ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΙΙ

Finite State Machine - FSM

Διδάσκοντες:
Α. Τσιγκόπουλος, Καθηγητής
Α. Στασινάκης, Επικουρος Καθηγητής

Ακαδημαϊκό Έτος: 2025 - 2026

Τάξη: Γ' Δοκίμων (Μάχιμοι/Μηχανικοί)

1 Πεπερασμένες Μηχανές Καταστάσεων (Finite State Machines - FSM)

Οι Πεπερασμένες Μηχανές Καταστάσεων (Finite State Machines - FSM) αποτελούν ένα από τα βασικότερα μοντέλα περιγραφής ακολουθιακών κυκλωμάτων στην ψηφιακή σχεδίαση. Σε αντίθεση με τα συνδυαστικά κυκλώματα, όπου η έξοδος εξαρτάται αποκλειστικά από τις τρέχουσες εισόδους, στα ακολουθιακά κυκλώματα η έξοδος εξαρτάται τόσο από τις εισόδους όσο και από την προηγούμενη κατάσταση του συστήματος, δηλαδή από τη μνήμη του.

Μια FSM είναι ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο περιγράφει ένα σύστημα που μπορεί να βρίσκεται σε ένα πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Το σύστημα μεταβαίνει από τη μία κατάσταση στην άλλη με βάση τις τιμές των εισόδων του και σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες μετάβασης.

Τυπικά, μια Πεπερασμένη Μηχανή Καταστάσεων ορίζεται από τα εξής στοιχεία:

- Ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S
- Ένα σύνολο εισόδων X
- Ένα σύνολο εξόδων Z
- Μια συνάρτηση μετάβασης καταστάσεων δ
- Μια συνάρτηση εξόδου λ

Η συνάρτηση μετάβασης καθορίζει την επόμενη κατάσταση του συστήματος:

$$S_{next} = \delta(S_{current}, X)$$

ενώ η συνάρτηση εξόδου καθορίζει την τιμή της εξόδου:

$$Z = \lambda(S, X) \quad \text{ή} \quad Z = \lambda(S)$$

ανάλογα με τον τύπο της μηχανής (Mealy ή Moore).

Οι FSM χρησιμοποιούνται ευρέως στον σχεδιασμό ψηφιακών συστημάτων, καθώς επιτρέπουν την οργανωμένη και συστηματική περιγραφή σύνθετων λογικών συμπεριφορών. Εφαρμογές τους περιλαμβάνουν:

- Σχεδίαση ελεγκτών (controllers)
- Ανίχνευση ακολουθιών (sequence detectors)
- Πρωτόκολλα επικοινωνίας
- Συστήματα αυτοματισμού

Από υλοποιητική άποψη, μια FSM αποτελείται από δύο βασικά μέρη:

- Το τμήμα μνήμης, το οποίο υλοποιείται συνήθως με flip-flops και αποθηκεύει την τρέχουσα κατάσταση
- Το συνδυαστικό λογικό κύκλωμα, το οποίο υπολογίζει την επόμενη κατάσταση και την έξοδο

Η λειτουργία μιας FSM είναι συγχρονισμένη με ένα σήμα ρολογιού (clock), το οποίο καθορίζει πότε πραγματοποιούνται οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων. Σε κάθε παλμό του ρολογιού, το σύστημα υπολογίζει τη νέα κατάσταση με βάση την τρέχουσα κατάσταση και τις εισόδους.

Η χρήση FSM απλοποιεί σημαντικά τον σχεδιασμό πολύπλοκων συστημάτων, καθώς επιτρέπει τη διάσπαση της λειτουργίας τους σε διακριτές καταστάσεις και σαφώς καθορισμένες μεταβάσεις. Με αυτόν τον τρόπο, η ανάλυση, η υλοποίηση και η επαλήθευση του συστήματος γίνονται πιο κατανοητές και συστηματικές.

2 Μηχανή Καταστάσεων Moore

Η μηχανή καταστάσεων τύπου Moore αποτελεί έναν από τους δύο βασικούς τρόπους υλοποίησης Πεπερασμένων Μηχανών Καταστάσεων. Το κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι η έξοδος του συστήματος εξαρτάται αποκλειστικά από την τρέχουσα κατάσταση στην οποία βρίσκεται και όχι άμεσα από τις εισόδους.

Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση εξόδου σε μια Moore μηχανή δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \lambda(S)$$

ενώ η συνάρτηση μετάβασης καταστάσεων παραμένει:

$$S_{next} = \delta(S_{current}, X)$$

Αυτό σημαίνει ότι, ακόμη και αν οι είσοδοι μεταβληθούν, η έξοδος δεν αλλάζει άμεσα, αλλά μόνο όταν το σύστημα μεταβεί σε νέα κατάσταση. Η αλλαγή της κατάστασης πραγματοποιείται συνήθως συγχρονισμένα με το σήμα ρολογιού, γεγονός που καθιστά τη συμπεριφορά της Moore μηχανής πιο σταθερή και προβλέψιμη.

Σε διαγράμματα καταστάσεων, η Moore μηχανή αναπαρίσταται με κόμβους (καταστάσεις) οι οποίοι περιέχουν και την τιμή της εξόδου. Δηλαδή, κάθε κατάσταση συνοδεύεται από την αντίστοιχη έξοδο, με μορφή:

$$S_i/Z$$

ενώ οι ακμές (μεταβάσεις) επισημαίνονται μόνο με τις τιμές των εισόδων που προκαλούν τη μετάβαση.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των Moore μηχανών είναι η σταθερότητα της εξόδου. Επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από την κατάσταση, αποφεύγονται ανεπιθύμητες στιγμιαίες μεταβολές (glitches) που μπορεί να προκύψουν από αλλαγές στις εισόδους. Για τον λόγο αυτό, οι Moore μηχανές προτιμώνται σε εφαρμογές όπου απαιτείται αξιόπιστη και καθαρή έξοδος.

Ωστόσο, το χαρακτηριστικό αυτό οδηγεί συχνά στην ανάγκη χρήσης μεγαλύτερου αριθμού καταστάσεων σε σχέση με μια αντίστοιχη Mealy μηχανή. Δηλαδή, για την υλοποίηση της ίδιας λειτουργίας, μια Moore μηχανή μπορεί να είναι πιο πολύπλοκη ως προς τον αριθμό των καταστάσεων.

Από υλοποιητικής πλευράς, μια Moore μηχανή αποτελείται από:

- Ένα σύνολο flip-flops που αποθηκεύουν την τρέχουσα κατάσταση
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα που υπολογίζει την επόμενη κατάσταση
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα εξόδου που εξαρτάται μόνο από την κατάσταση

Η βασική δομή της Moore μηχανής διαχωρίζει καθαρά τη λογική εξόδου από τις εισόδους, γεγονός που απλοποιεί την ανάλυση και τον έλεγχο του κυκλώματος. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται ευρέως σε συγχρονισμένα ψηφιακά συστήματα και σε εφαρμογές όπου η σταθερότητα της εξόδου αποτελεί κρίσιμο παράγοντα.

Παράδειγμα Σχεδίασης Moore FSM με D Flip-Flops

Να σχεδιαστεί μια μηχανή καταστάσεων τύπου Moore, η οποία δέχεται σειριακά μια δυαδική είσοδο X και παράγει έξοδο $Z = 1$ όταν έχει ανιχνευθεί η ακολουθία 101. Σε κάθε άλλη περίπτωση η έξοδος είναι $Z = 0$.

Η μηχανή είναι τύπου Moore, επομένως η έξοδος εξαρτάται μόνο από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το κύκλωμα και όχι άμεσα από την είσοδο. Για τον λόγο αυτό, θα πρέπει να ορίσουμε μία ξεχωριστή κατάσταση στην οποία η έξοδος θα είναι ίση με 1.

Αρχικά ορίζουμε τις καταστάσεις της μηχανής:

$$S_0 : \text{Δεν έχει ανιχνευθεί κανένα χρήσιμο τμήμα της ακολουθίας}$$

$$S_1 : \text{Έχει ανιχνευθεί το πρώτο ψηφίο της ακολουθίας, δηλαδή } 1$$

$$S_2 : \text{Έχει ανιχνευθεί το τμήμα } 10$$

$$S_3 : \text{Έχει ανιχνευθεί ολόκληρη η ακολουθία } 101$$

Επειδή η μηχανή είναι Moore, η έξοδος αντιστοιχίζεται στις καταστάσεις:

$$S_0/0, \quad S_1/0, \quad S_2/0, \quad S_3/1$$

Αφού υπάρχουν τέσσερις καταστάσεις, απαιτούνται δύο flip-flops για την κωδικοποίησή τους. Έστω ότι οι έξοδοι των flip-flops είναι Q_1 και Q_0. Επιλέγουμε την εξής κωδικοποίηση:

$$S_0 = 00, \quad S_1 = 01, \quad S_2 = 10, \quad S_3 = 11$$

Ο πίνακας μεταβάσεων της μηχανής είναι ο εξής:

