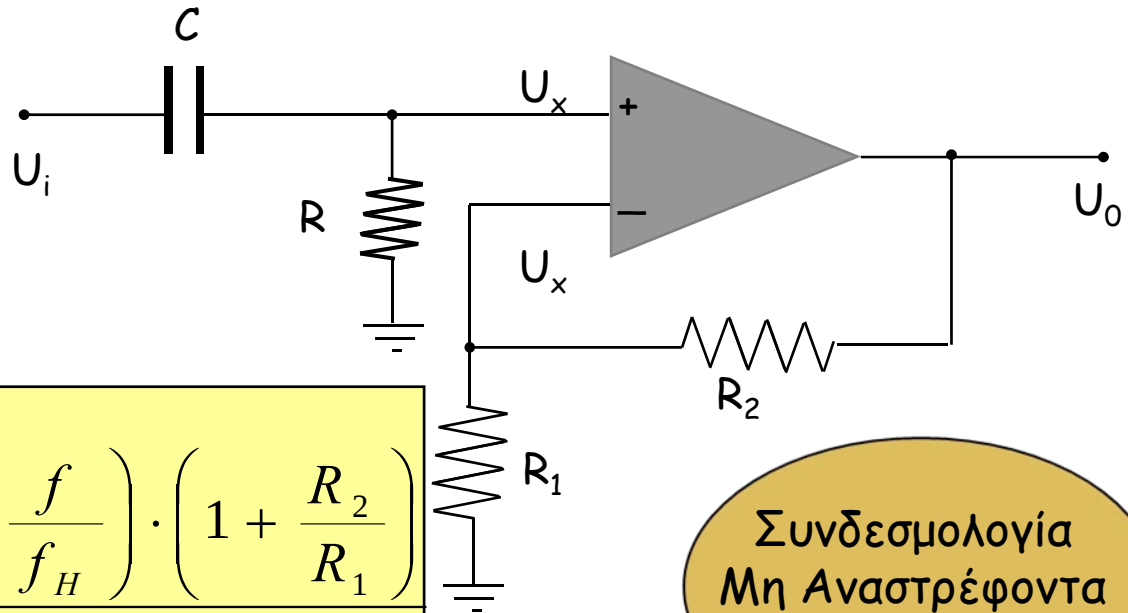


Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο Sallen-Key

$$\frac{U_x}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_x}{U_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Διαιρέτες τάσης



$$A_V = \frac{U_0}{U_i} = \frac{j\left(\frac{f}{f_H}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{1 + j\frac{f}{f_H}}$$

Συνδεσμολογία
Μη Αναστρέφοντα
Ενισχυτή

$$f_H = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$



όπου

Ενεργό Υψιπερατό Φίλτρο (B)

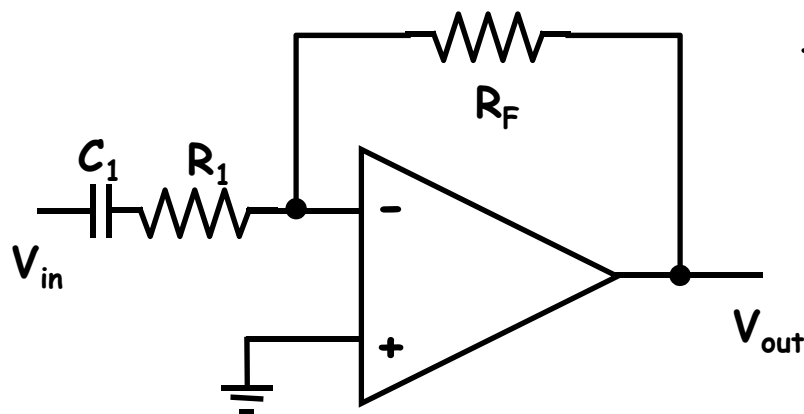
Συνδεσμολογία
Αναστρέφοντα
Ενισχυτή

Συχνότητα αποκοπής

$$f_H = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

Κέρδος στις υψηλές συχνότητες

$$A_{V0} = \frac{R_F}{R_1}$$



Συνάρτηση Μεταφοράς

$$A_V = -A_{V0} \frac{s}{s + \omega_0}$$

Δύο Εξισώσεις, Τρεις άγνωστοι:
Επιλέξτε ένα στοιχείο βασιζόμενοι
σε άλλες συνθήκες και καθορίστε
τις τιμές των άλλων δύο στοιχείων



Παράδειγμα Ενεργού Υψιπερατού Φίλτρου Sallen-Key

- $R=5\text{ K}\Omega$
- $C=3.14\text{ nF}$
- $R_1=1\text{ K}\Omega$
- $R_2=9\text{ K}\Omega$

$$|A_V| = \left| \frac{U_0}{U_i} \right| = \frac{A_{V0} \cdot \frac{f}{f_H}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_H} \right)^2}}$$

