# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

# Μιγαδικοί αριθμοί

## 8.1) Εισαγωγικά

Αναφέρουμε αρχικά ότι οι μιγαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην επιστήμη της Ηλεκτρολογίας. Παρακάτω δίδονται οι βασικές γνώσεις της μιγαδικης άλγεβρας απαραίτητες για όλα τα μαθήματα Ηλεκτρολογίας.

**<u>Ορισμός φανταστικής μονάδας</u>**

Η λύση της εξίσωσης $x^2 = -1$ ορίζεται στα μαθηματικά ως η φανταστική μονάδα και συμβολίζεται με τα γράμματα **i** ή **j** ( στην Ηλεκτρολογία χρησιμοποιείται το **j** για αποφυγή σύγχυσης με το σύμβολο του ηλεκτρικού ρεύματος **i** ).

Άρα λοιπόν ισχύει: $j^2 = -1$

και επίσης ισχύουν: $(-j)^2 = -1$ , $j^3 = j^2 j = -j$ και $j^4 = j^2 j^2 = 1$

Με βάση τη φανταστική μονάδα σχηματίζονται οι φανταστικοί αριθμοί που έχουν τη γενική μορφή:

$$j\,y$$

όπου y οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

**Μιγαδικοί αριθμοί – μιγαδικό επίπεδο**

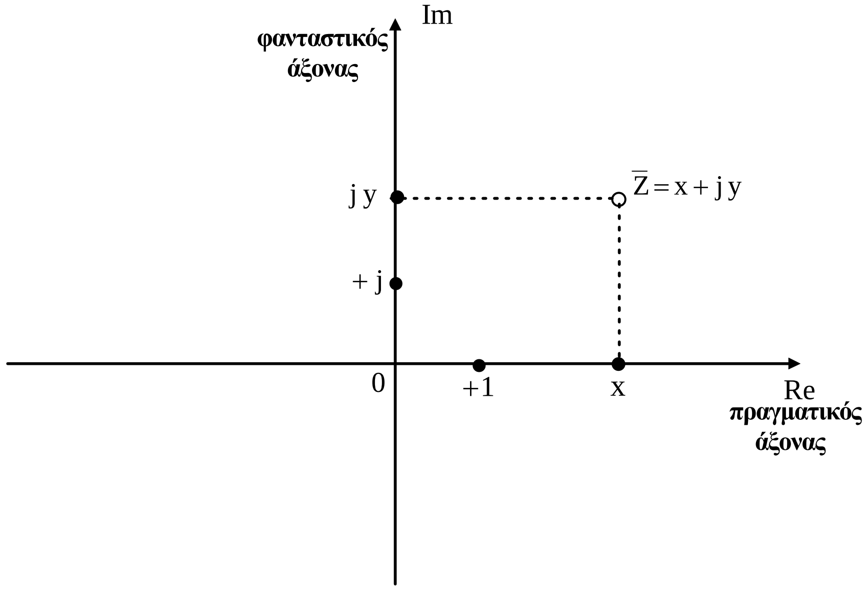
Ένας μιγαδικός αριθμός $\overline{z}$ (complex number) σχηματίζεται από το άθροισμα ενός πραγματικού αριθμού x και ενός φανταστικού αριθμού j y .

Δηλαδή: $\overline{z} = x + j\,y$

Η γραμμή που υπάρχει πάνω από το z συμβολίζει μιγαδικό αριθμό και έτσι γίνεται η διάκριση από ένα πραγματικό αριθμό.

Είναι αντιληπτό ότι ή έννοια του μιγαδικού αριθμού θυμίζει αρκετά τη έννοια του διανύσματος στον χώρο δύο διαστάσεων (επίπεδο). Άρα λοιπόν μπορούμε να θεωρήσουμε, αντίστοιχα, το λεγόμενο «μιγαδικό επίπεδο» το οποίο θα διαθέτει δύο κάθετους άξονες, τον άξονα των πραγματικών και τον άξονα των φανταστικών αριθμών. Στο επίπεδο αυτό μπορούν να παρασταθούν όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μιγαδικό επίπεδο.




Ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = x + j\,y$ παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο, με τον μικρό κύκλο ( ∘ )
Ο πραγματικός αριθμός x ονομάζεται πραγματικό μέρος του $\overline{z}$, συμβολισμός $x = \mathrm{Re}\{\,\overline{z}\,\}$ (το σύμβολο Re { } από το real ). Αντίστοιχα ο πραγματικός y ονομάζεται φανταστικό μέρος του $\overline{z}$, $y = \mathrm{Im}\{\,\overline{z}\,\}$ ( το σύμβολο Im{ } από το imaginary )

**8. 2) Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών**

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό του συζυγούς μιγαδικού αριθμού
Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = x + j\,y$ . Ως συζυγής μιγαδικός του $\overline{z}$ ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός : $\overline{z}^* = x - j\,y$

Δηλ. δύο συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίσα πραγματικά μέρη και αντίθετα φανταστικά μέρη.
Το αστεράκι (*) συμβολίζει τον συζυγή μιγαδικό.
Οι 4 βασικές πράξεις της αριθμητικής εκτελούνται στους μιγαδικούς αριθμούς ως εξής:

**8.2.1) Πρόσθεση και αφαίρεση**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\overline{z}_1 = x_1 + j\,y_1$ και $\overline{z}_2 = x_2 + j\,y_2$

Τότε:

$$\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (\,x_1 + x_2\,) + j\,(\,y_1 + y_2\,)$$

και $\overline{z}_1 - \overline{z}_2 = x_1 + jy_1 - ( x_2 + jy_2 ) = ( x_1 - x_2 ) + j ( y_1 - y_2 )$

Δηλαδή η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο μιγαδικών ανάγονται σε πρόσθεση και αφαίρεση των αντίστοιχων πραγματικών και φανταστικών μερών τους. Αυτό παρουσιάζει πλήρη ταύτιση με την πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων, εφ' όσον θεωρήσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού ως τις «συνιστώσες» x και y ενός διανύσματος.

### 8.2.2) Πολλαπλασιασμός

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\overline{z}_1 = x_1 + j\,y_1$ και $\overline{z}_2 = x_2 + j\,y_2$

Ο πολλαπλασιασμός $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ εκτελείται κατά τα γνωστά έχοντας υπ' όψη την βασική σχέση

$$j \cdot j = j^2 = -1$$

άρα $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = ( x_1 + jy_1 ) \cdot ( x_2 + jy_2 ) = x_1\,x_2 + j\,x_1\,y_2 + j\,y_1\,x_2 + j^2\,y_1\,y_2$

ή $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = ( x_1\,x_2 - y_1\,y_2 ) + j ( x_1\,y_2 + y_1\,x_2 )$

### 8.2.3) Διαίρεση

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $\overline{z}_1 = x_1 + j\,y_1$ και $\overline{z}_2 = x_2 + j\,y_2$

Το πηλίκο $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \dfrac{x_1 + j\,y_1}{x_2 + j\,y_2}$ υπολογίζεται ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή επί τον συζυγή μιγαδικό του παρονομαστή $\overline{z}_2^{\,*} = x_2 - j\,y_2$ και έχουμε:

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{x_1 + j\,y_1}{x_2 + j\,y_2} = \frac{( x_1 + j\,y_1 ) \cdot ( x_2 - j\,y_2 )}{( x_2 + j\,y_2 ) \cdot ( x_2 - j\,y_2 )} = \frac{( x_1\,x_2 + y_1\,y_2 )}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\frac{( y_1\,x_2 - x_1\,y_2 )}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση μιγαδικών αριθμών **δεν** συμβαδίζουν τους κανόνες της διανυσματικής άλγεβρας ( όπως συμβαίνει με την πρόσθεση και την αφαίρεση)

Ειδικά για τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση θα δούμε παρακάτω έναν πιο αποτελεσματικό τρόπο εκτελέσεώς τους.