Τρέχουσα κατάσταση	X	Επόμενη κατάσταση	Z
S_0	0	S_0	0
S_0	1	S_1	0
S_1	0	S_2	0
S_1	1	S_1	0
S_2	0	S_0	0
S_2	1	S_3	0
S_3	0	S_2	1
S_3	1	S_1	1

Η μετάβαση από την κατάσταση S_3 εξαρτάται από το αν επιτρέπουμε επικαλυπτόμενες ακολουθίες. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επιτρέπεται επικάλυψη. Για παράδειγμα, στην ακολουθία εισόδου 10101, η ακολουθία 101 εμφανίζεται δύο φορές με κοινά ψηφία.

Με βάση την κωδικοποίηση των καταστάσεων, γράφουμε τον αναλυτικό πίνακα κατάστασης:

Q_1	Q_0	X	Q_1^+	Q_0^+	Z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

Επειδή χρησιμοποιούνται D Flip-Flops, ισχύει ότι η είσοδος κάθε flip-flop είναι ίση με την επόμενη τιμή της αντίστοιχης εξόδου:

$$D_1 = Q_1^+$$

$$D_0 = Q_0^+$$

Άρα, από τον πίνακα κατάστασης πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις D_1, D_0 και Z ως συναρτήσεις των Q_1, Q_0 και X.

Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_1 παίρνει τιμή 1 στις περιπτώσεις:

$$(Q_1, Q_0, X) = (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$$

Άρα:

$$D_1 = \overline{Q_1}Q_0\overline{X} + Q_1\overline{Q_0}X + Q_1Q_0\overline{X}$$

Οι δύο όροι που περιέχουν $\overline{X}$ μπορούν να ομαδοποιηθούν:

$$D_1 = Q_0\overline{X} + Q_1\overline{Q_0}X$$

Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_0 παίρνει τιμή 1 στις περιπτώσεις όπου $X = 1$. Συγκεκριμένα:

$$D_0 = X$$

Τέλος, επειδή η μηχανή είναι Moore, η έξοδος Z εξαρτάται μόνο από την κατάσταση. Η έξοδος γίνεται 1 μόνο στην κατάσταση:

$$S_3 = 11$$

Άρα:

$$Z = Q_1Q_0$$

Επομένως, οι τελικές συναρτήσεις του κυκλώματος είναι:

$$D_1 = Q_0\overline{X} + Q_1\overline{Q_0}X$$

$$D_0 = X$$

$$Z = Q_1 Q_0$$

Το κύκλωμα υλοποιείται με δύο D Flip-Flops, των οποίων οι έξοδοι είναι Q_1 και Q_0. Η είσοδος του πρώτου flip-flop είναι η συνάρτηση D_1, ενώ η είσοδος του δεύτερου flip-flop είναι η συνάρτηση D_0. Η έξοδος της Moore μηχανής προκύπτει από μια πύλη AND μεταξύ των Q_1 και Q_0.

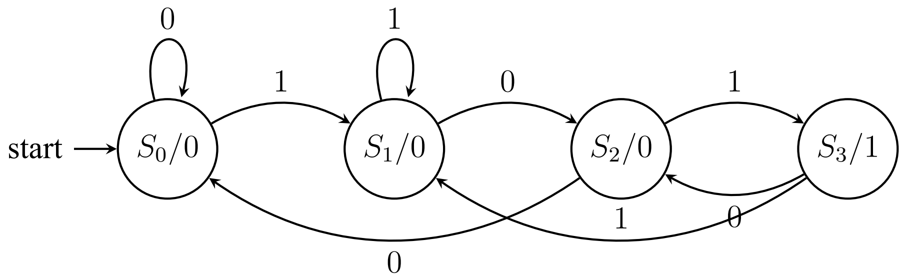
Finite State Diagram για Moore FSM

Για τη μηχανή Moore που ανιχνεύει την ακολουθία 101, οι καταστάσεις είναι:

$$S_0/0, \quad S_1/0, \quad S_2/0, \quad S_3/1$$

όπου το πρώτο μέρος δηλώνει την κατάσταση και το δεύτερο μέρος δηλώνει την έξοδο της κατάστασης.