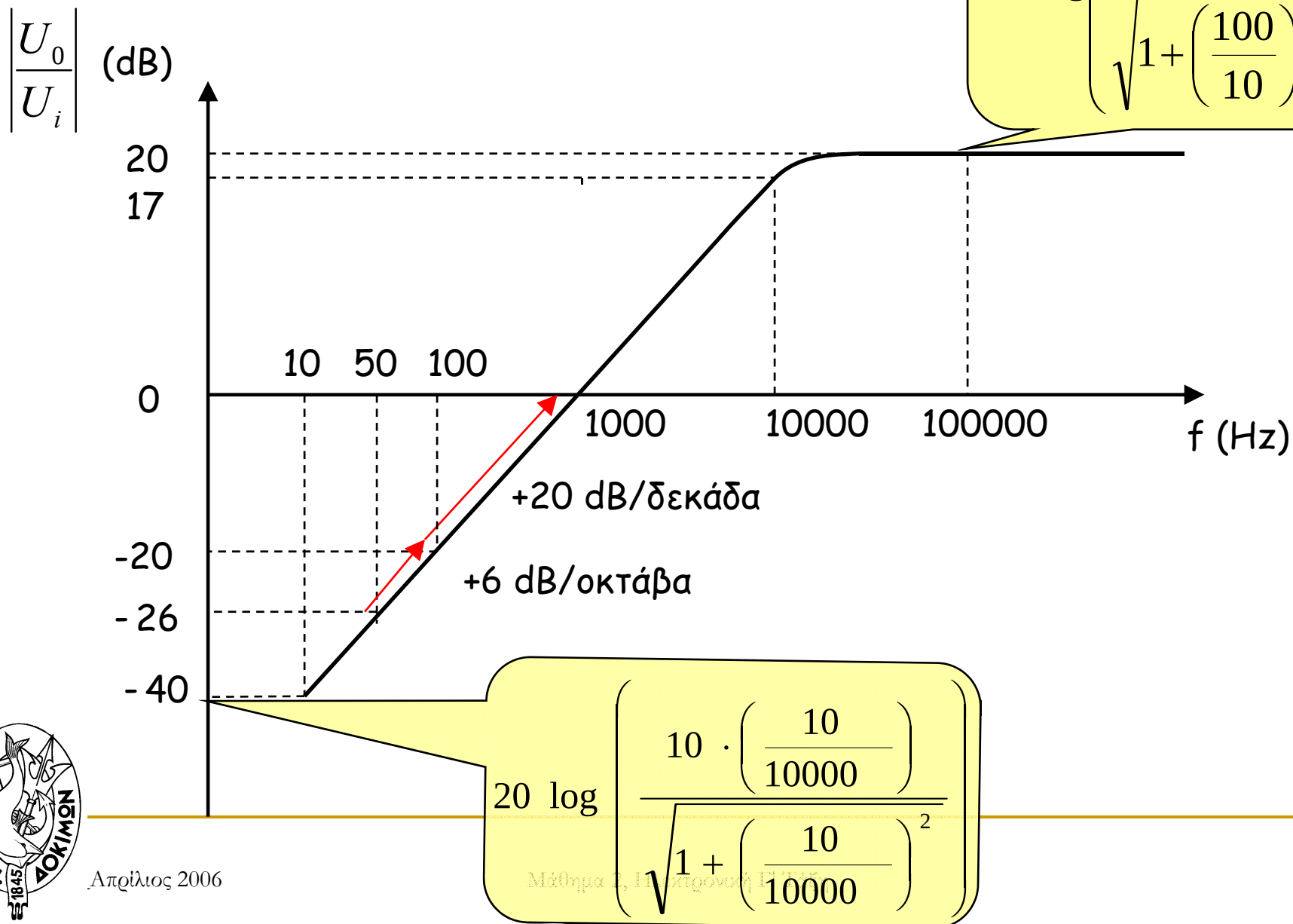
και $\varphi = 90^\circ - \arctan(f/f_H)$

$$f_H = 10\text{ KHz} \text{ και } A_{V0} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 10$$

Αυτό το φίλτρο, σε σχέση με το παθητικό υψιπερατό φίλτρο, έχει κέρδος, δηλαδή είναι και ενισχυτής!!!



Απόκριση Συχνότητας

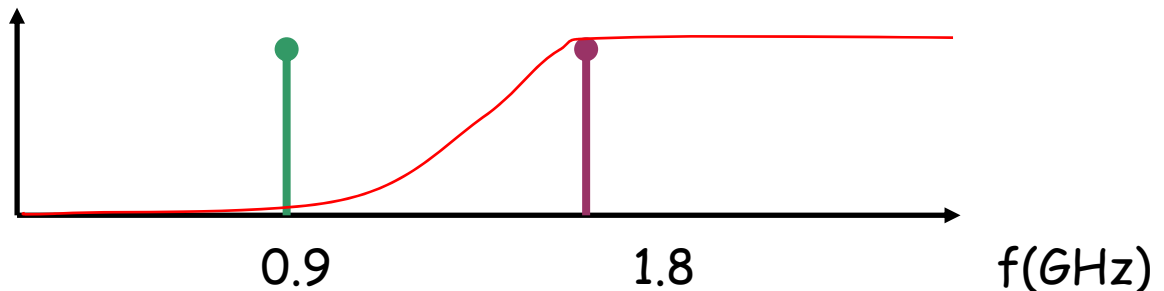


ΠΡΟΒΛΗΜΑ

- Να σχεδιαστεί φίλτρο που να επιτρέπει μόνο στη συχνότητα της COSMOTE να διέρχεται αλλά όχι τη συχνότητα της VODAFONE.
- Συγχρόνως, να ενισχύει το σήμα της COSMOTE κατά 30dB και να απορρίπτει το σήμα της VODAFONE κατά τουλάχιστον 20 dB.
- Γιατί το πρόβλημα δεν έχει λύση χρησιμοποιώντας τις ως τώρα γνώσεις μας?

Αντιμετώπιση του Προβλήματος

- Η Cosmote εκπέμπει στα 1800 MHz
- Η Vodafone στα 900 MHz



- Χρειαζόμαστε ενεργό υπερερατό φίλτρο εφόσον το κέρδος πρέπει να είναι περισσότερο από 0 dB.



Επιλογή στοιχείων

Από τη Θεωρία και από την εκφώνηση του προβλήματος έχουμε:

$$20 \log \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{f}{f_H}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_H}\right)^2}} = 30 \Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{f}{f_H}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_H}\right)^2}} = 10^{3/2} = 31.6 \xrightarrow{f \gg f_H} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cong 30$$

Επομένως, επιλέγουμε:
 $R_2 = 30 \text{ K}\Omega$ και $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$

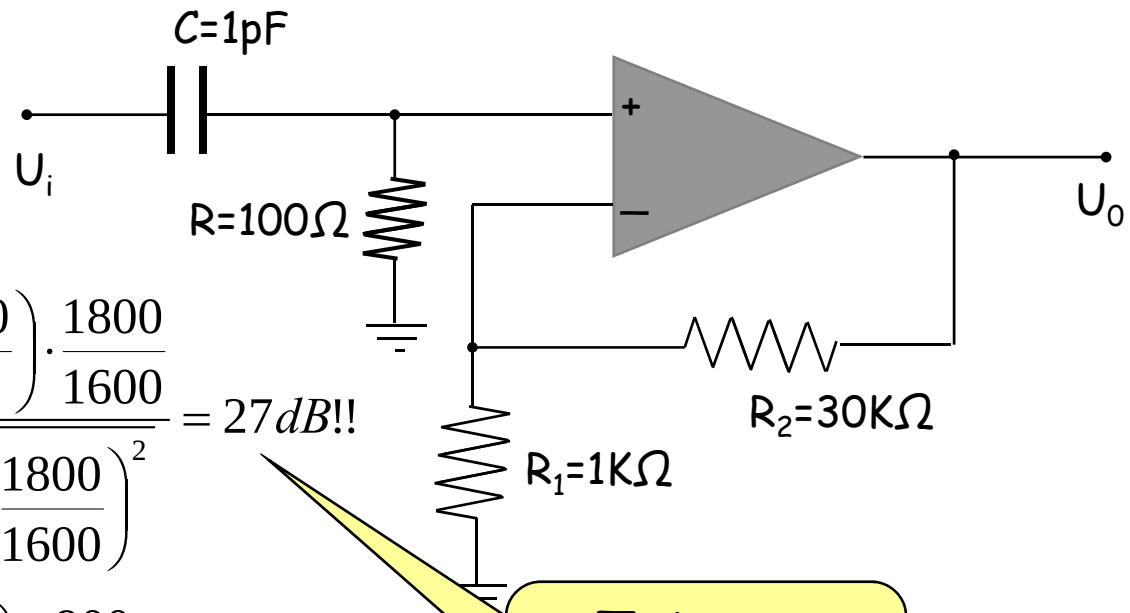
Αν επιλέξουμε συχνότητα αποκοπής **1600 MHz**
και χρησιμοποιήσουμε πυκνωτή 1pF, προκύπτει $R = 0.1 \Omega$,
η οποία αντίσταση δεν υπάρχει στο εμπόριο.

