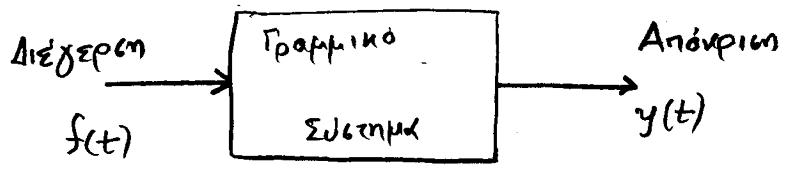
# Συστήματα στη Μόνιμη Κατάσταση

## 1) Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ)

Ενα γραμμικό και χρονικά σταθερό σύστημα περιγράφεται πλήρως απο μια γραμμική Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές




$$\text{Δ.Ε.}\quad \alpha_n \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 y + \alpha_0 = $$
$$= b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 f + b_0$$

(όπου για πραγματικά (φυσικά) συστήματα ισχύει πάντα : $m \leq n$)

Η Δ.Ε. συνοδεύεται και από τις Α.Σ. (αρχικές συνθήκες) οι οποίες δέν θα μας απασχολήσουν εδώ γιατι μελετάμε τη μόνιμη κατάσταση του συστήματος. Η μόνιμη κατάσταση εκφράζεται απο την μερική λύση της Δ.Ε.

Όταν η διέγερση είναι της μορφής:

$$f(t) \quad F_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

δηλ ένα καθαρό ημίτονο με συχνότητα $\omega_1$, πλάτος $F_m$ και αρχική φάση $\varphi$, τότε η μόνιμη απόκριση δηλ η μερική λύση $y_{\text{μον}}(t)$ της Δ.Ε. θα είναι:

$$y_{\text{μον}}(t) = Y_m \sin(\omega_1 + \vartheta)$$

δηλ ένα ημίτονο με την ίδια συχνότητα $\omega_1$ και διαφορετικό πλάτος και φάση $Y_m$ και $\vartheta$ αντίστοιχα. Τα μεγέθη $Y_m$ και $\vartheta$ πρέπει να υπολογισθούν.

Η $y_{\text{μον}}(t)$ μπορεί να βρεθεί με τριγωνομετρικούς υπολογισμούς, οι οποίοι δεν είναι δύσκολοι, αλλα έχουν μεγάλη έκταση και απαιτούν πολύ χρόνο!

Παρακάτω δείχνουμε έναν πολύ απλούστερο τρόπο εύρεσης της $y_{\text{μον}}(t)$ κάνοντας χρήση μιγαδικής άλγεβρας.

· Έχουμε λοιπόν: ②

- Διέγερση $f(t) = F_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$ με αντίστοιχο phasor

$$\bar{F} = F_m e^{j\varphi}$$

η απόκριση (μόνιμη) θα είναι:

$$y_{MON}(t) = Y_m \sin(\omega_1 t + \vartheta)$$

με phasor $\bar{Y} = Y_m e^{j\vartheta}$ (θα έχει το ίδιο $\omega = \omega_1$)

όπου πρέπει να βρεθούν τα μεγέθη $Y_m$ και $\vartheta$

Αποδεικνύεται (σχετικά εύκολα) ότι θα ισχύει η σχέση:

από Δ.Ε.

$$\alpha_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 y(t) + \alpha_0 =$$

$$= b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 f(t) + b_0$$

ή

$$A(D)\, y(t) = B(D)\, f(t) \qquad \left(\text{όπου } D = \frac{d}{dt}(\dots),\ D^k = \frac{d^k}{dt^k}(\dots)\right)$$

θα προκύψει η σχέση

$$A(j\omega_1)\bar{Y} = B(j\omega_1)\bar{F}$$

ή πιο απλά:

$$\bar{Y} = \frac{B(j\omega_1)}{A(j\omega_1)} \bar{F} = Y_m e^{j\vartheta}$$

και βρίσκουμε αμέσως το $y_{MON}(t)$

Παράδειγμα

· Έστω η Δ.Ε. $(D^2 + 3D + 5)\, y(t) = (D + 2)\, f(t)$

όπου $f(t) = 12 \sin(5t + 33^\circ)$. Υπολογίστε την $y_{MON}(t)$

Λύση:

η $y_{MON}(t)$ θα είναι η $y_{MEP}(t)$ της Δ.Ε. δηλαδή

από την σχέση $\bar{Y} = \dfrac{B(j\omega_1)}{A(j\omega_1)} \bar{F}$ θα πάρουμε:

$\omega_1 = 5\ r/sec$, $\bar{F} = 12 e^{j33^\circ}$ άρα:

$$Y = \frac{j\omega_1 + 2}{(j\omega_1)^2 + 3(j\omega_1) + 5} \cdot 12\angle 33^\circ = \frac{j5 + 2}{(j5)^2 + 3(j5) + 5} \cdot 12\angle 33^\circ$$

ή $\bar{Y} = \dfrac{j5+2}{-25+j15+5} \cdot 12\angle 33^\circ = \dfrac{j5+2}{-20+j15} \cdot 12\angle 33^\circ = 2.5849\angle -41.9^\circ$

άρα $\bar{Y} = 2.5849\, e^{-j41.9^\circ}$

και $\boxed{y_{MON}(t) = 2.5849 \sin(5t - 41.9^\circ)}$

2) Εκθετική Μόνιμη Κατάσταση (Ε.Μ.Κ.)