Το διάγραμμα καταστάσεων είναι:



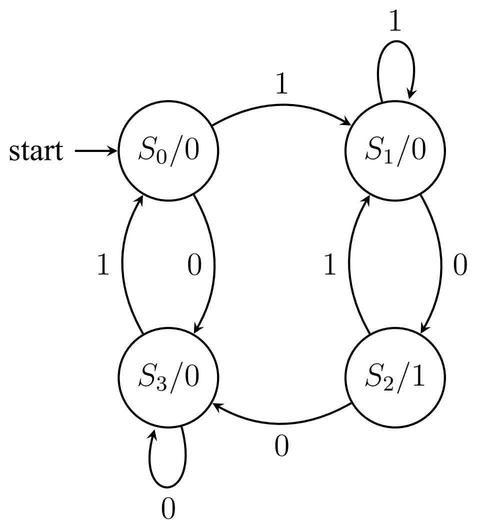
Στο παραπάνω διάγραμμα κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μία κατάσταση της Moore μηχανής. Η μορφή S_i/Z δηλώνει ότι όταν το κύκλωμα βρίσκεται στην κατάσταση S_i, η έξοδος έχει τιμή Z.

Οι ακμές δείχνουν τις μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων. Επειδή πρόκειται για Moore μηχανή, πάνω στα βέλη αναγράφεται μόνο η τιμή της εισόδου X που προκαλεί τη μετάβαση. Η έξοδος δεν γράφεται πάνω στις ακμές, αλλά μέσα στις ίδιες τις καταστάσεις.

Η κατάσταση S_0 είναι η αρχική κατάσταση, όπου δεν έχει αναγνωριστεί κανένα χρήσιμο τμήμα της ακολουθίας. Η κατάσταση S_1 δηλώνει ότι έχει αναγνωριστεί το ψηφίο 1, ενώ η κατάσταση S_2 δηλώνει ότι έχει αναγνωριστεί το τμήμα 10. Όταν το κύκλωμα δεχθεί στη συνέχεια είσοδο 1, μεταβαίνει στην κατάσταση S_3, όπου η έξοδος γίνεται $Z = 1$, επειδή έχει ανιχνευθεί η ακολουθία 101.

Παράδειγμα με Δοσμένο State Diagram και Χρήση D Flip-Flops

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα καταστάσεων μιας Moore μηχανής:



Να υλοποιηθεί η παραπάνω Moore μηχανή με D Flip-Flops.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η μηχανή έχει τέσσερις καταστάσεις:

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3$$

Άρα απαιτούνται δύο flip-flops, αφού:

$$2^2 = 4$$

Έστω ότι οι έξοδοι των δύο D Flip-Flops είναι Q_1 και Q_0. Επιλέγουμε την εξής κωδικοποίηση καταστάσεων:

$$S_0 = 00, \quad S_1 = 01, \quad S_2 = 10, \quad S_3 = 11$$

Από το state diagram προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβάσεων:

Τρέχουσα κατάσταση	X	Επόμενη κατάσταση	Z
S_0	0	S_3	0
S_0	1	S_1	0
S_1	0	S_2	0
S_1	1	S_1	0
S_2	0	S_3	1
S_2	1	S_1	1
S_3	0	S_3	0
S_3	1	S_0	0

Με βάση την κωδικοποίηση των καταστάσεων, ο πίνακας γράφεται αναλυτικά ως εξής:

Q_1	Q_0	X	Q_1^+	Q_0^+	Z
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

Επειδή χρησιμοποιούμε D Flip-Flops, ισχύει:

$$D_1 = Q_1^+$$

$$D_0 = Q_0^+$$

Άρα πρέπει να βρούμε τις λογικές συναρτήσεις D_1, D_0 και Z.
Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_1 παίρνει τιμή 1 για τους συνδυασμούς:

$$(Q_1, Q_0, X) = (0,0,0), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)$$

Δηλαδή, το D_1 γίνεται 1 σε όλες τις περιπτώσεις όπου:

$$X = 0$$

Άρα:

$$D_1 = \overline{X}$$

Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_0 παίρνει τιμή 1 για τους συνδυασμούς:

$$(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)$$

Άρα:

$$D_0 = \overline{Q_1 Q_0 X} + \overline{Q_1 Q_0} X + \overline{Q_1} Q_0 X + Q_1 \overline{Q_0 X} + Q_1 \overline{Q_0} X + Q_1 Q_0 \overline{X}$$