Επομένως, επιλέγουμε πυκνωτή **C=1pF**
και προκύπτει η τιμή της αντίστασης **R=100Ω**

$$f_H = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$



Σχεδίαση Φίλτρου



$$A_v(1800MHz) = 20 \log \frac{\left(1 + \frac{30}{1}\right) \cdot \frac{1800}{1600}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1800}{1600}\right)^2}} = 27dB!!$$

$$A_v(900MHz) = 20 \log \frac{\left(1 + \frac{30}{1}\right) \cdot \frac{900}{1600}}{\sqrt{1 + \left(\frac{900}{1600}\right)^2}} = 24dB!!!!!!$$

Πρέπει να
μεγαλώσουμε
την R_2

Τι χρειαζόμαστε

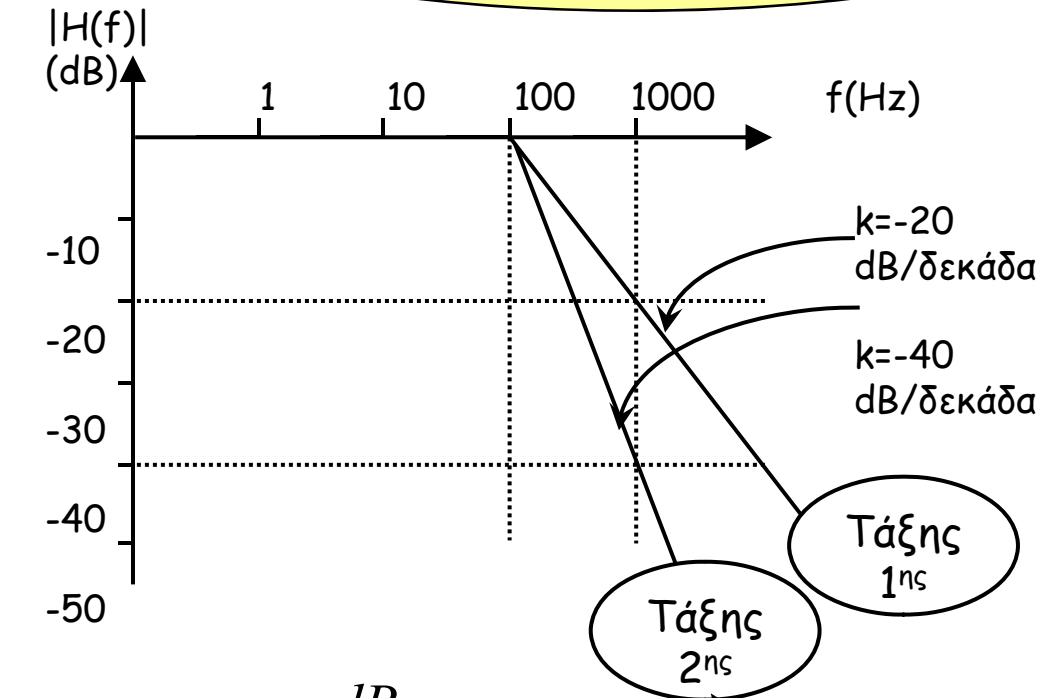


Τάξη Φίλτρου

n

Συνήθως ταυτίζεται με τον αριθμό των πηνίων ή πυκνωτών του κυκλώματος

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ εκφράζεται από μία παράσταση στην οποία ο παρονομαστής είναι ένα πολυώνυμο ως προς $s=j\omega$, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια. Ο αλγεβρικός βαθμός αυτού του πολυωνύμου ονομάζεται βαθμός ή τάξη n του φίλτρου.
- Στην πραγματικότητα, το n καθορίζει άμεσα την κλίση (k) της μεταβατικής περιοχής της καμπύλης απόκρισης του φίλτρου. Σε λογαριθμική κλίμακα συχνοτήτων, η κλίση k , σχετίζεται με το βαθμό του φίλτρου n , με βάση τον προσεγγιστικό τύπο:



$$k = \pm 20 \cdot n \frac{dB}{\text{δεκάδα}}$$

$$k = \pm 6 \cdot n \frac{dB}{\text{οκτάβα}}$$



Μαθηματικά πρότυπα Φίλτρων

- Η συνάρτηση μεταφοράς για κάθε φίλτρο, στη γενική της μορφή είναι

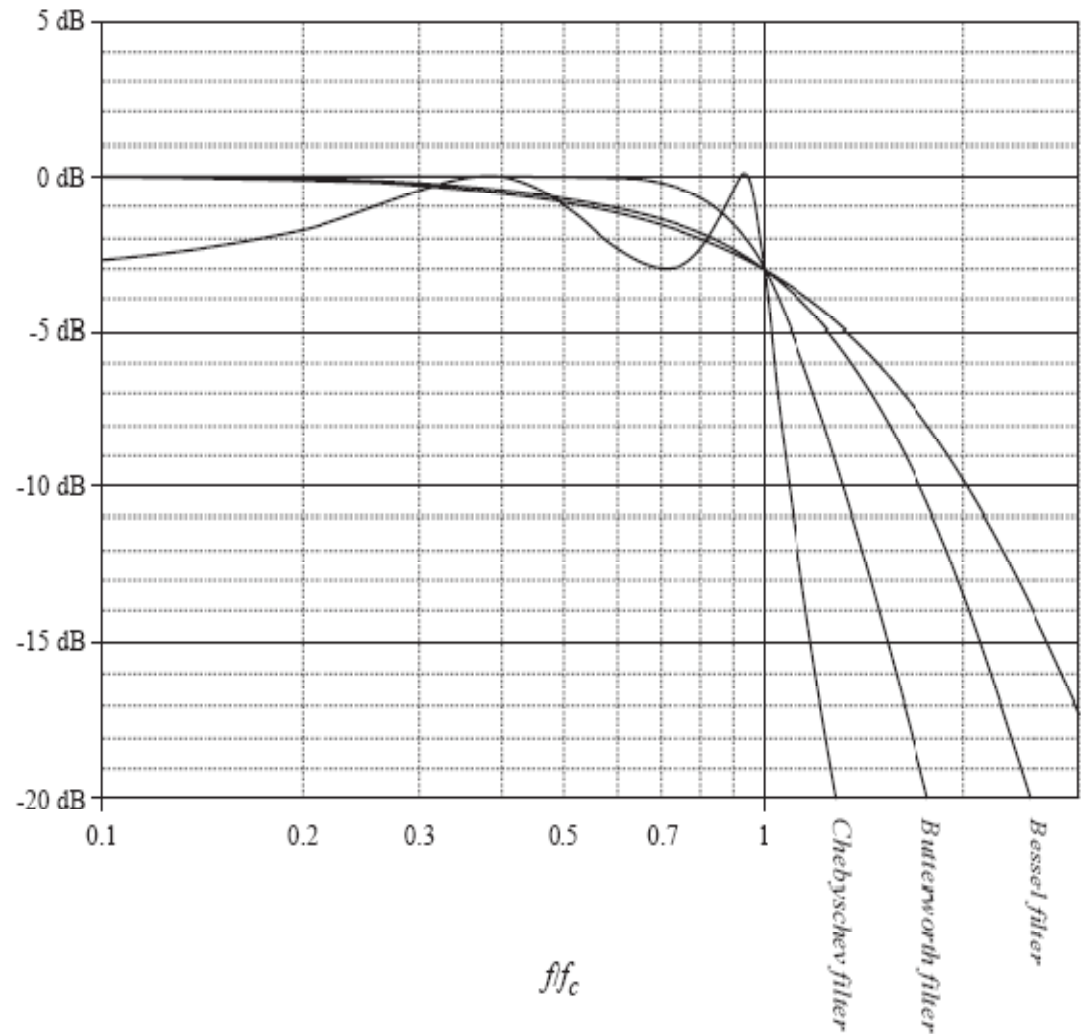
$$H(s) = H_0 \frac{(s - Z_0) \cdot (s - Z_1) \cdot (s - Z_2) \cdot \dots \cdot (s - Z_n)}{(s - P_0) \cdot (s - P_1) \cdot (s - P_2) \cdot \dots \cdot (s - P_n)}$$

- Ο σχεδιαστής ενός φίλτρου πρέπει να γνωρίζει τουλάχιστον τις ακόλουθες προδιαγραφές:
 - Τη συχνότητα ή τις συχνότητες αποκοπής
 - Την εξασθένιση σε dB στη ζώνη απόρριψης
 - Την επιτρεπόμενη ή όχι κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης
- Στη μαθηματική ανάλυση των φίλτρων έχουν αναπτυχθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα (πρότυπα) και κυκλώματα, με τα οποία προσπαθούμε να πετύχουμε μία όσο το δυνατό καλύτερη προσομοίωση της συμπεριφοράς των ιδανικών φίλτρων. Τα μοντέλα αυτά ταξινομούνται στις εξής 4 οικογένειες: Τα φίλτρα **Butterworth**, τα φίλτρα **Chebyshev**, τα φίλτρα **Bessel** και τα ελλειπτικά (Cauer) φίλτρα.



Σύγκριση αποκρίσεων φίλτρων 5ης τάξης

Για λόγους
περιορισμού της ύλης,
θα μελετήσουμε μόνο
τα φίλτρα
Butterworth τα
οποία λέγονται και
μέγιστου επίπεδου
κέρδους (maximally
flat)



Πολυώνυμα Butterworth

Μια συνήθης προσέγγιση για ένα βαθυπερατό φίλτρο:

$$\frac{A_V(s)}{A_{V0}} = \frac{1}{B_n(s)}$$

Η οποία χρησιμοποιεί τα πολυώνυμα Butterworth

n	Παράγοντες των πολυωνύμων $B_n(s)$
1	(s/ω_o+1)
2	$s/\omega_o^2+1.414s/\omega_o+1$
3	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+s/\omega_o+1)$
4	$(s/\omega_o^2+0.7654s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.8478s/\omega_o+1)$
5	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+0.6180s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.6180s/\omega_o+1)$
6	$(s/\omega_o^2+0.5176s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.414s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.9318s/\omega_o+1)$
7	$(s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+0.4450s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.247s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.8022s/\omega_o+1)$
8	$(s/\omega_o^2+0.3986s/\omega_o+1)(s^2+1.111s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.6630s/\omega_o+1)(s/\omega_o^2+1.9622s/\omega_o+1)$