Η περίπτωση $\alpha(t) = A_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$ "εμπλουτίζεται" με τον παράγοντα $e^{\sigma t}$ δηλαδή θεωρούμε ότι όλα τα μεγέθη του συστήματος έχουν τη μορφή:

$$\alpha(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$ (όπου συνήθως $\sigma \leq 0$)

δηλαδή θεωρούμε πιό "σύνθετες" καταστάσεις, και ειδικότερα

- αν $\sigma = 0$ έχουμε $\alpha(t) = A_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$ (Η.Μ.Κ.)
- αν $\omega_1 = 0$ έχουμε $\alpha(t) = A_m' e^{\sigma t}$ (καθαρά εκθετικές συναρτήσεις) $(A_m' = A_m \sin\varphi = \text{σταθ})$
- αν $\omega_1 = 0$ και $\sigma = 0$ έχουμε $\alpha(t) = A_m''$ (σταθερές συναρτήσεις)
- αν $\omega_1 \neq 0$ και $\sigma \neq 0$ έχουμε την πλέον γενική κατάσταση $\alpha(t) = A_m e^{\sigma t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$

Τό μέγεθος $\boxed{s = \sigma + j\omega}$ λέγεται "μιγαδική συχνότητα" (complex frequency)

Όλες οι μέθοδοι και κανόνες που ξέρουμε από την Η.Μ.Κ μεταφέρονται στην Ε.Μ.Κ. αντικαθιστώντας το $(j\omega)$ με το $s$

Ετσι π.χ η συναρτηση

$$f(t) = F_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

εχει phasor τόν μιγαδικό αριθμό

$$\bar{F} = F_m e^{j\varphi}$$

και ισχυει $f(t) = \mathrm{Im}\{\bar{F} \cdot e^{st}\} = \mathrm{Im}\{F_m e^{j\varphi} e^{(\sigma + j\omega)t}\}$

δηλαδη

$$f(t) = \mathrm{Im}\{F_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)}\} = F_m e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εστω η Δ.Ε. $(D+6)y(t) = 2f(t)$

αν $f(t) = 15 e^{-3t} \sin(20t - 56^\circ)$ υπολογίστε την $y_{MON}(t) =$

$= y_{MEP}(t)$

Λύση:

Εδω η μιγαδικη συχνότητα εχει την τιμή:

$$s_1 = -3 + j20 \quad (\text{γιατί;})$$

άρα:

$$\bar{Y} = \frac{2}{s_1 + 6} \bar{F} \quad \text{οπου} \quad \bar{F} = 15 e^{-j56^\circ}$$

επομένως:

$$\bar{Y} = \frac{2}{(-3 + j20) + 6} \cdot 15\angle -56^\circ = 1,4834 \angle -137,5^\circ$$

άρα $y_{MEP}(t) = 1.4834 e^{-3t} \sin(20t - 137,5^\circ) = y_{MON}(t)$

Υπενθυμίζεται οτι:

- Απο την Δ.Ε. $(D+6)y(t) = 2f(t)$ θεσαμε οπου $D \to s$

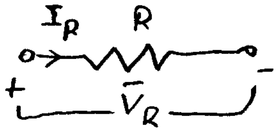
και οπου $\left.\begin{array}{l} y(t) \to \bar{Y} \\ f(t) \to \bar{F} \end{array}\right\}$ phasors

και προεκυψε η σχεση:

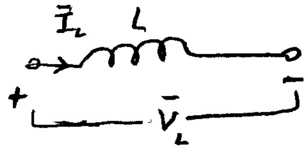
$$(s+6) \cdot \bar{Y}(s) = 2\bar{F}(s)$$

## Σχέσεις τάσεως-ρεύματος για τα στοιχεία R, L, C στην Ε.Μ.Κ.

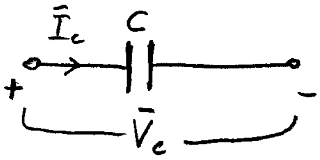
Γνωρίζουμε ότι στην Η.Μ.Κ. ισχύουν οι σχέσεις




$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R$$




$$\bar{V}_L = j\omega L\,\bar{I}_L$$




$$\bar{V}_c = \frac{1}{j\omega C}\,\bar{I}_c$$

Υπενθυμίζεται εδώ ότι:

- Στο πεδίο του χρόνου έχουμε τον τελεστή $D = \frac{d}{dt}(\dots)$ (παράγωγος) ο οποίος αντικαθίσταται στην Η.Μ.Κ. από το $j\omega$

$$D \longleftrightarrow j\omega$$

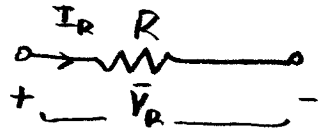
πεδίο χρόνου $t$ — πεδίο συχνότητας (Η.Μ.Κ.)