### 8. 3 ) Απόλυτη τιμή ( ή μέτρο) μιγαδικού αριθμού

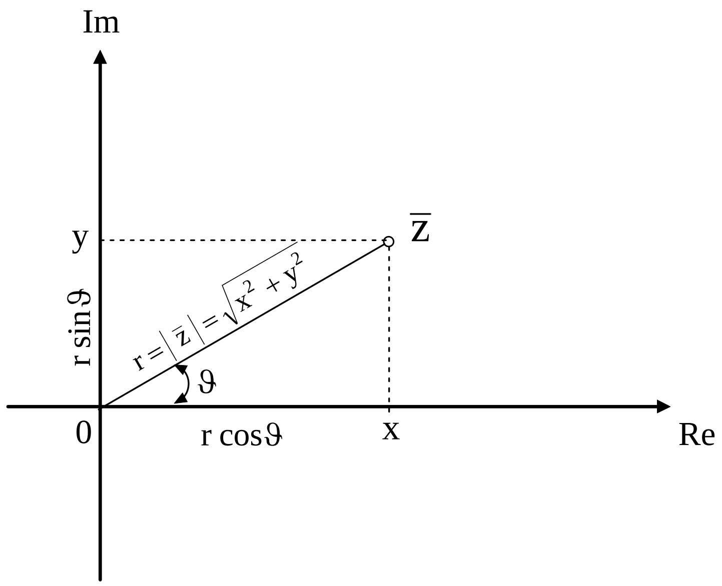
Ως απόλυτη τιμή, ή μέτρο, $|\bar{z}|$ του μιγαδικού αριθμού $\bar{z} = x + j\,y$ ορίζεται ο θετικός πραγματικός αριθμός:

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### 8. 4 ) Πολική – εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν και σε μια άλλη εναλλακτική μορφή η οποία μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη σε πληθώρα περιπτώσεων.

Στο μιγαδικό επίπεδο θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $\bar{z} = x + j\,y$




Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $0\bar{Z}$ είναι ίσο με r όπου $r = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ το **μέτρο** του μιγαδικού $\bar{z}$. Έστω ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον πραγματικό άξονα και το ευθύγραμμο τμήμα $0\bar{Z}$. Η γωνία θ λέγεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}$ και μεταβάλλεται μεταξύ των ορίων $-\pi \le \vartheta \le \pi$.

Παρατηρούμε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού $\bar{z}$ γράφονται:

$$x = \mathrm{Re}\{\,\bar{z}\,\} = r\cos\vartheta \qquad \text{και} \qquad y = \mathrm{Im}\{\,\bar{z}\,\} = r\sin\vartheta$$

άρα ο $\bar{z} = x + j\,y$ γράφεται

$$\bar{z} = x + j\,y = r\cos\vartheta + j\,r\sin\vartheta = r\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$$

αυτή η μορφή γραφής $\bar{z} = r\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$ ονομάζεται **πολική μορφή** του μιγαδικού $\bar{z}$ γιατί έχει άμεση σχέση με τις πολικές συντεταγμένες ενός σημείου ( x, y ) στο επίπεδο.

Συνοψίζουμε:

**Καρτεσιανή ( αλγεβρική) μορφή μιγαδικού:** $\bar{z} = x + j\,y$

**Πολική μορφή μιγαδικού:** $\bar{z} = r\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$

όπου: $x = r\cos\vartheta$ , $y = r\sin\vartheta$

και $r = |\,\bar{z}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , $\vartheta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

*( Σημ. η συνάρτηση tan $^{-1}$ (τόξο εφαπτομένης ) χρειάζεται προσοχή, κατά τον υπολογισμό της, δηλαδή την εύρεση της γωνίας $\vartheta$ στο σωστό τεταρτημόριο, ανάλογα με τα πρόσημα των αριθμών x και y. Πάντως όλες οι αριθμομηχανές ( calculators) που έχουν τη δυνατότητα μετατροπής συντεταγμένων από καρτεσιανές σε πολικές, έχουν ενσωματωμένο ειδικό πρόγραμμα που υπολογίζει σωστά τη γωνία $\vartheta$ )*

Επανερχόμαστε στην πολική μορφή μιγαδικού $\bar{z} = r\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$ και αναφέρουμε μια βασική ταυτότητα που αποδεικνύεται στα Μαθηματικά ( τύπος του Euler )

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta \qquad \text{για κάθε πραγματικό αριθμό } \vartheta$$

Με βάση τον τύπο του Euler ο μιγαδικός $\bar{z}$ γράφεται:

$$\bar{z} = r\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) = r\,e^{j\vartheta} = |\,\bar{z}\,|\,e^{j\vartheta}$$

Αυτός ο τρόπος γραφής $\bar{z} = |\,\bar{z}\,|\,e^{j\vartheta}$ ονομάζεται **εκθετική μορφή μιγαδικού αριθμού** και χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη.

**8.4. 1 ) Υπολογισμός γινομένου και πηλίκου μιγαδικών σε εκθετική μορφή**

Το άθροισμα και η διαφορά δύο μιγαδικών υπολογίζονται πολύ εύκολα σε αλγεβρική – καρτεσιανή μορφή. Ο υπολογισμός όμως του γινομένου και ιδίως του πηλίκου παρουσιάζει κάποια πολυπλοκότητα στη μορφή αυτή.

