ΜΑΘΗΜΑ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ Σ.Α.Ε.

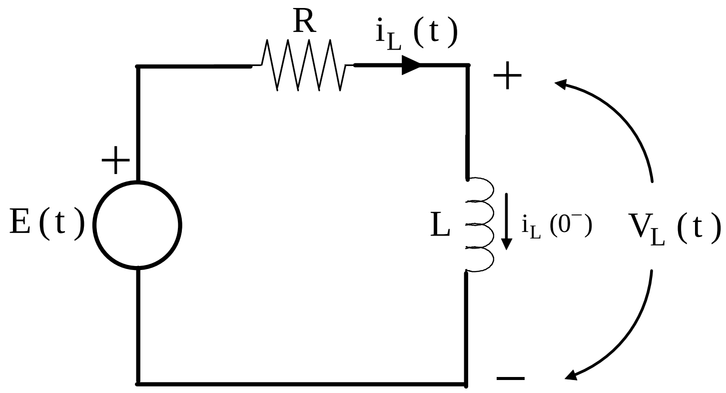
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ R-L σε ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ και ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΠΑΛΜΟ

Δρ. Α. Μαγουλάς

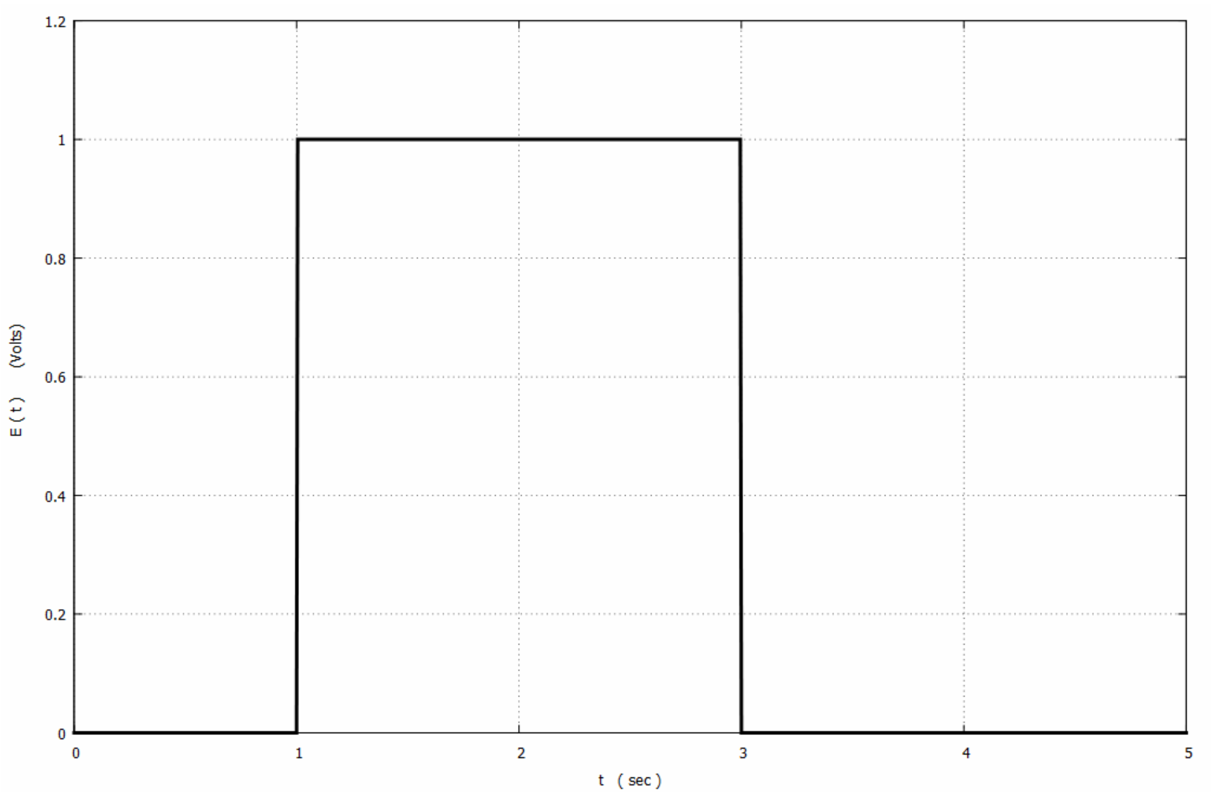
Μάρτιος 2017

1. Εισαγωγή

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα απλό δίκτυο R – L. Διέγερση (είσοδος) του δικτύου θεωρείται η τάση $E(t)$ ενώ σαν απόκριση μπορούμε να πάρουμε την τάση $V_L(t)$ του πηνίου ή το ρεύμα $i_L(t)$ του πηνίου.

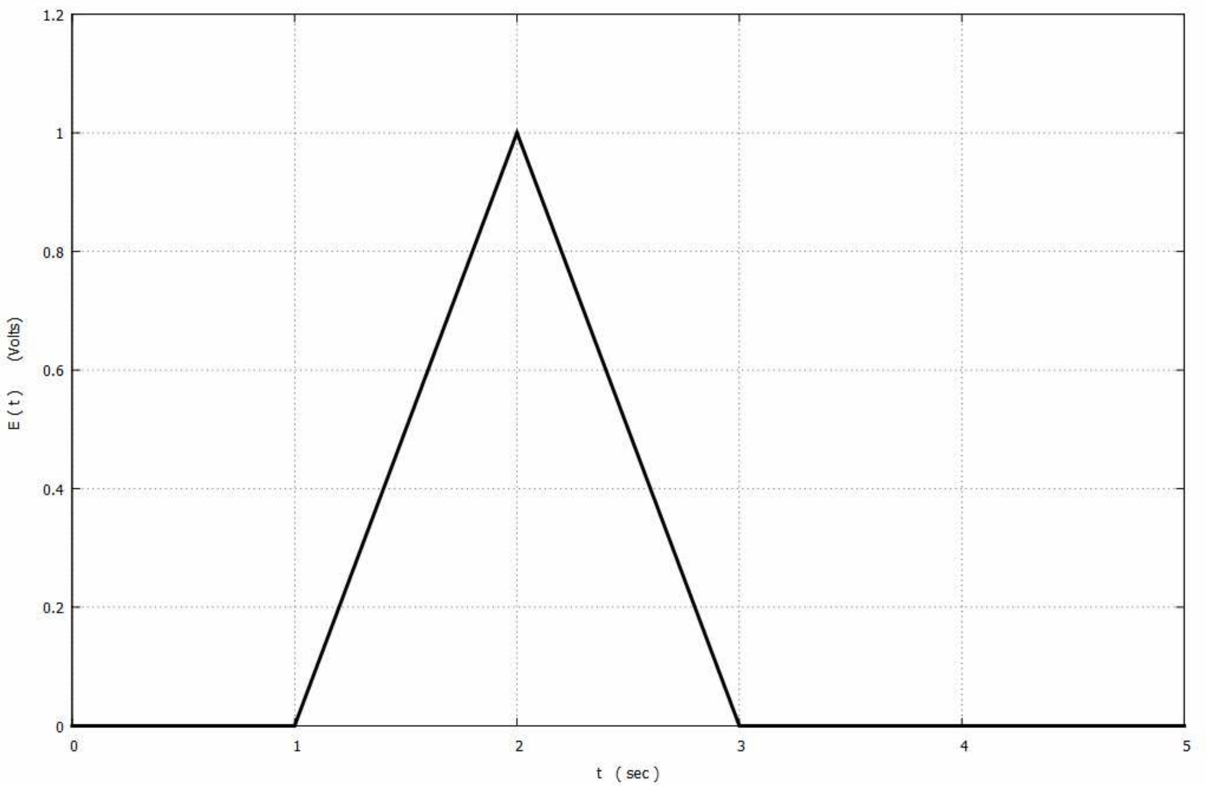


Θα μελετήσουμε τις αποκρίσεις ($V_L(t)$ και $i_L(t)$) που δίνει το δίκτυο αυτό στα δύο ακόλουθα σήματα εισόδου δηλ. ένα τετραγωνικό και ένα τριγωνικό παλμό.