Συνάρτηση μεταφοράς ενεργού φίλτρου 2^{ης} τάξης

Φίλτρο 1^{ης} τάξης

$$\frac{A_V(s)}{A_{V0}} = \frac{1}{s/\omega_0 + 1}$$

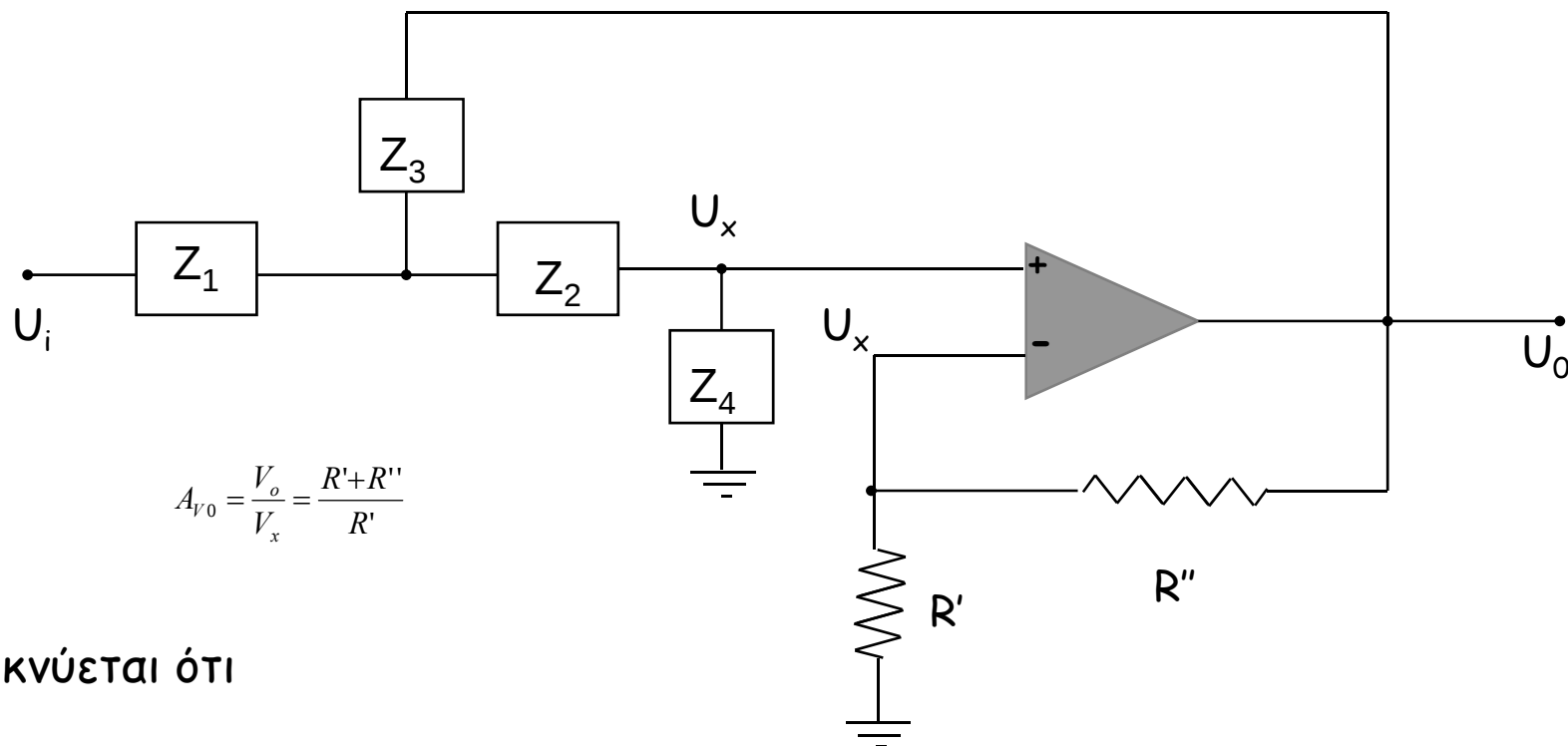
Φίλτρο 2^{ης} τάξης

$$\frac{A_V(s)}{A_{V0}} = \frac{1}{\left(s/\omega_0\right)^2 + 2k\left(s/\omega_0\right) + 1}$$

Όπου k είναι το μισό του συντελεστή του s του πίνακα για τα πολυώνυμα Butterworth
 $k=0,707$



Γενικευμένο πρότυπο ενεργού φίλτρου 2^{ης} τάξης



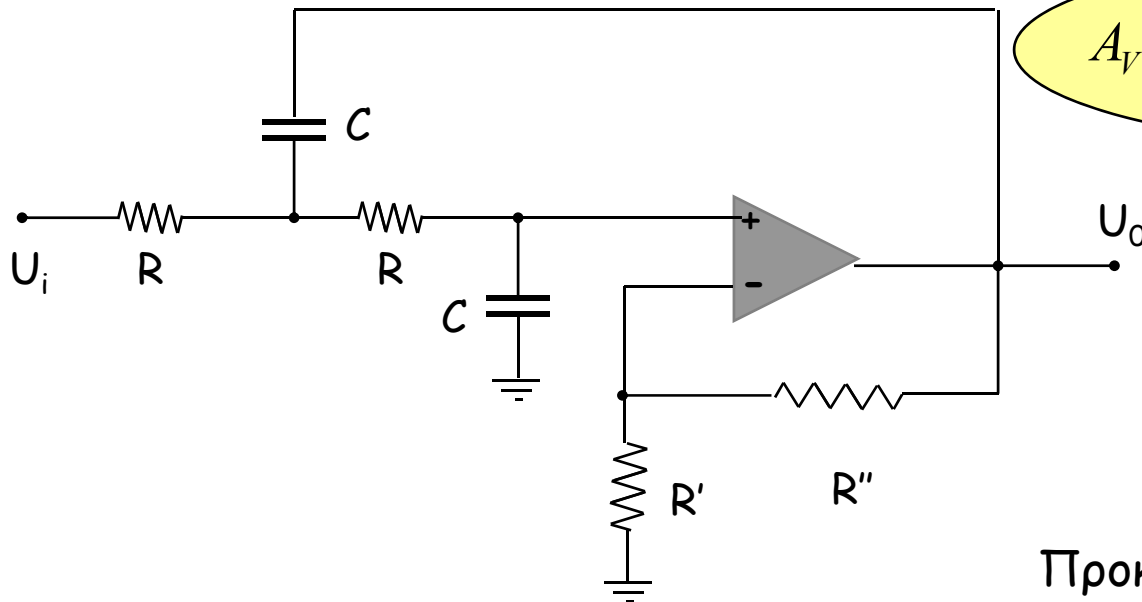
Αποδεικνύεται ότι

$$A_V(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{A_{V0} Z_3 Z_4}{Z_3 (Z_1 + Z_2 + Z_4) + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 (1 - A_{V0})}$$



Ενεργό Βαθυπερατό Φίλτρο 2ης τάξης

- Για λειτουργία βαθυπερατού φίλτρου πρέπει οι Z_1 και Z_2 να είναι αντιστάσεις και οι Z_3 και Z_4 να είναι χωρητικότητες.
- Το αντίστροφο για λειτουργία υψιπερατού φίλτρου
- Έστω $Z_1=Z_2=R$ και $Z_3=Z_4=C$



$$A_V(s) = A_{V0} \frac{\omega_0^2}{s^2 + (3 - A_{V0})\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$A_{V0} = \frac{R' + R''}{R'}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