Η χρήση όμως της εκθετικής μορφής απλοποιεί πάρά πολύ τα πράγματα για τις δύο αυτές πράξεις ( γινόμενο – πηλίκο ). Συγκεκριμένα θα έχουμε:

Έστω οι μιγαδικοί $\bar{z}_1 = |\bar{z}_1| e^{j\vartheta_1}$ και $\bar{z}_2 = |\bar{z}_2| e^{j\vartheta_2}$

Το γινόμενο $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = |\bar{z}_1| e^{j\vartheta_1} \cdot |\bar{z}_2| e^{j\vartheta_2} = |\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2| e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

δηλαδή το γινόμενο $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ έχει μέτρο το γινόμενο των μέτρων των $\bar{z}_1$ και $\bar{z}_2$ και όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων $\vartheta_1$ και $\vartheta_2$.

*( Σημ. οι πράξεις με τους μιγαδικούς εκθέτες ακολουθούν τους ίδιους νόμους με τις πράξεις με πραγματικούς εκθέτες)*

Με όμοιο τρόπο το πηλίκο $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{|\bar{z}_1| e^{j\vartheta_1}}{|\bar{z}_2| e^{j\vartheta_2}} = \frac{|\bar{z}_1|}{|\bar{z}_2|} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

δηλαδή το πηλίκο $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ έχει μέτρο το πηλίκο των μέτρων των $\bar{z}_1$ και $\bar{z}_2$ και όρισμα την διαφορά των ορισμάτων αριθμητή μείον παρονομαστή $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$.

**Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι προτιμότερο η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο μιγαδικών να γίνονται σε αλγεβρική – καρτεσιανή μορφή ενώ ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση να γίνονται σε εκθετική μορφή. Χρειάζεται βέβαια κάθε φορά ή αντίστοιχη μετατροπή των μιγαδικών από την μία μορφή στην άλλη με χρήση των γνωστών τύπων.**

**8.4.2 ) Έκφρασή συζυγούς και αντιστρόφου μιγαδικού σε εκθετική μορφή**

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = x + j\,y = |\bar{z}|\,(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) = |\bar{z}|\,e^{j\vartheta}$

Ο συζυγής του γράφεται: $\bar{z}^{*} = x - j\,y = |\bar{z}|\,(\cos\vartheta - j\sin\vartheta) = |\bar{z}|\,e^{-j\vartheta}$

διότι ισχύει ως γνωστόν $e^{-j\vartheta} = \cos(-\vartheta) + j\sin(-\vartheta) = \cos\vartheta - j\sin\vartheta$

Δηλαδή στην εκθετική μορφή ο συζυγής μιγαδικός του $\bar{z}$ έχει το ίδιο μέτρο $|\bar{z}|$ και αντίθετο όρισμα $-\vartheta$

Επίσης θα ισχύει $\bar{z}\cdot\bar{z}^{*} = |\bar{z}|\,e^{j\vartheta}\cdot|\bar{z}|\,e^{-j\vartheta} = |\bar{z}|^{2}$

Δηλαδή το γινόμενο ενός μιγαδικού $\bar{z}$ επί τον συζυγή του είναι ίσο με το τετράγωνο του μέτρου του $\bar{z}$ .

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού $\bar{z} = |\bar{z}|\,e^{j\vartheta}$ γράφεται:

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|\bar{z}|\,e^{j\vartheta}} = \frac{1\,e^{j0}}{|\bar{z}|\,e^{j\vartheta}} = \frac{1}{|\bar{z}|}\,e^{-j\vartheta}$$

Δηλαδή ο αντίστροφος του $\bar{z}$ έχει μέτρο το αντίστροφο του μέτρου του και όρισμα το αντίθετο του ορίσματός του.

**8. 5 ) Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών υπολογίζονται σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες που ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς και ο υπολογισμός απλοποιείται σημαντικά όταν ο μιγαδικός είναι γραμμένος σε εκθετική μορφή.