Εύκολα φαίνεται ότι το σήμα τετραγωνικού παλμού $E(t)$ θα γράφεται :

$$E(t) = u(t-1) - u(t-3)$$



Το σήμα τριγωνικού παλμού E (t) θα γράφεται:

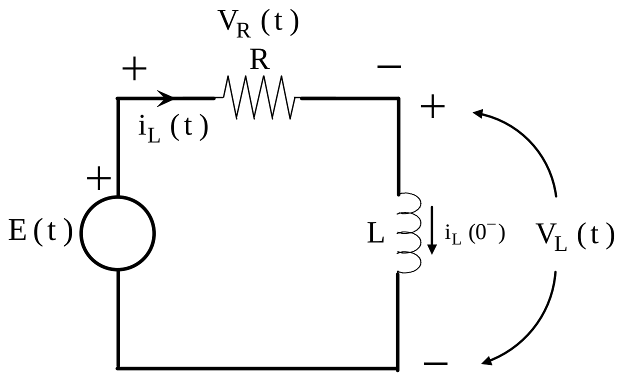
$$E(t) = r(t-1) - 2\,r(t-2) + r(t-3)$$

Βλέπουμε ότι τα δύο σήματα αυτά περιγράφονται με βηματικές και αναρριχητικές συναρτήσεις και επομένως θα ήταν πολύ χρήσιμο να υπολογιστεί η βηματική και η αναρριχητική απόκριση του δικτύου R-L με έξοδο την τάση $V_L(t)$ και το ρεύμα $i_L(t)$. Παρακάτω θα γίνει η εύρεση των αποκρίσεων αυτών.

2. Εύρεση βηματικών και αναρριχητικών αποκρίσεων

2.1 Απόκρίση με έξοδο την τάση $V_L(t)$

Έχουμε το δίκτυο:



Δίδονται και οι τιμές των στοιχείων **R = 4 Ω , L = 0.5 H**

Η Δ.Ε με απόκριση την $V_L(t)$ βρίσκεται εύκολα με εφαρμογή του διαιρέτη τάσεως

$$V_L(t) = E(t)\,\frac{LD}{R + LD}$$

άρα η Δ.Ε. θα είναι: $\left[LD + R \right] V_L(t) = LD\,E(t)$

υπολογίζουμε και την Αρχική Συνθήκη $V_L(0^+)$

Ο Ν. Ρ. Κ. δίνει $-E(t) + V_R(t) + V_L(t) = 0$ ή $-E(t) + R\,i_L(t) + V_L(t) = 0$

άρα $V_L(t) = E(t) - R\,i_L(t)$

και προφανώς $V_L(0^+) = E(0^+) - R\,i_L(0^+)$

Αντικαθιστώντας τιμές στοιχείων γράφουμε πάλι την Δ.Ε και την Α.Σ. που την συνοδεύει

Δ.Ε. $\left[0.5D + 4 \right] V_L(t) = 0.5\,D\,E(t)$

Α.Σ $V_L(0^+) = E(0^+) - 4\,i_L(0^+)$

Χρησιμοποιώντας τις δύο ανωτέρω σχέσεις μπορούμε να βρούμε την βηματική και την αναρριχητική απόκριση

2.1.1 Βηματική απόκριση

Εδώ έχουμε τα δεδομένα $E(t) = u(t)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

άρα Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right]V_L(t) = 0.5\,D\,u(t)$

Α.Σ. $V_L(0^+) = u(0^+) - 4\,i_L(0^+)$

Επειδή $D\,u(t) = 0$ για $t \geq 0^+$ και επίσης $u(0^+) = 1$ θα πάρουμε

$$\text{Δ.Ε.} \quad \left[0.5D + 4\right]V_L(t) = 0$$

$$\text{Α.Σ.} \quad V_L(0^+) = u(0^+) = 1$$

Η λύση της Δ.Ε θα είναι κατά τα γνωστά

$V_{L,\,βημ}(t) = k\,e^{s_1 t}$ όπου $k =$ σταθερά και $s_1 = -8$ (η ρίζα της χ.ε. $0.5\,s + 4 = 0$)

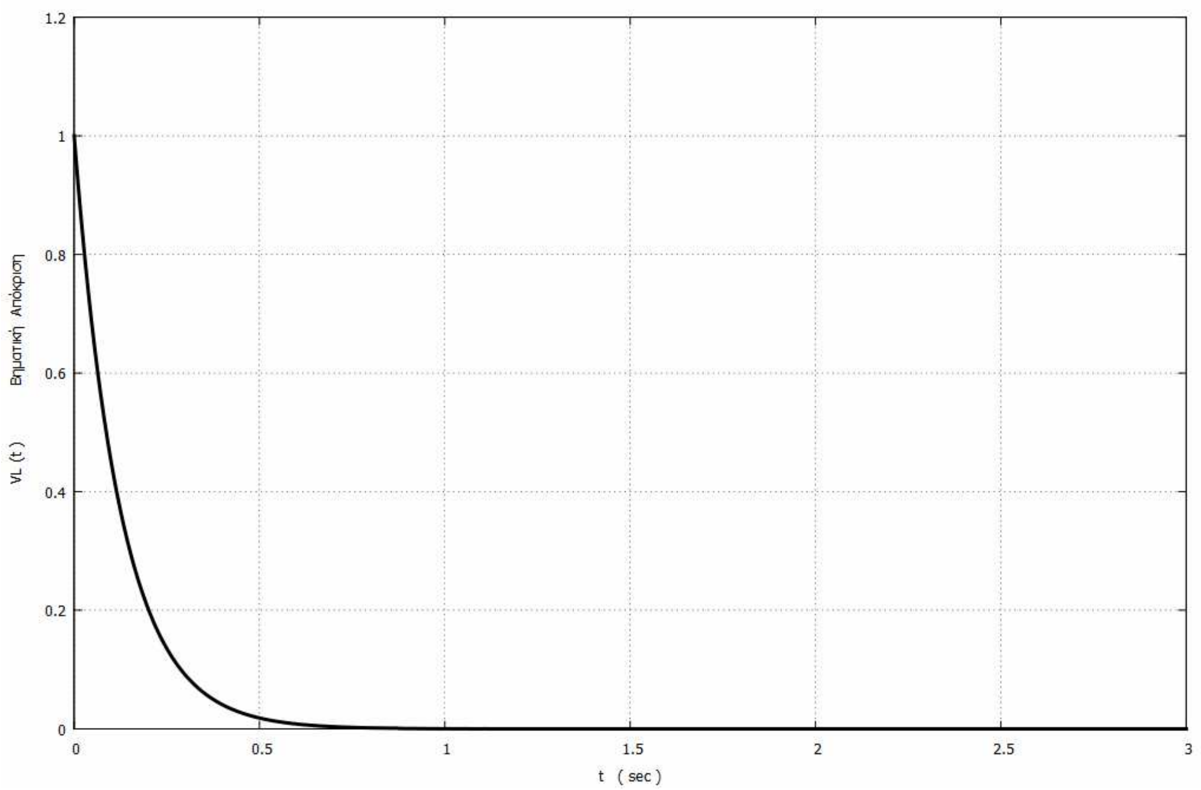
άρα $$V_{L,\,βημ}(t) = k\,e^{-8t}$$

και από την Α.Σ $V_{L,βημ}(0^+) = 1$ προκύπτει $k = 1$

άρα η βηματική απόκριση είναι:

$$\boxed{V_{L,\,βημ}(t) = e^{-8t}}$$

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της βηματικής απόκρισης



Παρακάτω κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με την βηματική απόκριση που πήραμε

1) Παρατηρούμε ότι $V_{L,\,\beta\eta\mu}\,(0^{+}) = 1\ V$, ενώ προφανώς $V_{L,\,\beta\eta\mu}\,(0^{-}) = 0\ V$, πράγμα που σημαίνει ότι η $V_{L,\,\beta\eta\mu}\,(t)$ είναι ασυνεχής για t = 0. Αυτό εξηγείται αμέσως αν γράψουμε τον Ν.Τ.Κ.

$$- E(t) + R\, i_L(t) + V_L(t) = 0$$

αντικαθιστώντας $E(t) = u(t)$ θα έχουμε

$$u(t) = R\, i_L(t) + V_{L,\beta\eta\mu}(t)$$

η $u(t)$ είναι **ασυνεχής** για t = 0 άρα θα πρέπει και η συνάρτηση $R\, i_L(t) + V_{L,\beta\eta\mu}(t)$ να παρουσιάζει ασυνέχεια για t = 0! Γνωρίζουμε όμως ότι το ρεύμα του πηνίου $i_L(t)$ είναι **οπωσδήποτε** συνεχής συνάρτηση για t = 0 διότι η διέγερση E(t) είναι φραγμένη συνάρτηση. Επομένως στη σχέση $u(t) = R\, i_L(t) + V_{L,\beta\eta\mu}(t)$ την ασυνέχεια για t = 0 θα την «φορτωθεί» η $V_{L,\,\beta\eta\mu}\,(t)$

2) Παρατηρούμε επίσης ότι $\lim\limits_{t \to \infty} V_{L,\beta\eta\mu}(t) = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι η πηγή $E(t) = u(t) = 1\ V$ (μια συνεχής τάση). Το πηνίο, στην συνεχή τάση ή ρεύμα, συμπεριφέρεται «τελικά» (δηλ καθώς ο χρόνος t τείνει στο άπειρο) σαν βραχυκύκλωμα. Επομένως η τάση του πηνίου θα έχει «τελικά» μηδενική τιμή.

2.1.2 Αναρριχητική απόκριση

Εδώ έχουμε τα δεδομένα $E(t) = r(t)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

άρα Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right] V_L(t) = 0.5\, D\, r(t)$

Α.Σ. $V_L(0^+) = r(0^+) - 4\, i_L(0^+)$

και επειδή $D\, r(t) = 1$ για $t \geq 0^+$ και επίσης $r(0^+) = 0$ θα πάρουμε

Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right] V_L(t) = 0.5$

Α.Σ. $V_L(0^+) = 0$

η λύση θα είναι, όπως και πρίν

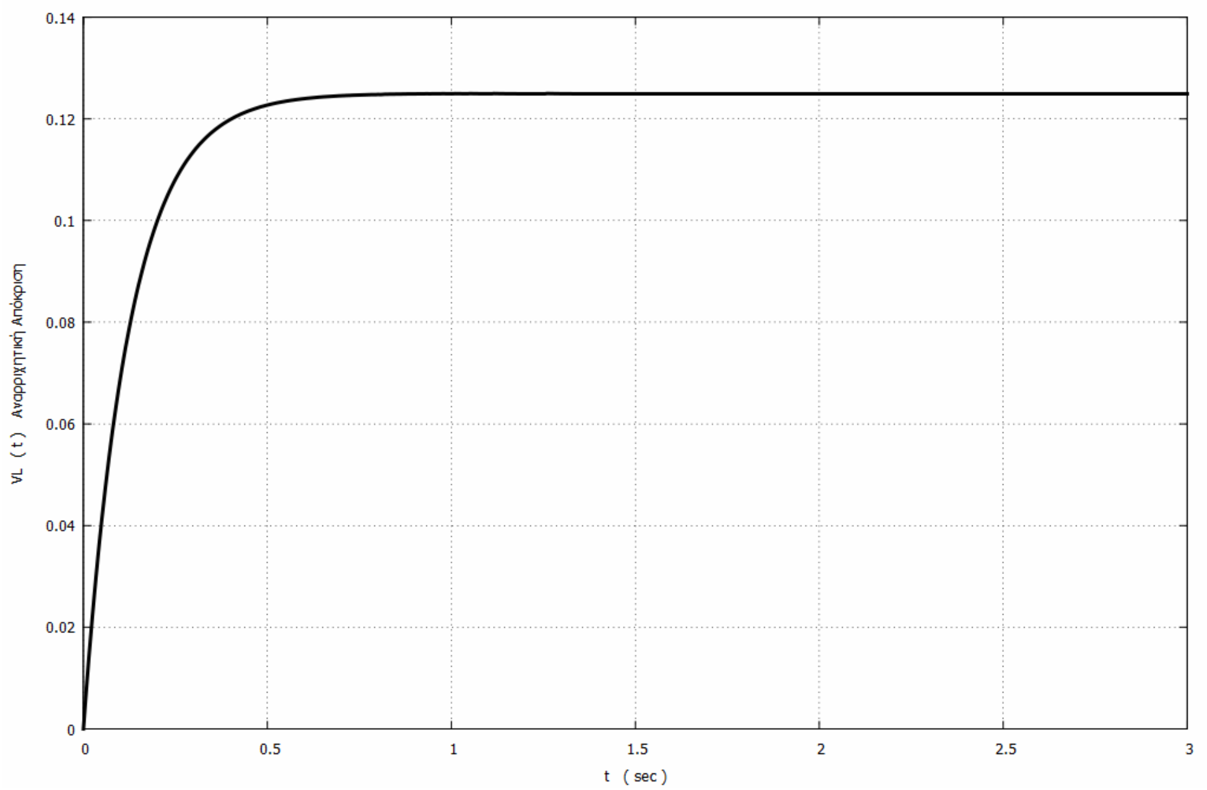
$$V_{L,\,αναρ}(t) = k\, e^{-8t} + V_{L\ μερική}(t)$$

όπου η $V_{L\ μερική}(t) = α = σταθ.$ αντικαθιστώντας στην Δ.Ε. την $V_{L\ μερική}(t)$ θα βρούμε αμέσως $α = 0.125$