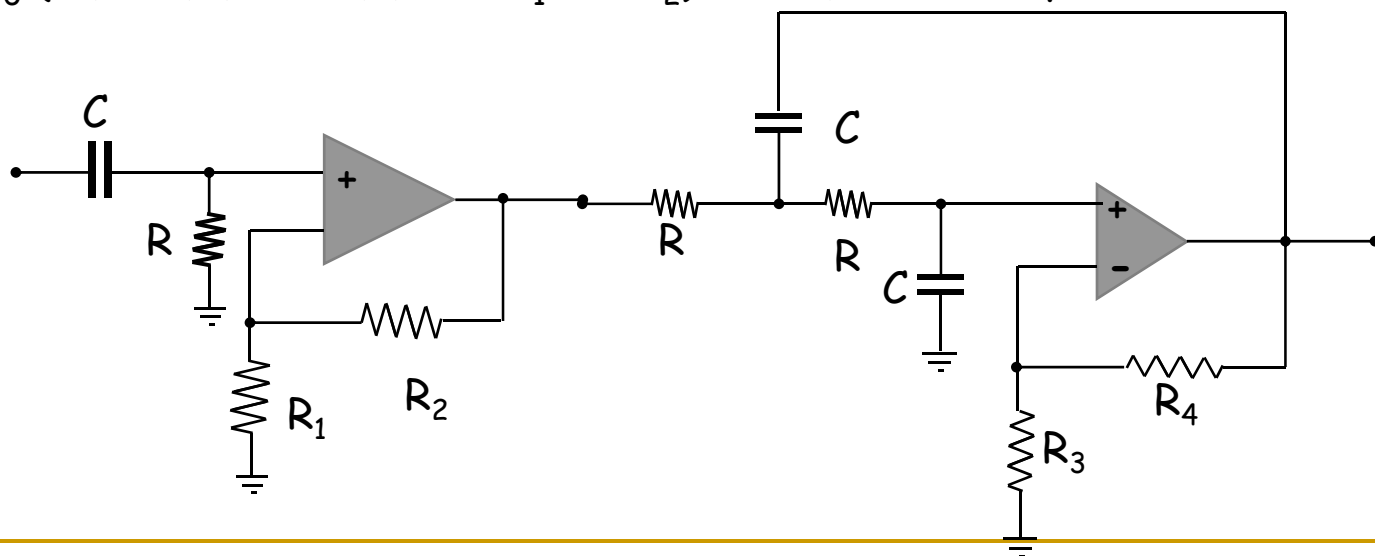
Προκύπτει ότι $3 - A_{V0} = 2k = 1.414$

Συνδέοντας σε σειρά τέτοια κυκλώματα σχεδιάζουμε φίλτρα Butterworth
άρτιας τάξης



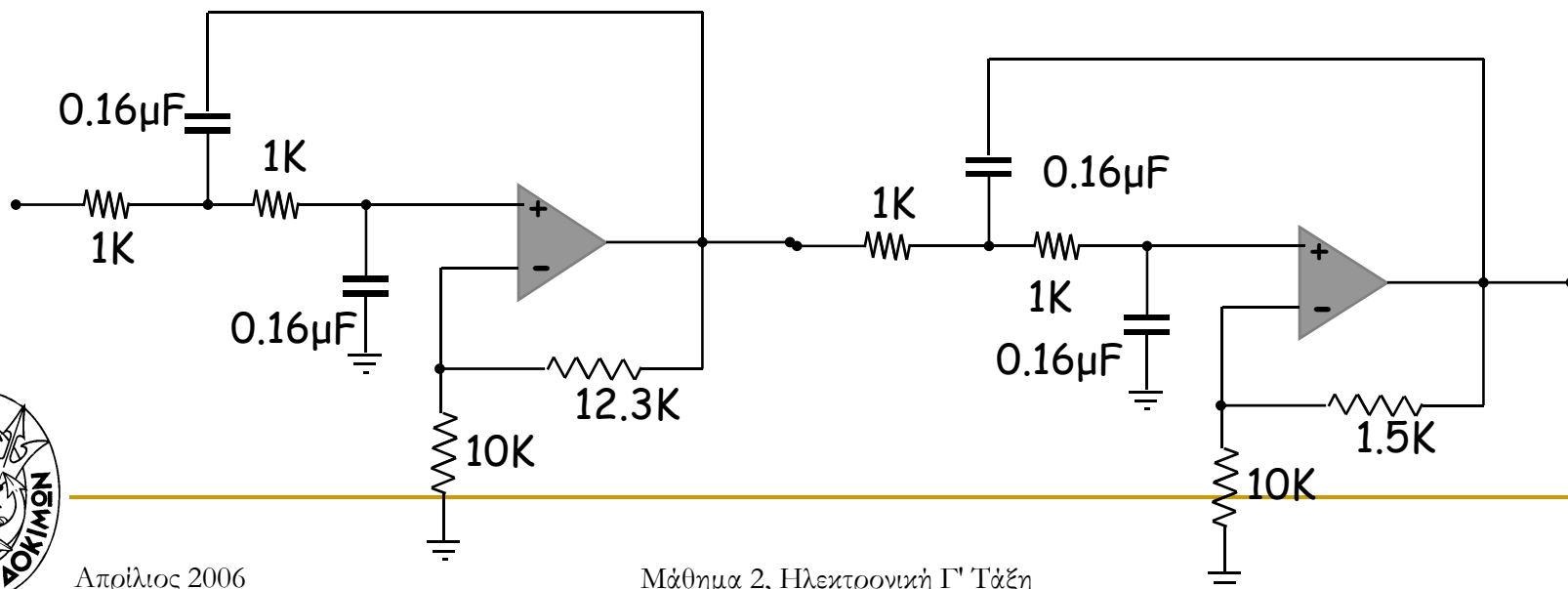
Βαθυπερατό φίλτρο 3^{ης} τάξης

- Για να σχεδιάσουμε βαθυπερατό φίλτρο περιττής τάξης αρκεί να συνδέσουμε ένα βαθυπερατό φίλτρο 1^{ου} βαθμού σε σειρά με βαθμίδες βαθυπερατού φίλτρου 2^{ης} τάξης.
- Τα R και C επιλέγονται ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $\omega_0 = \frac{1}{RC}$
- Το A_{V0} του φίλτρου 2^{ης} τάξης (δηλαδή η επιλογή των R_3 και R_4) επιλέγεται ώστε να προκύψει $2k=1$ ($n=3$)
- Το A_{V0} (δηλαδή η επιλογή των R_1 και R_2) επιλέγεται αυθαίρετα.



Βαθυπερατό φίλτρο 4^{ης} τάξης

- Να σχεδιαστεί βαθυπερατό φίλτρο Butterworth με κέρδος πάνω από 4 dB σε χαμηλές συχνότητες, με συχνότητα αποκοπής 1KHz και με κλίση στις υψηλές συχνότητες 24dB/οκτάβα
 - $N=4$
 - $A_{V1}=3-2k_1=2.235$ και $A_{V2}=3-2k_2=1.152$
 - $f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}, R = 1K\Omega$



Επιστρέφουμε στο πρόβλημα

- Να σχεδιαστεί φίλτρο που να επιτρέπει μόνο στη συχνότητα της COSMOTE να διέρχεται αλλά όχι τη συχνότητα της VODAFONE.
- Συγχρόνως, να ενισχύει το σήμα της COSMOTE κατά 30dB και να απορρίπτει το σήμα της VODAFONE κατά τουλάχιστον 20 dB.
- Δίνονται τα πολυώνυμα Butterworth 1^{ης} ως 5^{ης} τάξης.