Έστω ο μιγαδικός $\bar{z} = |\bar{z}|\,e^{j\vartheta}$

Τότε: $\bar{z}^{n} = |\bar{z}|^{n}\,e^{jn\vartheta}$ και $\bar{z}^{-n} = |\bar{z}|^{-n}\,e^{-jn\vartheta}$

όπου n ακέραιος

Αλλά και γενικότερα ισχύει $\bar{z}^{\frac{n}{m}} = |\bar{z}|^{\frac{n}{m}}\,e^{j\frac{n\vartheta}{m}}$ όπου n, m ακέραιοι

**8. 6 ) Ρίζες μιγαδικών αριθμών**

Ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = \left| \overline{z} \right| e^{j\vartheta}$

έχει n τον αριθμό n-οστές ρίζες $\sqrt[n]{\overline{z}}$ οι οποίες υπολογίζονται από τον ακόλουθο τύπο:

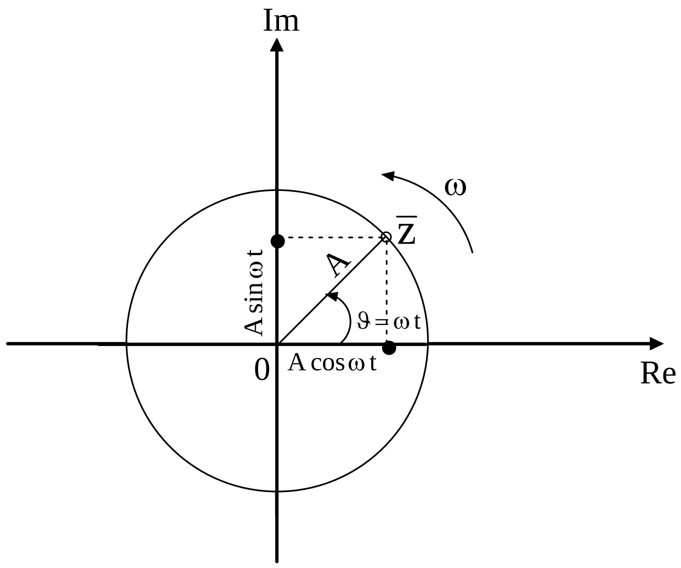
$$\overline{z}_k = \sqrt[n]{\left| \overline{z} \right|}\ e^{j\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}} \qquad \text{όπου} \quad k = 0, 1, 2, \dots n-1$$

**8. 7 ) Στρεφόμενοι μιγαδικοί αριθμοί**

Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό, η ακριβέστερα την μιγαδική συνάρτηση:

$$\overline{z}(t) = A\, e^{j\omega t}$$

όπου A και ω σταθεροί πραγματικοί αριθμοί και t πραγματική μεταβλητή ( χρόνος).
Παρατηρούμε ότι ο $\overline{z}(t)$ έχει σταθερό μέτρο A ενώ το όρισμά του αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι ο $\overline{z}(t)$, στο μιγαδικό επίπεδο, κινείται πάνω σε μία περιφέρεια με ακτίνα A με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. ( βλ. και κατωτέρω σχήμα)




Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\overline{z}(t)$ θα είναι αντίστοιχα:

$$\mathrm{Re}\{\, \overline{z}(t) \,\} = A\cos\omega t \qquad \text{και} \qquad \mathrm{Im}\{\, \overline{z}(t) \,\} = A\sin\omega t$$

Από τις σχέσεις αυτές γίνεται δυνατή η παράσταση ημιτονοειδών συναρτήσεων με χρήση μιγαδικών αριθμών. Ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z}(t)$ λέγεται και στροφέας ( phasor ).

Η χρονική παράγωγος και το ολοκλήρωμα του $\bar{z}(t)$ μπορούν εύκολα να υπολογιστούν εφαρμόζοντας τους κανόνες παραγώγισης που ισχύουν για πραγματικές συναρτήσεις. Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{d\,\bar{z}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} A\, e^{j\omega t} = A\, j\omega\, e^{j\omega t} = A\,\omega\, e^{j\omega t}\, e^{j\frac{\pi}{2}} = A\,\omega\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

( διότι ισχύει $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ )

Άρα παραγώγιση του $\bar{z}(t) = A\, e^{j\omega t}$ σημαίνει πολλαπλασιασμό του μέτρου του επί $\omega$ και ταυτόχρονα αύξηση κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ του ορίσματός του.

Αντίστοιχα για το ολοκλήρωμα:

$$\int \bar{z}(t)\, dt = \int A\, e^{j\omega t}\, dt = \frac{A}{j\omega} e^{j\omega t} = \frac{A}{\omega} e^{j\omega t}\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{\omega} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

( διότι ισχύει $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ )

Άρα ολοκλήρωση του $\bar{z}(t) = A\, e^{j\omega t}$ σημαίνει διαίρεση μέτρου του δια $\omega$ και ταυτόχρονα μείωση κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ του ορίσματός του.