ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Μελέτη ηλεκτρικών δικτύων στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση

10.1) Γενικά για την Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)

Η μελέτη ενός ηλεκτρικού δικτύου γίνεται πρώτιστα στο στο πεδίο του χρόνου. Όλα τα μεγέθη, με τα οποία περιγράφεται η συμπεριφορά του ηλεκτρικού δικτύου, (τάσεις, ρεύματα κ.λ.π.) εκφράζονται σαν συναρτήσεις του χρόνου. Οι συναρτήσεις αυτές δεν υφίστανται κανένα περιορισμό και μπορούν να έχουν οποιαδήποτε μορφή. Η μελέτη ενός ηλεκτρικού δικτύου στο πεδίο του χρόνου παρέχει μεγάλη φυσική εποπτεία.

Υπάρχει όμως και μία διαφορετική μέθοδος ανάλυσης δικτύων και συστημάτων στην οποία γίνεται η ακόλουθη παραδοχή:

Η χρονική εξάρτηση όλων των μεγεθών είναι, αποκλειστικά, της μορφής:

$$\alpha (t) = A_m \sin (\omega t + \varphi)$$

όταν ισχύει η ειδική αυτή παραδοχή, τότε θεωρούμε ότι το δίκτυο βρίσκεται στην Ημιτονική Μόνιμη Κατάσταση (Η.Μ.Κ.)

Η ημιτονοειδής χρονική εξάρτηση όλων των τάσεων και των ρευμάτων ενός δικτύου μπορεί, αρχικά, να φαίνεται περιοριστική, λόγω όμως της μεγάλης σπουδαιότητας της ημιτονοειδούς συναρτήσεως στις πρακτικές εφαρμογές (π.χ. εναλλασσόμενο ρεύμα) καλύπτει ένα σημαντικότατο πεδίο μελέτης των ηλεκτρικών δικτύων και συστημάτων γενικότερα.

10.2) Παραστατικοί μιγαδικοί (phasors)

Με βάση την παραδοχή της ημιτονοειδούς χρονικής εξάρτησης έχει αναπτυχθεί μια μαθηματική μεθοδολογία η οποία μπορεί να περιγράψει με αρκετά απλό τρόπο την συμπεριφορά δικτύων και συστημάτων. Πρόκειται για την μεθοδολογία των παραστατικών μιγαδικών, η στροφέων , ή phasors.

Η ημιτονοειδής συνάρτηση:

$$\alpha (t) = A_m \sin (\omega t + \varphi)$$

Μπορεί να παρασταθεί από τον στρεφόμενο μιγαδικό αριθμό:

$$\overline{A} (t) = A_m \, e^{\,j (\omega t + \varphi)} = A_m \, e^{\,j\varphi} \, e^{\,j \omega t}$$

Ο $\overline{A} (t)$ αποκαλείται και στροφέας ή phasor και ισχύει $\alpha (t) = \mathrm{Im} \{ \overline{A} (t) \}$

Όπως εξηγήθηκε στην παράγραφο **9.2** στην έκφραση του $\overline{A}(t)$ είναι δυνατόν να απαλειφθεί ο όρος $e^{j\omega t}$ (χρονική εξάρτηση) και έτσι να προκύψει ο σταθερός μιγαδικός αριθμός:

$$\overline{A} = A_m\, e^{j\varphi}.$$

Αρα λοιπόν η ημιτονοειδής συνάρτηση $\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ μπορεί, εξ ίσου, να παρασταθεί από τον σταθερό μιγαδικό αριθμό $\overline{A} = A_m\, e^{j\varphi}$ αντί του $\overline{A}(t) = A_m\, e^{j(\omega t + \varphi)}$.

Ο μιγαδικός $\overline{A} = A_m\, e^{j\varphi}$ συνηθίζεται να γράφεται και ως:

$$\overline{A} = \overline{A}(\omega) = A_m\, e^{j\varphi}$$

θεωρώντας βέβαια γνωστή την κυκλική συχνότητα ω στην οποία αναφερόμαστε.

Οι πράξεις μεταξύ ημιτονοειδών συναρτήσεων ανάγονται σε πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών. Έτσι πολύπλοκες τριγωνομετρικές εκφράσεις αντικαθίστανται από απλή μιγαδική άλγεβρα.