Η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί ως:

$$D_0 = \overline{Q_0} + Q_0 \overline{X}$$

ή ισοδύναμα:

$$D_0 = \overline{Q_0} + \overline{X}$$

Τέλος, επειδή η μηχανή είναι Moore, η έξοδος Z εξαρτάται μόνο από την κατάσταση. Από το state diagram βλέπουμε ότι έξοδος $Z = 1$ υπάρχει μόνο στην κατάσταση:

$$S_2 = 10$$

Άρα:

$$Z = Q_1 \overline{Q_0}$$

Επομένως, οι τελικές συναρτήσεις υλοποίησης είναι:

$$D_1 = \overline{X}$$

$$D_0 = \overline{Q_0} + \overline{X}$$

$$Z = Q_1\overline{Q_0}$$

Το τελικό κύκλωμα υλοποιείται με δύο D Flip-Flops. Η είσοδος του πρώτου flip-flop είναι η συνάρτηση D_1, ενώ η είσοδος του δεύτερου flip-flop είναι η συνάρτηση D_0. Η έξοδος Z προκύπτει από μία πύλη AND, στην οποία οδηγούνται το Q_1 και το $\overline{Q_0}$.

3 Μηχανή Καταστάσεων Mealy

Η μηχανή καταστάσεων τύπου Mealy αποτελεί τον δεύτερο βασικό τρόπο υλοποίησης Πεπερασμένων Μηχανών Καταστάσεων. Το κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι η έξοδος του συστήματος εξαρτάται όχι μόνο από την τρέχουσα κατάσταση, αλλά και από την τρέχουσα τιμή της εισόδου.

Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση εξόδου σε μια Mealy μηχανή δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \lambda(S, X)$$

ενώ η συνάρτηση μετάβασης καταστάσεων δίνεται από τη σχέση:

$$S_{next} = \delta(S_{current}, X)$$

Αυτό σημαίνει ότι η έξοδος μπορεί να αλλάξει άμεσα όταν μεταβληθεί η είσοδος, ακόμη και αν το κύκλωμα δεν έχει προλάβει να μεταβεί σε νέα κατάσταση. Η συμπεριφορά αυτή κάνει τις Mealy μηχανές πιο γρήγορες ως προς την απόκριση, αφού η έξοδος δεν χρειάζεται απαραίτητα να περιμένει τον επόμενο παλμό του ρολογιού για να μεταβληθεί.

Σε διαγράμματα καταστάσεων, η Mealy μηχανή αναπαρίσταται με κόμβους που δηλώνουν μόνο τις καταστάσεις. Η έξοδος δεν γράφεται μέσα στους κόμβους, αλλά πάνω στις ακμές, μαζί με την είσοδο που προκαλεί τη μετάβαση. Η συνηθισμένη μορφή γραφής πάνω σε κάθε ακμή είναι:

$$X/Z$$

όπου X είναι η τιμή της εισόδου και Z είναι η αντίστοιχη τιμή της εξόδου για τη συγκεκριμένη μετάβαση.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των Mealy μηχανών είναι ότι συνήθως απαιτούν μικρότερο αριθμό καταστάσεων σε σχέση με μια αντίστοιχη Moore μηχανή. Αυτό συμβαίνει επειδή η έξοδος μπορεί να παραχθεί κατά τη μετάβαση από μία κατάσταση σε μία άλλη, χωρίς να χρειάζεται απαραίτητα να δημιουργηθεί ξεχωριστή κατάσταση μόνο για την εμφάνιση μιας συγκεκριμένης εξόδου.

Ωστόσο, επειδή η έξοδος εξαρτάται άμεσα από την είσοδο, η Mealy μηχανή μπορεί να είναι πιο ευαίσθητη σε στιγμιαίες μεταβολές ή θόρυβο στην είσοδο. Αν η είσοδος αλλάξει προσωρινά ή παρουσιάσει αστάθεια, τότε μπορεί να εμφανιστούν ανεπιθύμητες στιγμιαίες μεταβολές στην έξοδο, γνωστές ως glitches. Για τον λόγο αυτό, στις πρακτικές υλοποιήσεις απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στον χρονισμό και στη σταθερότητα των σημάτων εισόδου.