Με όμοιο σκεπτικό στην Ε.Μ.Κ. (πεδίο μιγαδικής συχνότητας $s$) θα έχουμε

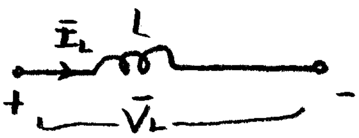
$$\boxed{D \longleftrightarrow j\omega \longleftrightarrow s}$$

πεδίο χρόνου $t$ — πεδίο συχνότητας (Η.Μ.Κ.) — πεδίο μιγαδικής συχνότητας

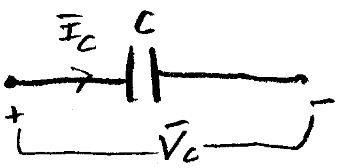
άρα:




$$\bar{V}_R = R\bar{I}_R$$



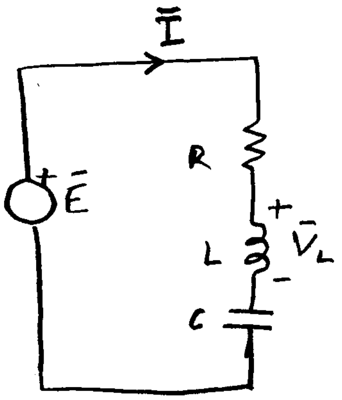

$$\bar{V}_L = sL\cdot\bar{I}_L$$




$$\bar{V}_c = \frac{1}{sC}\,\bar{I}_c$$

Όλοι οι κανόνες που ξέρουμε απο την Η.Μ.Κ. μεταφέρονται στην Ε.Μ.Κ. θέτοντας όπου $j\omega$ τό $s$ (υπενθύμιση $s = \sigma + j\omega$)

Π.χ.

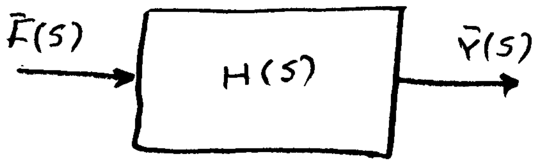



έχουμε

$$\bar{V}_L = \bar{E}\,\frac{sL}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

Αυτή είναι μια πάρα πολύ σπουδαία έννοια στη θεωρία συστημάτων




ορισμός στην Ε.Μ.Κ.

$$H(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{F}(s)}$$

και επειδή ισχύει η σχέση $A(s)\,\bar{Y}(s) = B(s)\,\bar{F}(s)$

θα πάρουμε αμέσως

$$H(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$ άρα και $\boxed{\bar{Y}(s) = H(s)\,\bar{F}(s)}$

η σχέση αυτή έχει μεγάλο πεδίο εφαρμογής!

δηλαδή:

αν το σύστημα έχει (π.χ) διαφορική εξίσωση:

$$(3D^2 + 2D + 1)\,y(t) = (8D + 5)\,f(t)$$

η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(s) = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{8s + 5}{3s^2 + 2s + 1}$$

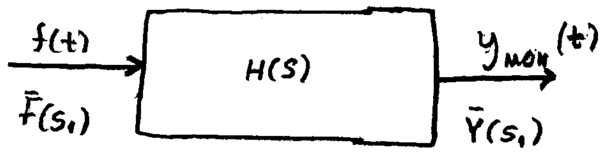
άρα όταν γνωρίζουμε την Δ.Ε. ενός συστήματος, αυτόματα γνωρίζουμε και τη συνάρτηση μεταφοράς και αντίστροφα!

# Παράδειγμα

Ενα σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς: $H(s) = \dfrac{8s+5}{3s^2+2s+1}$

υπολογίστε την μόνιμη αποκρισή του στό σήμα εισόδου

$$f(t) = 10e^{-2t}\sin(8t+20^\circ).$$




Λύση:

-Η μιγαδική συχνότητα θα είναι:

$$s_1 = -2 + j8$$

και ο phasor εισόδου

$$\bar{F}(s_1) = 10e^{j20^\circ}$$

άρα $\bar{Y}(s_1) = H(s_1)\cdot\bar{F}(s_1)$ δηλαδή:

$$\bar{Y}(s_1) = \frac{8(-2+j8)+5}{3\cdot(-2+j8)^2+2(-2+j8)+1}\cdot 10e^{+j20^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{Y}(s_1) = (-0.0779 - j\,0.31567)\cdot 10e^{+j20^\circ} = 3.2514\,e^{-j83.86^\circ}$$

άρα:

$$\boxed{y_{μον}(t) = 3.2514\,e^{-2t}\sin(8t - 83.86^\circ)}$$