Τελικά, με εφαρμογή της Α.Σ. $V_{L\ αναρ}(0^+) = 0$ η αναρριχητική απόκριση θα είναι

$$\boxed{V_{L,\,αναρ}(t) = -0.125\, e^{-8t} + 0.125}$$

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της αναρριχητικής απόκρισης



Παρακάτω κάνουμε κάποια σχόλια σχετικά με την αναρριχητική απόκριση που πήραμε

1) Η αρχική τιμή $V_{L\,\alpha\nu\alpha\rho}(0^+) = 0$ προφανώς διότι $E(0^+) = r(0^+) = 0$ και επίσης

$i_L(0^+) = 0$

2) Η $V_{L\,\alpha\nu\alpha\rho}(t)$ στη μόνιμη κατάσταση θα έχει μια σταθερή τιμή 0.125 Volts. Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα του πηνίου θα αυξάνει γραμμικά διότι $V_L(t) = LD\,i_L(t)$ και αν $i_L(t) = k\,t$ (k=σταθ.) τότε $V_L(t) = L\,k$. Στην περίπτωσή μας θα έχουμε:

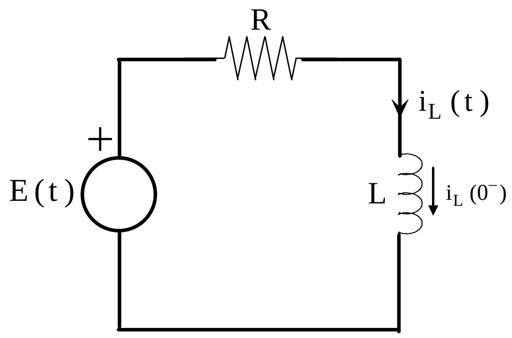
-το ρεύμα στη μόνιμη κατάσταση θα είναι $i(t) = \dfrac{E(t)}{R} = \dfrac{r(t)}{R} = \dfrac{t}{4} = 0.25\,t \quad A$

επομένως , στη μόνιμη κατάσταση πάντοτε, η τάση του πηνίου θα είναι:

$$V_{L\,\alpha\nu\alpha\rho}(t) = L\,D\,i(t) = 0.5 \cdot D\,0.25\,t = 0.125 \quad A$$

2.2 Απόκρίση με έξοδο το ρεύμα $i_L(t)$

Έχουμε το ίδιο δίκτυο:



Οι τιμές των στοιχείων είναι και πάλι R = 4 Ω , L = 0.5 H

Η Δ.Ε με απόκριση το $i_L(t)$ βρίσκεται αμέσως

$$i_L(t) = \frac{E(t)}{R + LD}$$

άρα η Δ.Ε. θα είναι: $[LD + R]\, i_L(t) = E(t)$

με Αρχική Συνθήκη: $i_L(0^+) = 0$ A

Αντικαθιστώντας τιμές στοιχείων γράφουμε πάλι την Δ.Ε και την Α.Σ. που την συνοδεύει

Δ.Ε. $[0.5D + 4]\, i_L(t) = E(t)$

Α.Σ $i_L(0^+) = 0$ A

Παρακάτω υπολογίζουμε την βηματική και την αναρριχητική απόκριση

2.2.1 Βηματική απόκριση

Εδώ έχουμε τα δεδομένα $E(t) = u(t)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

άρα Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right] i_L(t) = u(t)$

Α.Σ. $i_L(0^+) = 0$

για $t \geq 0^+$ θα πάρουμε Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right] i_L(t) = 1$

Α.Σ. $i_L(0^+) = 0$

Η λύση της Δ.Ε θα είναι κατά τα γνωστά

$$i_{L,\,\beta\eta\mu}(t) = k\,e^{-8t} + i_{L\ \mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}}(t)$$

όπου $i_{L\ \mu\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}}(t) = \alpha = \sigma\tau\alpha\theta.$ και με αντικατάσταση στην Δ.Ε. προκύπτει $\alpha = 0.25$

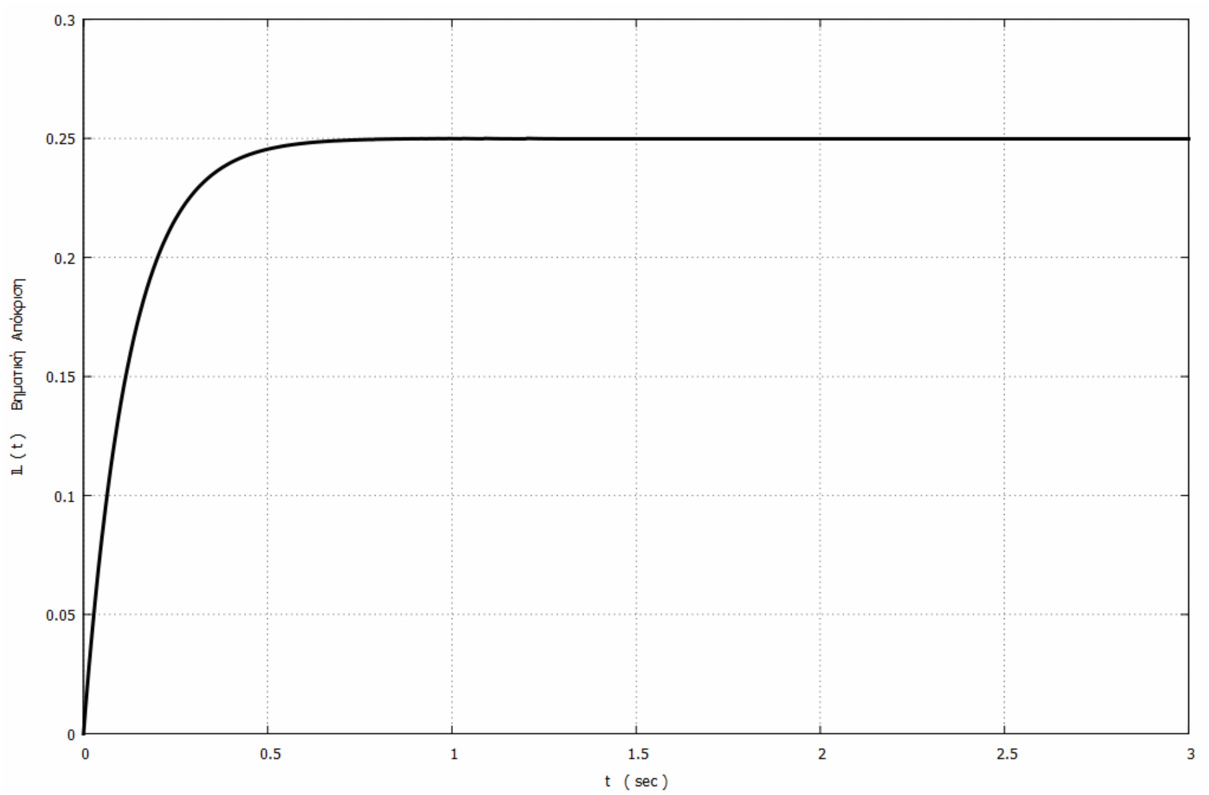
άρα $$i_{L,\,\beta\eta\mu}(t) = k\,e^{-8t} + 0.25$$