Από υλοποιητικής πλευράς, μια Mealy μηχανή αποτελείται από:

- Ένα σύνολο flip-flops που αποθηκεύουν την τρέχουσα κατάσταση
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα που υπολογίζει την επόμενη κατάσταση
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα εξόδου που εξαρτάται τόσο από την τρέχουσα κατάσταση όσο και από την είσοδο

Η βασική δομή της Mealy μηχανής επιτρέπει στην έξοδο να επηρεάζεται άμεσα από την είσοδο, κάτι που οδηγεί σε ταχύτερη απόκριση και συχνά σε πιο οικονομική υλοποίηση ως προς τον αριθμό των καταστάσεων. Παρόλα αυτά, η άμεση εξάρτηση της εξόδου από την είσοδο καθιστά τη συμπεριφορά της λιγότερο σταθερή σε σχέση με μια Moore μηχανή, ειδικά όταν οι είσοδοι δεν είναι πλήρως συγχρονισμένες ή παρουσιάζουν θόρυβο.

Παράδειγμα Σχεδίασης Mealy FSM με D Flip-Flops

Να σχεδιαστεί μια μηχανή καταστάσεων τύπου Mealy, η οποία δέχεται σειριακά μια δυαδική είσοδο X και παράγει έξοδο $Z = 1$ όταν ανιχνευθεί η ακολουθία 101. Σε κάθε άλλη περίπτωση η έξοδος είναι $Z = 0$.

Επειδή η μηχανή είναι τύπου Mealy, η έξοδος εξαρτάται τόσο από την τρέχουσα κατάσταση όσο και από την είσοδο. Επομένως, η έξοδος μπορεί να παραχθεί τη στιγμή που λαμβάνεται το τελευταίο ψηφίο της ακολουθίας, χωρίς να απαιτείται ξεχωριστή κατάσταση εξόδου.

Ορίζουμε τις καταστάσεις της μηχανής ως εξής:

$$S_0 : \text{Δεν έχει ανιχνευθεί κανένα χρήσιμο τμήμα της ακολουθίας}$$

$$S_1 : \text{Έχει ανιχνευθεί το πρώτο ψηφίο της ακολουθίας, δηλαδή } 1$$

$$S_2 : \text{Έχει ανιχνευθεί το τμήμα } 10$$

Η ζητούμενη ακολουθία είναι:

$$101$$

Άρα η έξοδος θα γίνει $Z = 1$ όταν το κύκλωμα βρίσκεται στην κατάσταση S_2, δηλαδή έχει ήδη ανιχνεύσει το 10, και η νέα είσοδος είναι $X = 1$.

Ο πίνακας μεταβάσεων της Mealy μηχανής είναι:

Τρέχουσα κατάσταση	X	Επόμενη κατάσταση	Z
S_0	0	S_0	0
S_0	1	S_1	0
S_1	0	S_2	0
S_1	1	S_1	0
S_2	0	S_0	0
S_2	1	S_1	1

Στην τελευταία γραμμή του πίνακα, όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση S_2 και η είσοδος είναι $X = 1$, έχει ανιχνευθεί η ακολουθία 101, επομένως η έξοδος γίνεται $Z = 1$. Η επόμενη κατάσταση είναι S_1, επειδή το τελευταίο ψηφίο της ακολουθίας είναι 1 και μπορεί να αποτελέσει την αρχή μιας νέας ακολουθίας. Με αυτόν τον τρόπο επιτρέπεται η ανίχνευση επικαλυπτόμενων ακολουθιών.

Επειδή υπάρχουν τρεις καταστάσεις, απαιτούνται δύο D Flip-Flops, αφού:

$$2^2 = 4$$

Έστω ότι οι έξοδοι των flip-flops είναι Q_1 και Q_0. Επιλέγουμε την εξής κωδικοποίηση καταστάσεων:

$$S_0 = 00, \quad S_1 = 01, \quad S_2 = 10$$

Η κατάσταση 11 δεν χρησιμοποιείται. Μπορεί να θεωρηθεί αδιάφορη κατάσταση ή να οδηγηθεί πίσω στην αρχική κατάσταση S_0 για λόγους ασφάλειας.

Με βάση την παραπάνω κωδικοποίηση, ο αναλυτικός πίνακας κατάστασης είναι:

Q_1	Q_0	X	Q_1^+	Q_0^+	Z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	d	d	d
1	1	1	d	d	d

Το σύμβολο d δηλώνει αδιάφορη τιμή, επειδή η κατάσταση 11 δεν χρησιμοποιείται στη λειτουργία της μηχανής.

Για τα D Flip-Flops ισχύει:

$$D_1 = Q_1^+$$

$$D_0 = Q_0^+$$

Άρα πρέπει να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις D_1, D_0 και Z.

Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_1 γίνεται 1 μόνο όταν:

$$Q_1 = 0, \quad Q_0 = 1, \quad X = 0$$

δηλαδή:

$$D_1 = \overline{Q_1} Q_0 \overline{X}$$

Επειδή η κατάσταση 11 είναι αδιάφορη, η συνάρτηση μπορεί να απλοποιηθεί σε:

$$D_1 = Q_0 \overline{X}$$

Από τον πίνακα, η συνάρτηση D_0 γίνεται 1 όταν η είσοδος είναι $X = 1$ στις κανονικές καταστάσεις λειτουργίας. Συγκεκριμένα, για κάθε χρησιμοποιούμενη κατάσταση, όταν $X = 1$, η επόμενη κατάσταση έχει $Q_0^+ = 1$. Επομένως:

$$D_0 = X$$

Τέλος, η έξοδος Z γίνεται 1 μόνο όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση $S_2 = 10$ και η είσοδος είναι $X = 1$. Άρα:

$$Z = Q_1\overline{Q_0}X$$

Επομένως, οι τελικές συναρτήσεις υλοποίησης είναι:

$$D_1 = Q_0\overline{X}$$

$$D_0 = X$$

$$Z = Q_1\overline{Q_0}X$$

Το τελικό κύκλωμα υλοποιείται με δύο D Flip-Flops. Η είσοδος του πρώτου flip-flop είναι η συνάρτηση D_1, ενώ η είσοδος του δεύτερου flip-flop είναι η συνάρτηση D_0. Η έξοδος της Mealy μηχανής προκύπτει από την πύλη AND των σημάτων Q_1, $\overline{Q_0}$ και X.

Παρατηρούμε ότι η Mealy μηχανή χρειάζεται μόνο τρεις καταστάσεις για την ανίχνευση της ακολουθίας 101, ενώ η αντίστοιχη Moore μηχανή χρειάστηκε τέσσερις. Αυτό συμβαίνει επειδή στη Mealy μηχανή η έξοδος παράγεται πάνω στη μετάβαση, τη στιγμή που λαμβάνεται το τελευταίο ψηφίο της ακολουθίας.

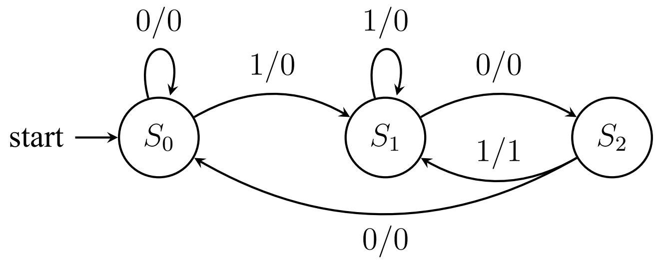
Finite State Diagram για Mealy FSM

Για τη Mealy μηχανή ανίχνευσης της ακολουθίας 101, οι καταστάσεις είναι:

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2$$

Σε αντίθεση με τη Moore μηχανή, εδώ η έξοδος δεν ανήκει στις καταστάσεις αλλά στις μεταβάσεις.

Το διάγραμμα καταστάσεων είναι:



Στο παραπάνω διάγραμμα, κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μία κατάσταση της Mealy μηχανής, χωρίς να περιλαμβάνει την έξοδο. Η έξοδος εμφανίζεται πάνω στις ακμές, μαζί με την τιμή της εισόδου, με μορφή X/Z.

Η κατάσταση S_0 είναι η αρχική κατάσταση. Όταν η είσοδος είναι 1, η μηχανή μεταβαίνει στην κατάσταση S_1, ενώ για είσοδο 0 παραμένει στην ίδια κατάσταση.

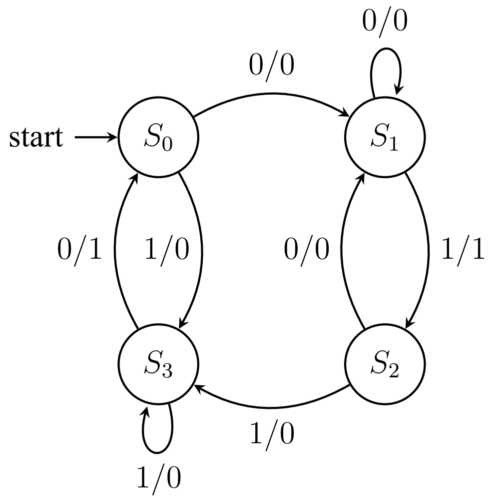
Η κατάσταση S_1 δηλώνει ότι έχει ανιχνευθεί το ψηφίο 1. Αν η επόμενη είσοδος είναι 0, η μηχανή μεταβαίνει στην κατάσταση S_2, που αντιστοιχεί στην ανίχνευση του τμήματος 10.

Όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση S_2 και η είσοδος γίνει 1, τότε ανιχνεύεται η ακολουθία 101 και η έξοδος γίνεται $Z = 1$. Η μετάβαση οδηγεί στην κατάσταση S_1, ώστε να επιτρέπεται η ανίχνευση επικαλυπτόμενων ακολουθιών.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος ενεργοποιείται κατά τη διάρκεια της μετάβασης και όχι σε κάποια συγκεκριμένη κατάσταση, κάτι που αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό των Mealy μηχανών.

Παράδειγμα με Δοσμένο Mealy State Diagram και Χρήση D Flip-Flops

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα καταστάσεων μιας Mealy μηχανής:



Να υλοποιηθεί η παραπάνω Mealy μηχανή με D Flip-Flops.
Αρχικά, παρατηρούμε ότι η μηχανή έχει τέσσερις καταστάσεις:

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3$$

Άρα απαιτούνται δύο flip-flops, αφού:

$$2^2 = 4$$

Έστω ότι οι έξοδοι των δύο D Flip-Flops είναι Q_1 και Q_0. Επιλέγουμε την εξής κωδικοποίηση καταστάσεων:

$$S_0 = 00, \quad S_1 = 01, \quad S_2 = 10, \quad S_3 = 11$$

Από το state diagram προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβάσεων. Επειδή η μηχανή είναι Mealy, η έξοδος Z γράφεται πάνω στις μεταβάσεις και εξαρτάται από την τρέχουσα κατάσταση και την είσοδο.

Τρέχουσα κατάσταση	X	Επόμενη κατάσταση	Z
S_0	0	S_1	0
S_0	1	S_3	0
S_1	0	S_1	0
S_1	1	S_2	1
S_2	0	S_1	0
S_2	1	S_3	0
S_3	0	S_0	1
S_3	1	S_3	0

Με βάση την κωδικοποίηση των καταστάσεων, ο πίνακας γράφεται αναλυτικά ως εξής:

Q_1	Q_0	X	Q_1^+	Q_0^+	Z
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Για τα D Flip-Flops ισχύει:

$$D_1 = Q_1^+$$

$$D_0 = Q_0^+$$

Άρα πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις D_1, D_0 και Z.

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το D_1 παίρνει τιμή 1 σε όλες τις γραμμές όπου $X = 1$, ενώ για $X = 0$ παίρνει τιμή 0. Επομένως:

$$D_1 = X$$

Για τη συνάρτηση D_0, βλέπουμε ότι παίρνει τιμή 0 μόνο στις περιπτώσεις:

$$(Q_1, Q_0, X) = (0, 1, 1), (1, 1, 0)$$

Άρα:

$$D_0 = \overline{Q_1 Q_0} + \overline{Q_1} Q_0 \overline{X} + Q_1 \overline{Q_0} + Q_1 Q_0 X$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί ως:

$$D_0 = \overline{Q_0} + \overline{Q_1 X} + Q_1 X$$

Τέλος, από τον πίνακα βλέπουμε ότι η έξοδος Z γίνεται 1 στις περιπτώσεις:

$$(Q_1, Q_0, X) = (0, 1, 1), (1, 1, 0)$$

Άρα:

$$Z = \overline{Q_1} Q_0 X + Q_1 Q_0 \overline{X}$$

ή ισοδύναμα:

$$Z = Q_0(\overline{Q_1} X + Q_1 \overline{X})$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος εξαρτάται τόσο από την κατάσταση (Q_1, Q_0) όσο και από την είσοδο X, όπως συμβαίνει σε κάθε Mealy μηχανή.

Επομένως, οι τελικές συναρτήσεις υλοποίησης είναι:

$$D_1 = X$$

$$D_0 = \overline{Q_0} + \overline{Q_1 X} + Q_1 X$$

$$Z = \overline{Q_1} Q_0 X + Q_1 Q_0 \overline{X}$$

Το τελικό κύκλωμα υλοποιείται με δύο D Flip-Flops. Η είσοδος του πρώτου flip-flop είναι η συνάρτηση D_1, ενώ η είσοδος του δεύτερου flip-flop είναι η συνάρτηση D_0. Η έξοδος Z προκύπτει από συνδυαστικό κύκλωμα που δέχεται ως εισόδους τα Q_1, Q_0 και X.