Αντίστροφα, όπως προαναφέρθηκε, αν είναι γνωστός ο $\overline{A} = A_m\, e^{j\varphi}$, και η κυκλική συχνότητα ω, τότε η ημιτονοειδής συνάρτηση $\alpha(t)$ που περιγράφει ο $\overline{A}$, προκύπτει από τη σχέση:

$$\alpha(t) = \operatorname{Im}\left\{\overline{A}\, e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\left\{A_m\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}\right\} = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Συνοψίζουμε εδώ όλα τα προηγούμενα:

α) Η μελέτη ενός δικτύου ή ενός συστήματος, στην Η.Μ.Κ. προϋποθέτει την παραδοχή ότι όλα τα δυναμικά μεγέθη (δηλ. τα μεγέθη που είναι συναρτήσεις του χρόνου) έχουν την μορφή $\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$

β) Για την μαθηματική περιγραφή του δικτύου ή του συστήματος χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των παραστατικών μιγαδικών (phasors). Αυτό αποτελεί σημαντικό πλεονέκτημα.

γ) Είναι προφανές ότι κάνοντας την παραδοχή χρονικής εξάρτησης αποκλειστικά της μορφής $\alpha(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$ περιορίζεται σημαντικά το εύρος των δυνατών καταστάσεων που μπορούν να μελετηθούν.

Πιο συγκεκριμένα στην Η.Μ.Κ. δεν μπορούν να μελετηθούν μεταβατικά φαινόμενα αλλά μόνον η αποκριση μόνιμης κατάστασης του δικτύου ή του συστήματος.

δ) Είναι δυνατόν, με χρήση της ανάλυσης Fourier, να μελετηθούν και περιπτώσεις με χρονικές εξαρτήσεις μη ημιτονοειδείς αλλά πάντοτε στη μόνιμη κατάσταση (Αυτό θα γίνει καλλίτερα κατανοητό σε επόμενο κεφάλαιο)

Αναφέρουμε τέλος ότι η γνώση μόνον της μόνιμης απόκρισης ενός δικτύου ή συστήματος είναι αρκετή σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών (π.χ. ανάλυση κυκλωμάτων εναλλασσομένου ρεύματος). Εκεί ακριβώς βρίσκεται και η μεγάλη αξία της μελέτης στην Η.Μ.Κ. λόγω και της μαθηματικής της απλότητας.

10.3) Διανυσματικά διαγράμματα στην Η.Μ.Κ.

Κατά την μελέτη ηλεκτρικών δικτύων στην Η.Μ.Κ. χρησιμοποιούνται πολύ συχνά τα λεγόμενα διανυσματικά διαγράμματα. Οι στρεφόμενοι **με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω** παραστατικοί μιγαδικοί (phasors) σχεδιάζονται στο μιγαδικό επίπεδο ως διανύσματα με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο που παριστά τον μιγαδικό αριθμό. Προφανώς τα διανύσματα αυτά στρέφονται (αντι- ωρολογιακά) και στο σχετικό διάγραμμα απεικονίζεται μια χρονική στιγμή (ένα στιγμιότυπο) από την περιστροφική τους κίνηση!
Για όλα τα διανύσματα που έχουμε, σε ένα κοινό διάγραμμα, ισχύει η θεμελειώδης σχέση:

-Οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων ΔΕΝ αλλάζουν καθώς κυλά ο χρόνος, διότι προφανώς στρέφονται όλα με το ίδιο ω.

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να κάνουμε χρήση όλων των κανόνων της διανυσματικής άλγεβρας **για προσθέσεις και αφαιρέσεις διανυσμάτων** (Προσοχή! όχι γινόμενα και πηλίκα)

Τα παραπάνω θα γίνουν καλλίτερα κατανοητά με το παράδειγμα που ακολουθεί:

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω δύο ημιτονοειδείς συναρτήσεις $\alpha_1(t)$ και $\alpha_2(t)$ όπου:

$$\alpha_1(t) = 5\sin(10t + 32^o) \quad \text{και} \quad \alpha_2(t) = 8\sin(10t - 47^o)$$

προφανώς θα έχουμε εδώ $\omega = 10$ rad / sec

μέσα στις παρενθέσεις «ανακατεύονται» μοίρες με ακτίνια αλλά αυτό γίνεται σε όλα τα βιβλία για λόγους εποπτικούς

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα μετατροπής μιας γωνίας **φ** από μοίρες σε ακτίνια:

φ (σε ακτίνια) = φ (σε μοίρες) / (180/π)

ή **φ (σε ακτίνια) = φ (σε μοίρες) / 57.2958**

μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_1(t) = 5\sin(10t + 0.5585) \quad \text{και} \quad \alpha_2(t) = 8\sin(10t - 0.8203)$$

Βρίσκουμε τους παραστατικούς μιγαδικούς (phasors) $\overline{A}_1$ και $\overline{A}_2$ των $\alpha_1(t)$ και $\alpha_2(t)$

$$\alpha_1(t) = 5\sin(10t + 32^o) \rightarrow \overline{A}_1 = 5\,e^{\,j32^o}$$

$$\alpha_2(t) = 8\sin(10t - 47^o) \rightarrow \overline{A}_2 = 8\,e^{\,-j47^o}$$

Όπως προαναφέρθηκε ο παραστατικός μιγαδικός του αθροίσματος $\alpha_1(t)$ και $\alpha_2(t)$ θα είναι το άθροισμα των παραστατικών μιγαδικών $\overline{A}_1$ και $\overline{A}_2$, άρα:

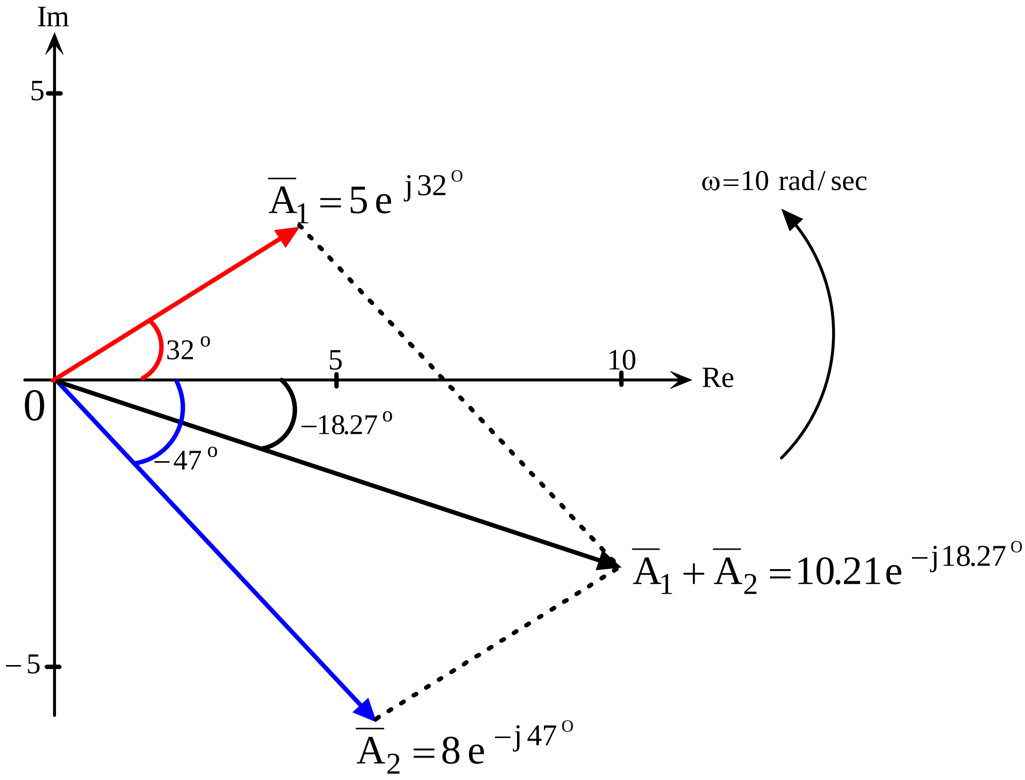
$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 = 5\,e^{\,j32^o} + 8\,e^{\,-j47^o} = 4.2402 + j\,2.6496 + 5.4560 - j\,5.8508 = 9.6962 - j\,3.2012$$

όπου $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 = 9.6962 - j\,3.2012 = 10.210\,e^{\,-j18.27^o}$

επομένως:

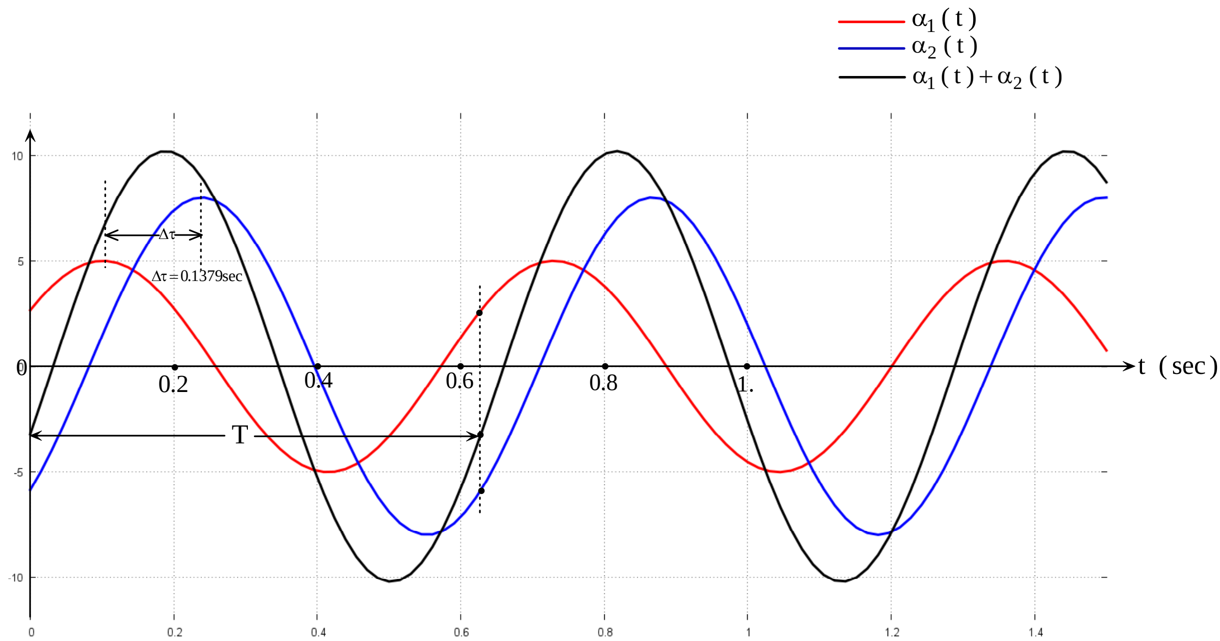
$$\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = 5\sin(10t + 32^o) + 8\sin(10t - 47^o) = 10.210\sin(10t - 18.27^o)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ και $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$



Ο στρεφόμενος μιγαδικός $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$ προκύπτει ως το διανυσματικό άθροισμα των $\overline{A}_1$ και $\overline{A}_2$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ και $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)$



Η περίοδος $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.6283 \text{ sec}$$

Μετρώντας το χρονικό διάστημα Δτ το οποίο απέχουν δυο κορυφές των $\alpha_1(t)$ και $\alpha_2(t)$ βλέπουμε ότι είναι Δτ = 0.1379 sec . Άρα η διαφορά φάσεως μεταξύ τους θα είναι:

$$\Delta\varphi = (\Delta\tau / T)\, 360^o = 0.2195\text{x}\ 360^o = 79^o$$

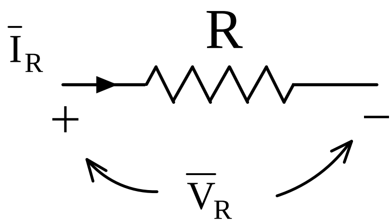
με την $\alpha_1(t)$ να προηγείται. Αυτό επαληθεύεται αμέσως από την αφαίρεση 32^o-$(-47^o) = 79^o$

10.4) Σχέσεις τάσεως ρεύματος των τριών βασικών ηλεκτρικών στοιχείων στην Η.Μ.Κ.

Παρακάτω διατυπώνονται για τα τρία βασικά ηλεκτρικά στοιχεία οι σχέσεις τάσεως – ρεύματος στην Η.Μ.Κ. Οι σχέσεις αυτές, όπως είναι φυσικό, προκύπτουν απ’ ευθείας από τις αντίστοιχες σχέσεις που ισχύουν στο πεδίο του χρόνου, θέτοντας την βασική παραδοχή ότι όλα τα μεγέθη (τάσεις – ρεύματα) έχουν ημιτονοειδή μορφή.