και από την Α.Σ $i_{L,\beta\eta\mu}(0^+) = 0$ προκύπτει $k = -0.25$

άρα η βηματική απόκριση είναι:

$$\boxed{i_{L,\,\beta\eta\mu}(t) = -0.25\,e^{-8t} + 0.25}$$

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της βηματικής απόκρισης



Σκεπτόμενοι όπως και πριν βλέπουμε ότι η «τελική» τιμή του ρεύματος θα είναι $i_{L,βημ\ τελ}(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{1}{4} = 0.25$ A (το πηνίο συμπεριφέρεται «τελικά» σαν βραχυκύκλωμα)

2.2.2 Αναρριχητική απόκριση

Εδώ έχουμε τα δεδομένα $E(t) = r(t)$ και $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$

άρα Δ.Ε. $\left[0.5D + 4\right] i_L(t) = r(t)$

Α.Σ. $i_L(0^+) = 0$

και επειδή $r(t) = t$ για $t \geq 0^+$ και επίσης $r(0^+) = 0$ θα πάρουμε

$$\text{Δ.Ε.} \quad \left[0.5D + 4\right] i_L(t) = t$$

$$\text{Α.Σ.} \quad i_L(0^+) = 0$$

η λύση θα είναι, όπως και πρίν

$$i_{L,\,αναρ}(t) = k\,e^{-8t} + i_{L\ μερική}(t)$$

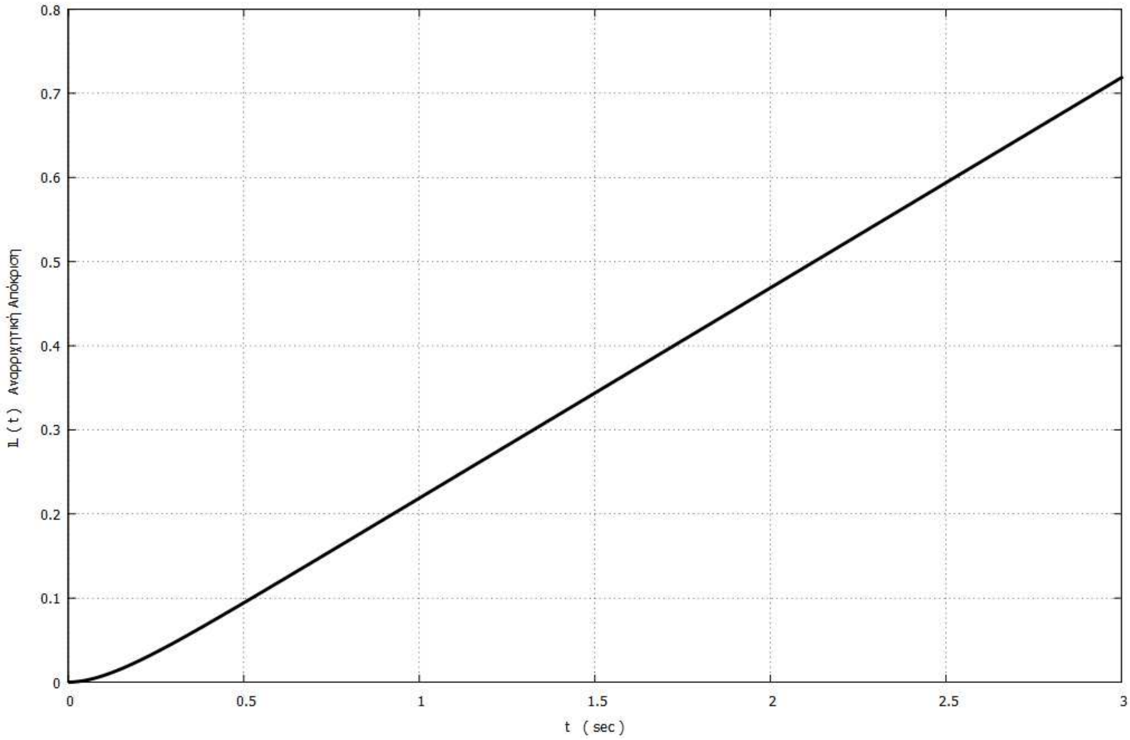
όπου η $i_{L\ μερική}(t) = α\,t + β$ (πολυώνυμο 1ου βαθμού)

αντικαθιστώντας στην Δ.Ε. την $i_{L\ μερική}(t)$ θα βρούμε τις τιμές $α = 0.25$, $β = -0.03125$

Τελικά, με εφαρμογή της Α.Σ. $i_{L\ αναρ}(0^+) = 0$ η αναρριχητική απόκριση θα είναι

$$\boxed{i_{L,\,αναρ}(t) = 0.03125\,e^{-8t} + 0.25t - 0.03125}$$

Παρακάτω δίδεται η γραφική παράσταση της αναρριχητικής απόκρισης



Η αναρριχητική απόκριση $i_{L,\,αναρ}(t)$ τείνει στο άπειρο διότι και η τάση της πηγής $E(t) = r(t)$ τείνει στο άπειρο.

3. Εύρεση αποκρίσεων σε τετραγωνικό και τριγωνικό παλμό

Γνωρίζοντας, σε κάθε περίπτωση, την βηματική και την αναρριχητική απόκριση μπορούμε τώρα εύκολα να βρούμε τις αποκρίσεις σε τετραγωνικό και τριγωνικό παλμό. Παρακάτω εξετάζεται η σχετική διαδικασία.

3.1 Απόκρίση με έξοδο την τάση $V_L(t)$

3.1.1 Απόκριση σε τετραγωνικό παλμό

Το σήμα εισόδου γράφεται $E(t) = u(t-1) - u(t-3)$. Εφ' όσον γνωρίζουμε την βηματική απόκριση μπορούμε αμέσως να γράψουμε την απόκριση στον τετραγωνικό παλμό $E(t)$.

$$V_{L,\ \tau\varepsilon\tau\rho.\ \pi\alpha\lambda\mu}(t) = V_{L,\ \beta\eta\mu}(t-1)\,u(t-1) - V_{L,\ \beta\eta\mu}(t-3)\,u(t-3)$$

διότι το σύστημά μας είναι **χρονικά σταθερό** πράγμα που σημαίνει ότι αν μια διέγερση $E(t)$ δίνει απόκριση $V_L(t)$ τότε μια χρονικά μετατοπισμένη διέγερση $E(t-t_0)$ θα δώσει απόκριση $V_L(t-t_0)\,u(t-t_0)$. Ο πολλαπλασιαστικός όρος $u(t-t_0)$ είναι απαραίτητος γιατί μας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχει απόκριση για $t < t_0$ ($u(t-t_0) = 0$ για $t < t_0$)