Από τη μελέτη του βαθυπερατού φίλτρου 4^{ης} τάξης προκύπτει ότι το συνολικό κέρδος του βαθυπερατού φίλτρου σε χαμηλές συχνότητες είναι

$$A_{V1} \cdot A_{V2} = 2.235 \cdot 1.12 = 2.5 \approx 8dB$$

Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε φίλτρο περιττής τάξης ώστε να ελέγξουμε το κέρδος. Επιλέγουμε σχεδίαση Butterworth 5^{ης} τάξης. Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι $2k_1=0.618$ και $2k_2=1.618$

Οπότε προκύπτει $A_{V2}=2.382$ και $A_{V3}=1.382$

Ας θυμηθούμε
ότι
μετατρέπουμε
το βαθυπερατό
σε υψιπερατό με
ανταλλαγή των
R και C



Κύκλωμα ενεργού υπερπυκνωτού φίλτρου Sallen-Key 5^{ης} τάξης

Επιλέγουμε $R_1=1K\Omega$ και $R_2=20K\Omega$ οπότε προκύπτει

$$A_{V1}=21=26dB$$

$R_3=1K\Omega$ και $R_4=1.3K\Omega$ οπότε προκύπτει

$$A_{V2}=2.3=7.2dB$$

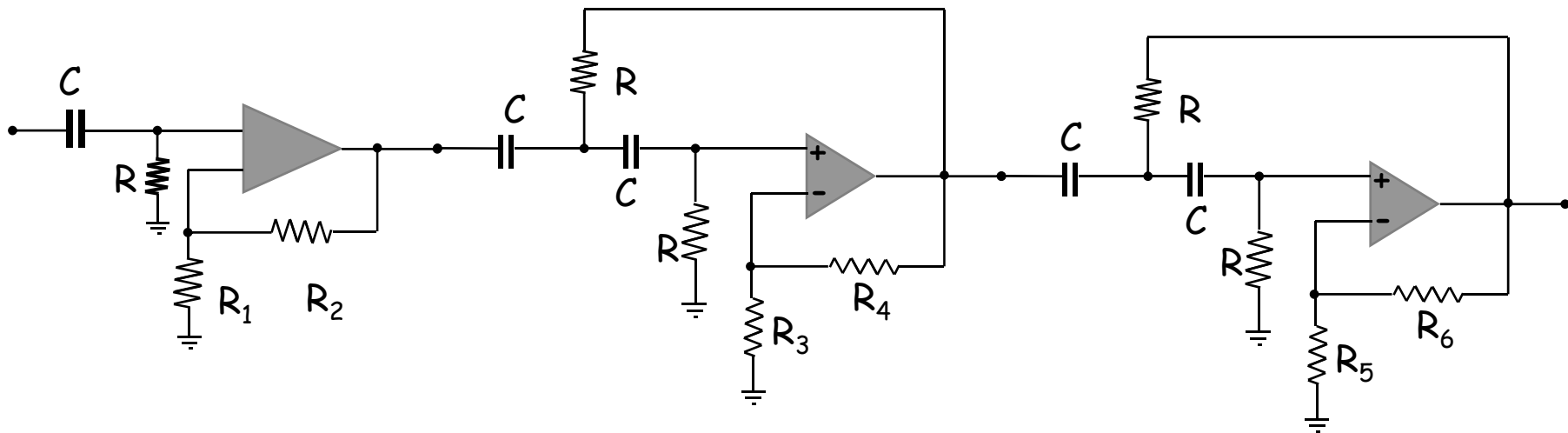
$R_5=1K\Omega$ και $R_6=300\Omega$ οπότε προκύπτει

$$A_{V3}=1.3=2.3dB$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} \approx 1.6GHz$$

