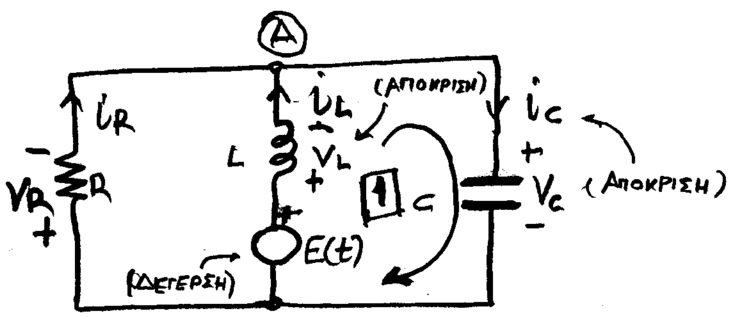
Απλό παράδειγμα γραφής εξισώσεων καταστάσεως

Έστω το ηλεκτρικό δίκτυο:



Διέγερση: $E(t)$

Αποκρίσεις ή έξοδοι: $V_L(t)$, $i_c(t)$

Μεταβλητές καταστάσεως: $i_L(t)$, $V_c(t)$ (τάξη $= 2$)

Οι εξισώσεις καταστάσεως θα έχουν την μορφή:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = \hat{A}\cdot\hat{X}(t) + \hat{B}\,E(t)$$

όπου $\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix}$ διάνυσμα καταστάσεως

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

οι συντελεστές $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, B_1, B_2$ θα προσδιοριστούν από τα στοιχεία του δικτύου (R, L, C) εφαρμόζοντας απλούς Νόμους Kirchhoff (ΝΡΚ, ΝΤΚ)

Π.χ. γράφουμε τον Ν.Ρ.Κ. στον κόμβο A

$$i_R + i_L - i_c = 0 \quad (1)$$

το i_L είναι μεταβλητή καταστάσεως (δεν το πειράζουμε)

το i_c μπορεί να γραφεί

$$i_c(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt} \quad (2)$$

το $\dfrac{dV_c(t)}{dt}$ είναι παράγωγος της $2^{ης}$ μεταβλητής καταστάσεως και το κρατάμε

Πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη έκφραση για το $\hat{i}_R$ (δηλ η έκφραση να περιέχει i_L, V_C και ίσως $E(t)$)

Παρατηρούμε αμέσως ότι:

γιατί θέλει (−) ?

$$V_R(t) = R i_R(t) = -V_C(t)$$ (τα R και C συνδέονται παρ/λα)

άρα $i_R(t) = \frac{1}{R} V_R(t) = \frac{-1}{R} V_C(t)$ (3)

απο (1), (2) και (3) έχουμε:

$$-\frac{1}{R} V_C(t) + i_L(t) - C\frac{dV_C(t)}{dt} = 0$$

ή

$$\boxed{\frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{RC} V_C(t)} \qquad (4)$$

η σχέση (4) είναι η μία εξίσωση καταστάσεως!

Ψάχνουμε για την άλλη εξίσωση καταστάσεως
Προφανώς θέλουμε να βρούμε μια έκφραση του μεγέθους $\frac{di_L(t)}{dt}$ συναρτήσει των $i_L(t)$, $V_C(t)$ και $E(t)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Δέν είναι απαραίτητο να συμπεριλαμβάνονται στην έκφραση που ψάχνουμε, και το $i_L(t)$, και το $V_C(t)$ και το $E(t)$

Γράφουμε τον N.T.K. στον βρόχο $\boxed{1}$ (Βλ σχήμα δικτύου)

$$-E(t) + V_L(t) + V_C(t) = 0$$

αλλά $V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ και θα πάρουμε:

$$-E(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + V_C(t) = 0$$ ή

$$\boxed{\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L} V_C(t) + \frac{1}{L} E(t)} \quad (5)$$

η σχέση αυτή είναι η άλλη εξίσωση καταστάσεως που ψάχνουμε !

Έτσι έχουμε τελικά τις δύο εξισώσεις καταστάσεως

$$\frac{d\hat{i}_L(t)}{dt} = -\frac{1}{L}V_C(t) + \frac{1}{L}E(t)$$

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{RC}V_c(t)$$

ή σε μορφή πινάκων:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{i}_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} E(t)$$

οι εξισώσεις καταστάσεως.

Παρακάτω θα βρούμε τις εξισώσεις εξόδου. Αυτές θα έχουν τη μορφή

$$\hat{y}(t) = \hat{C}\cdot\hat{x}(t) + \hat{D}\,E(t)$$

όπου:

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} V_L(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix}$$ διάνυσμα εξόδου

Παρατηρώντας το δίκτυο έχουμε:

από Ν.Τ.Κ. 1 $\quad -E(t) + V_L(t) + V_c(t) = 0$

άρα: $\boxed{V_L(t) = -V_c(t) + E(t)}$ (η πρώτη εξίσωση εξόδου!)

και από ΝΡΚ (A):

$$i_R(t) + i_L(t) - i_c(t) = 0$$

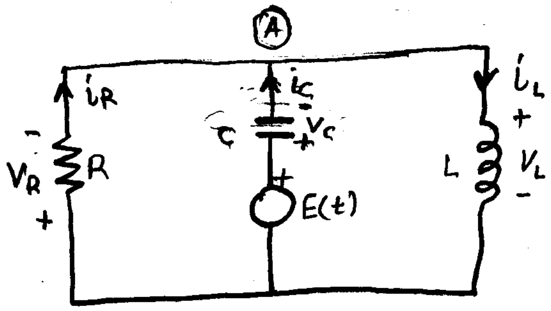
άρα: $i_c(t) = i_R(t) + i_L(t)$ και $i_R(t) = -\frac{1}{R}V_c(t)$

και τελικά: $\boxed{i_c(t) = i_L(t) - \frac{1}{R}V_c(t)}$ (η δεύτερη εξίσωση εξόδου) οι εξισώσεις εξόδου σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} V_L(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E(t)$$

Άσκηση

Στό παρακάτω δίκτυο (προήλθε από το προηγούμενο με αντιμετάθεση του πηνίου L με τον πυκνωτή C), να γραφούν οι εξισώσεις καταστάσεως.



Διέγερση: $E(t)$

Μεταβλητές καταστάσεως $i_L(t)$, $V_c(t)$

Απάντηση: (αποδείξτε την!)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\hat{B}} E(t)$$