Στην παράγραφο 2.1.1 υπολογίσαμε την βηματική απόκριση

$$V_{L,\ \beta\eta\mu}(t) = e^{-8t}$$

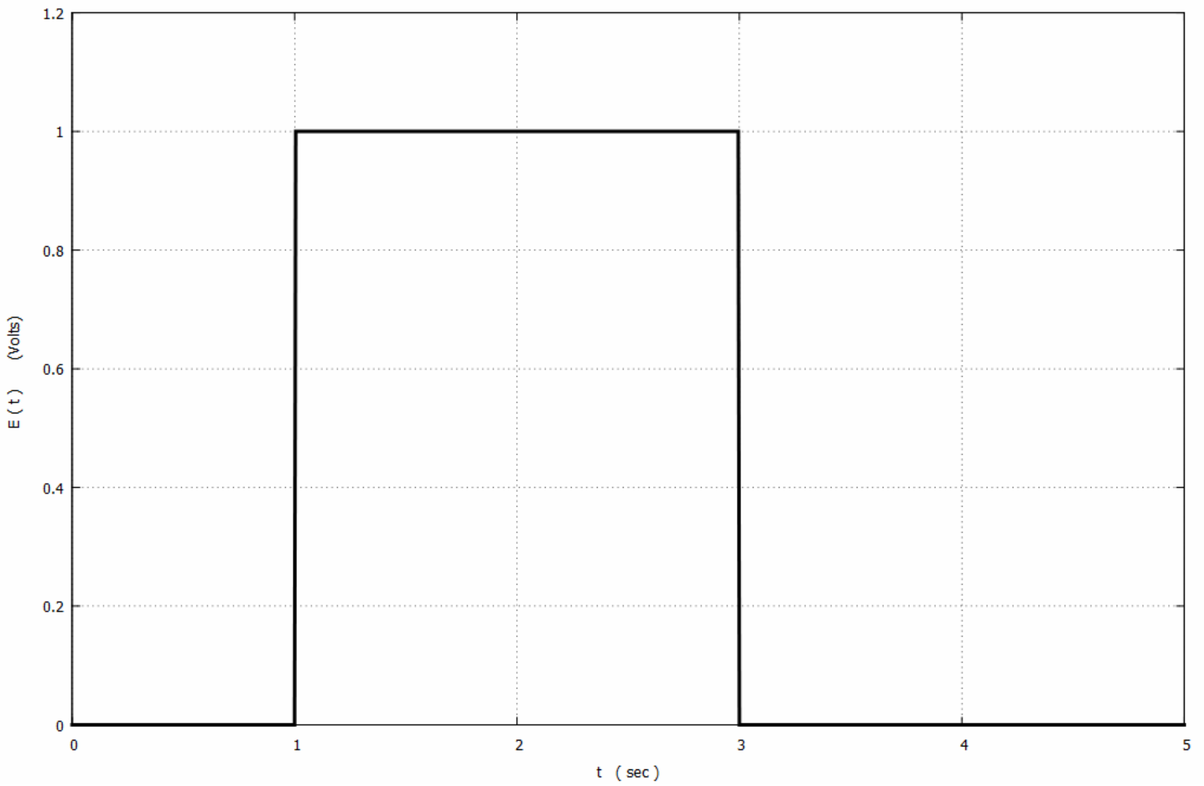
άρα η απόκριση στον τετραγωνικό παλμό θα είναι:

$$\boxed{V_{L,\ \tau\varepsilon\tau\rho.\ \pi\alpha\lambda\mu}(t) = e^{-8(t-1)}\,u(t-1) - e^{-8(t-3)}\,u(t-3)}$$

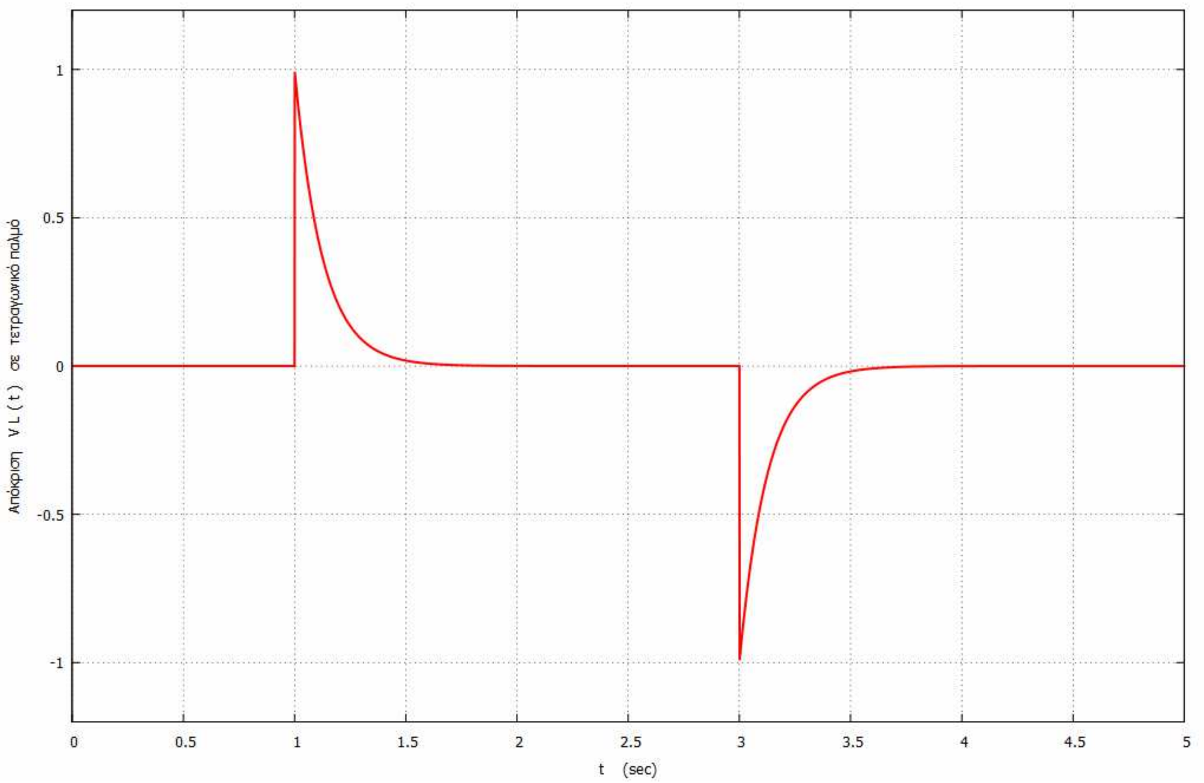
Η μεθοδολογία που περιγράφθηκε θα χρησιμοποιηθεί και για τον τριγωνικό παλμό.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται το σήμα εισόδου $E(t)$ και η αντίστοιχη απόκριση σε κάθε περίπτωση.