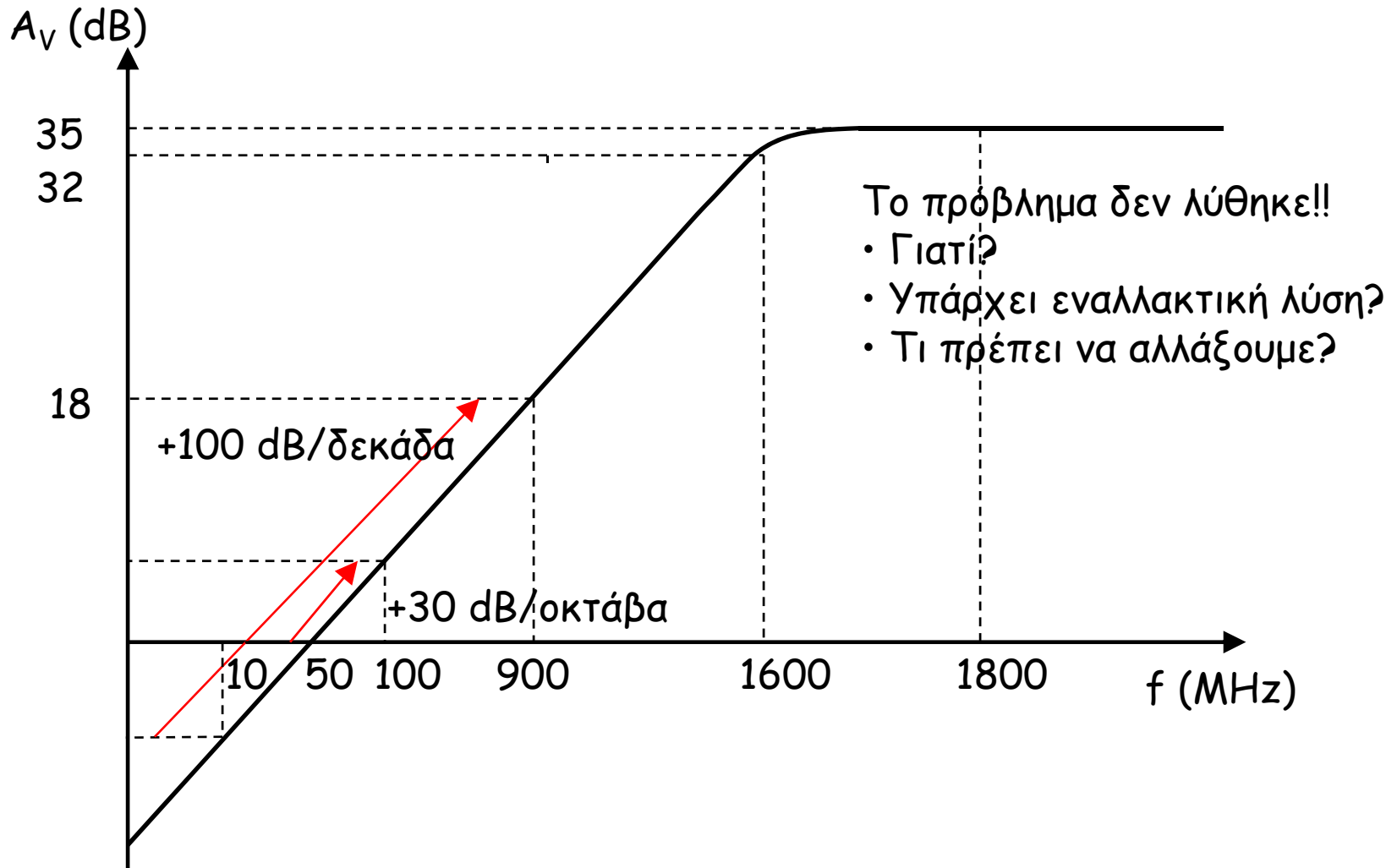
$$R = 1K\Omega$$

$$C = 100nF$$



$$A_{V0} = A_{V1} + A_{V2} + A_{V3} \approx 35dB$$

Απόκριση Συχνότητας



Ορολογία φίλτρων

- Ενεργό-Παθητικό φίλτρο (*Active-Passive Filter*)
- Ψηφιακό-Αναλογικό φίλτρο (*Digital - Analog Filter*)
- Βαθυπερατό (*Low Pass: LPF*)-Ζωνοπερατό (*BandPass: BPF*)-Ζωνοαποκοπτικό (*BandReject*)-Υψιπερατό (*HighPass: HPF*) φίλτρο
- Λόγος Σήματος-προς-Θόρυβο (*Signal-to-Noise Ratio*)
- Εύρος Ζώνης Διέλευσης (*Band Pass*)
- Συχνότητα Αποκοπής (*Cutt-off Frequency*)
- Οκτάβα (*octave*)-Δεκάδα (*decade*)
- Κλίση φίλτρου στη ζώνη αποκοπής (*band reject slope*)
- Κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (*ripple*)
- Τάξη φίλτρου (*filter order*)
- Παράγοντας Q (*Q factor*)
- Απόρριψη σήματος (*Signal rejection*)

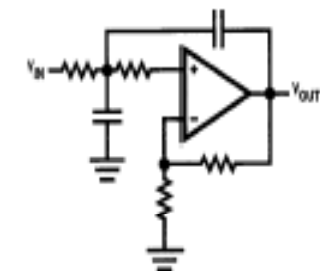
$$Q = \frac{f_c}{(f_H - f_L)}$$

Κεντρική συχνότητα

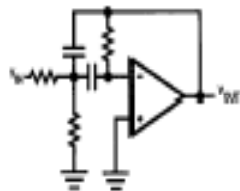
Εύρος Ζώνης



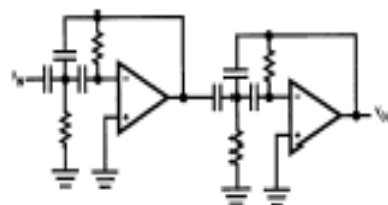
Κυκλώματα για μελέτη



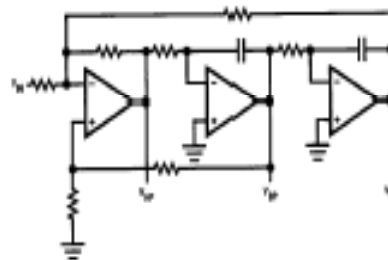
TL/H/11221-06
(a) Sallen-Key 2nd-Order Active Low-Pass Filter



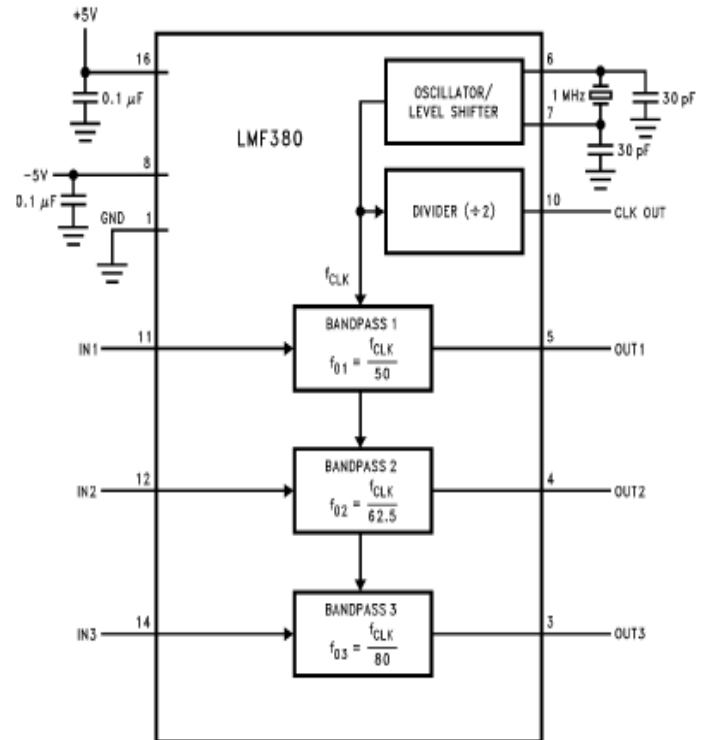
TL/H/11221-01
(c) Multiple-Feedback 2nd-Order Bandpass Filter



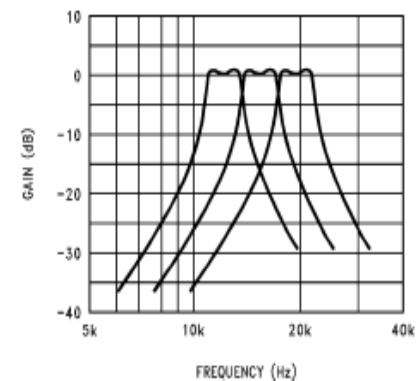
TL/H/11221-05
(b) Multiple-Feedback 4th-Order Active High-Pass Filter.
Note that there are more capacitors than poles.



TL/H/11221-03
(d) Universal State-Variable 2nd-Order Active Filter



(a)



(b)

FIGURE 36. LMF380 one-third octave filter array. (a) Typical application circuit for the top audio octave. The clock is generated with the aid of the external crystal and two 30 pF capacitors. (b) Response curves for the three filters.