Σήμα εισόδου E (t)

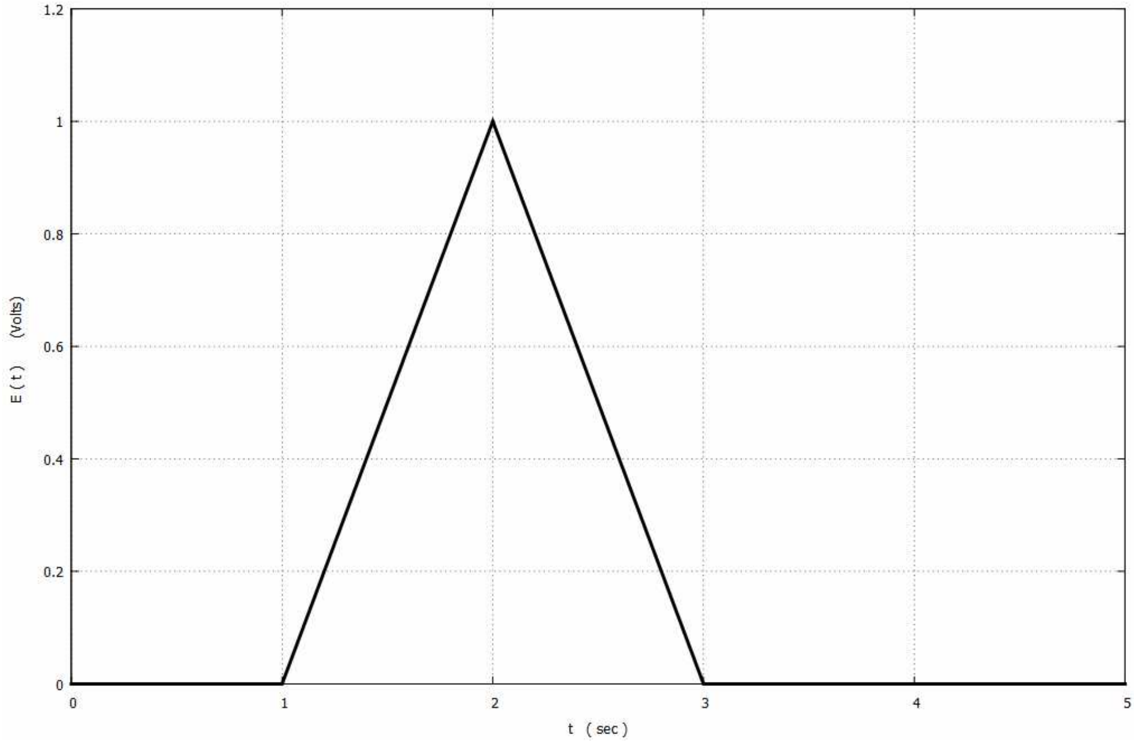


Απόκριση $V_{L,\,\tau\epsilon\tau\rho.\,\pi\alpha\lambda\mu}(t) = e^{-8(t-1)}\,u(t-1) - e^{-8(t-3)}\,u(t-3)$



3.1.2 Απόκριση σε τρίγωνικό παλμό

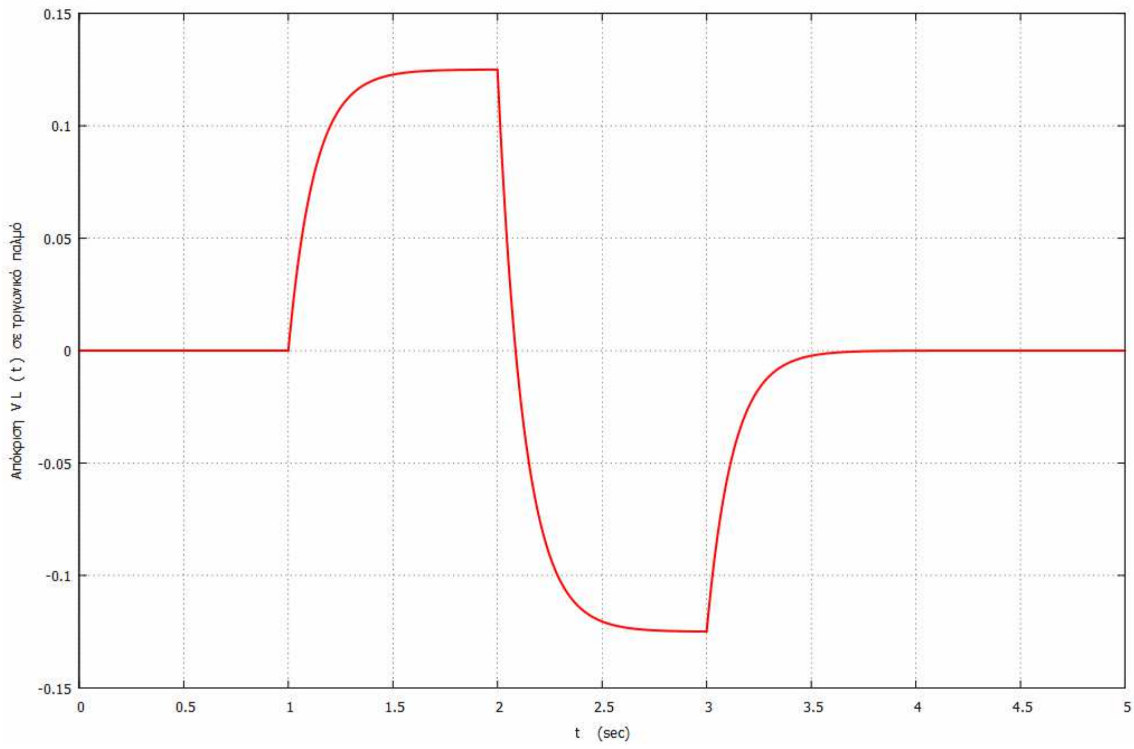
Σήμα εισόδου E (t)



Απόκριση:

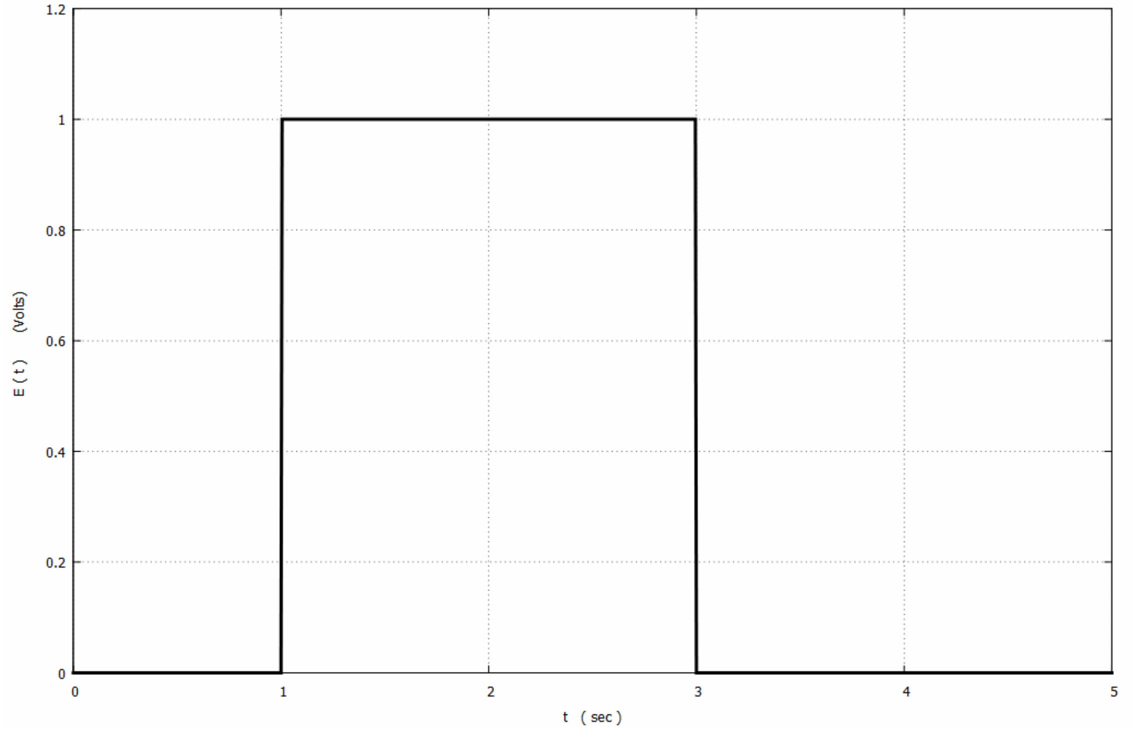
$$V_{L\ \text{τριγ. παλμ.}}(t) = -0.125\, e^{-8\,(t-1)}\, u (t-1) + 0.125\, u (t-1) + 0.25 e^{-8\,(t-2)}\, u (t-2)$$

$$-0.25\, u (t-2) - 0.125 e^{-8\,(t-3)}\, u (t-3) + 0.125\, u (t-3)$$



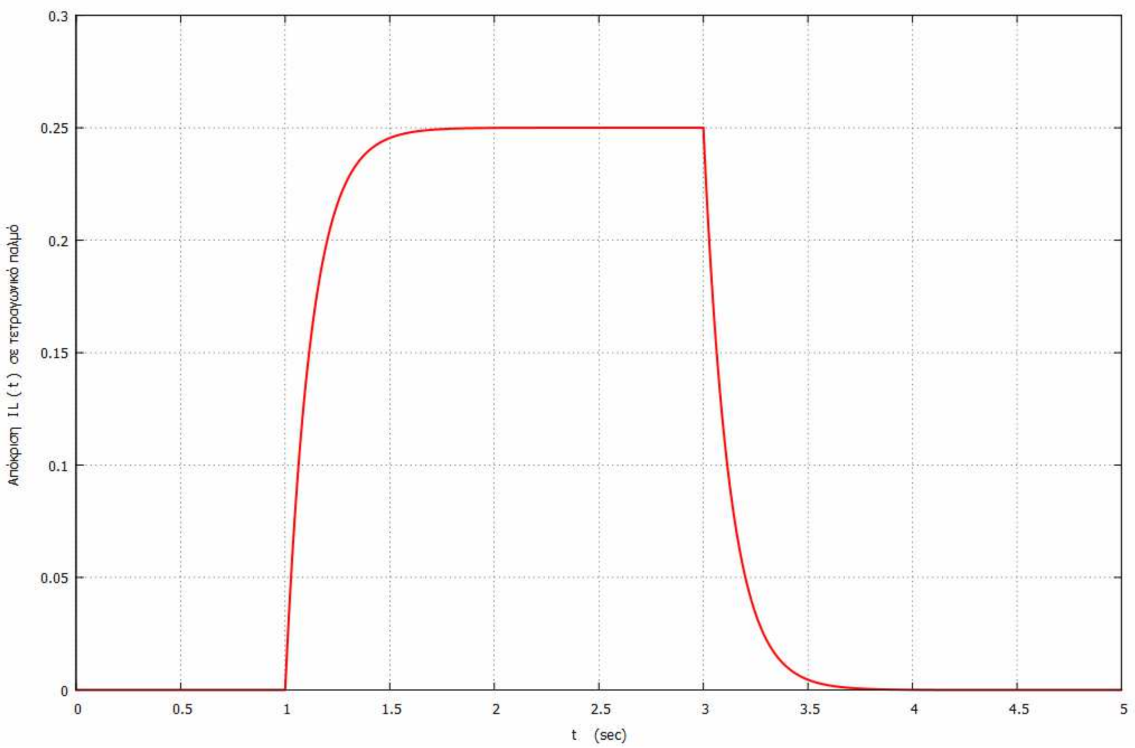
3.2 Απόκρίση με έξοδο το ρεύμα $i_L(t)$

3.2.1 Απόκριση σε τετραγωνικό παλμό

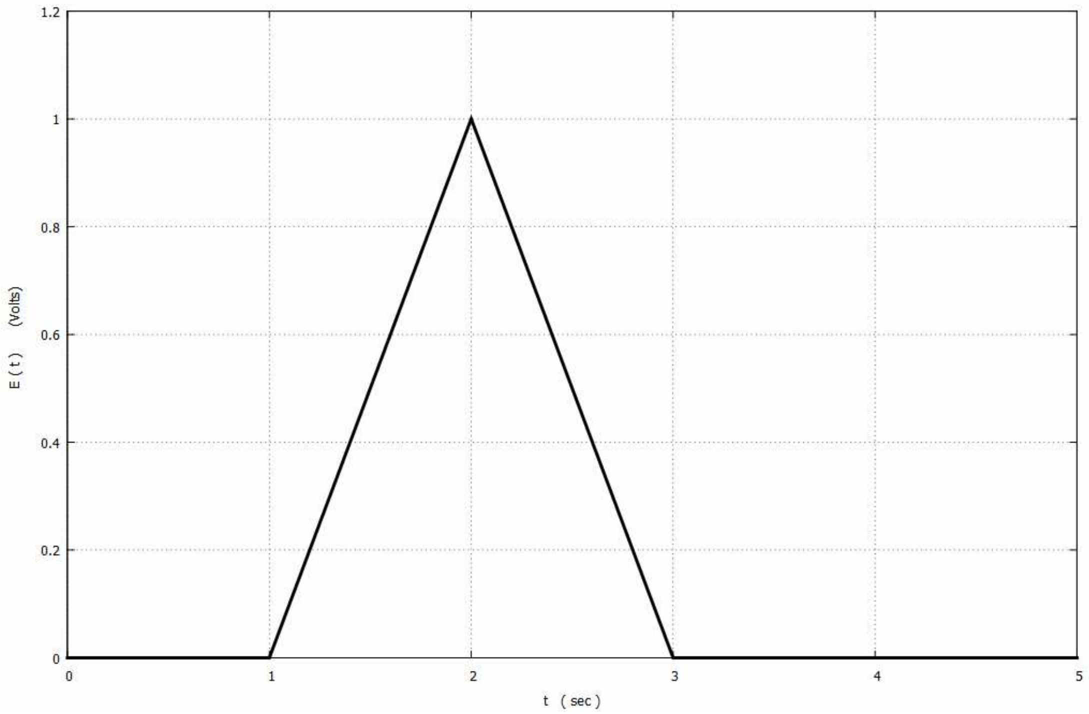


Απόκριση: $i_{L\ \text{τετρ. παλμ}}(t) = -0.25\,e^{-8(t-1)}\,u(t-1) + 0.25\,u(t-1) +$

$$+0.25\,e^{-8(t-3)}\,u(t-3) - 0.25\,u(t-3)$$



3.2.2 Απόκριση σε τριγωνικό παλμό



Απόκριση:

$$i_{L\ \text{τριγ. παλμ.}}(t) = 0.03125\, e^{-8\,(t-1)} u(t-1) + 0.25(t-1)\, u(t-1) - 0.03125\, u(t-1) -$$

$$- 0.0625\, e^{-8\,(t-2)}\, u(t-2) - 0.5(t-2)\, u(t-2) + 0.0625\, u(t-2) +$$

$$+ 0.03125\, e^{-8\,(t-3)}\, u(t-3) + 0.25(t-3)\, u(t-3) - 0.03125\, u(t-3)$$