10.4.1) Ωμική αντίσταση R

Στο πεδίο του χρόνου: $V_R\ (t) = R\ i_R\ (t)$

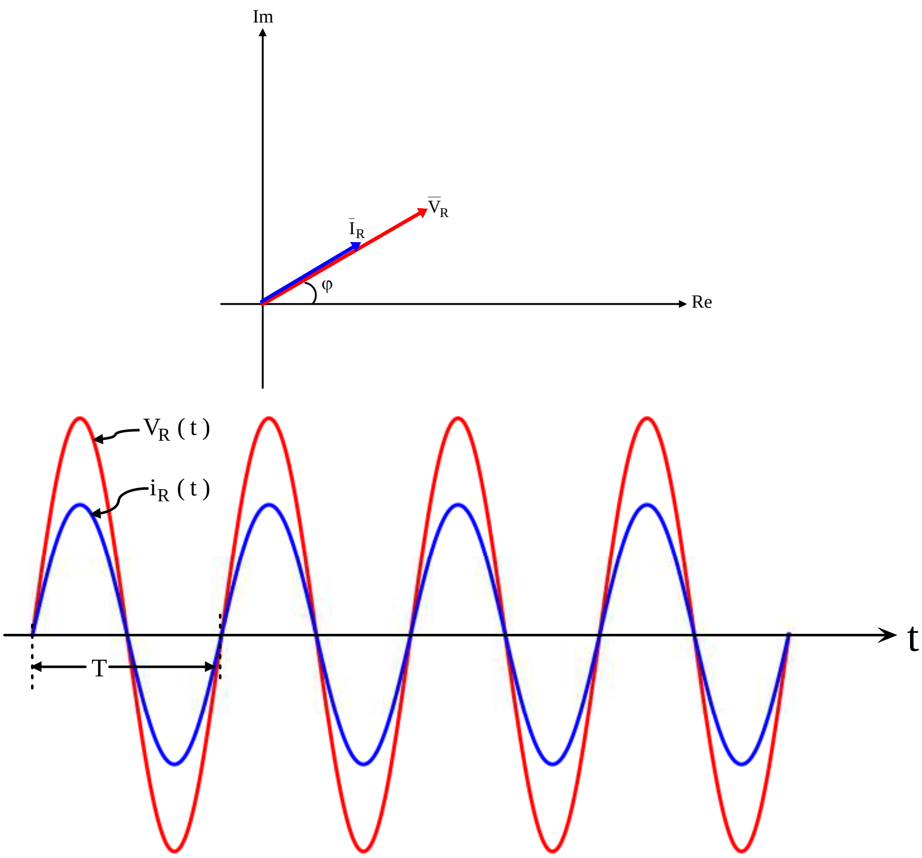


Θεωρούμε ότι $i_R(t) = I_{Rm} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{I}_R = I_{Rm} e^{j\varphi}$

και $V_R\ (t) = R\ i_R\ (t) = R\ I_{Rm} \sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι

$$\bar{V}_R = R\ I_{Rm} e^{j\varphi} = R\ \bar{I}_R$$

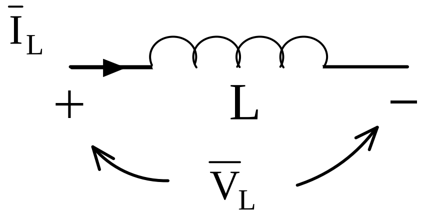
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των $\bar{V}_R$, $\bar{I}_R$ καθώς και οι συναρτήσεις (κυματομορφές) $V_R(t)$ και $i_R(t)$



Παρατηρούμε ότι τα μεγέθη $V_R(t)$ και $i_R(t)$ έχουν την ίδια φάση σε κάθε χρονική στιγμή

10.4.2) Πηνίο με αυτεπαγωγή L

Στο πεδίο του χρόνου: $V_L(t) = L\dfrac{d\,i_L(t)}{d\,t}$

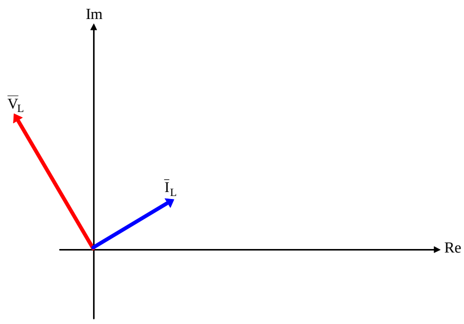


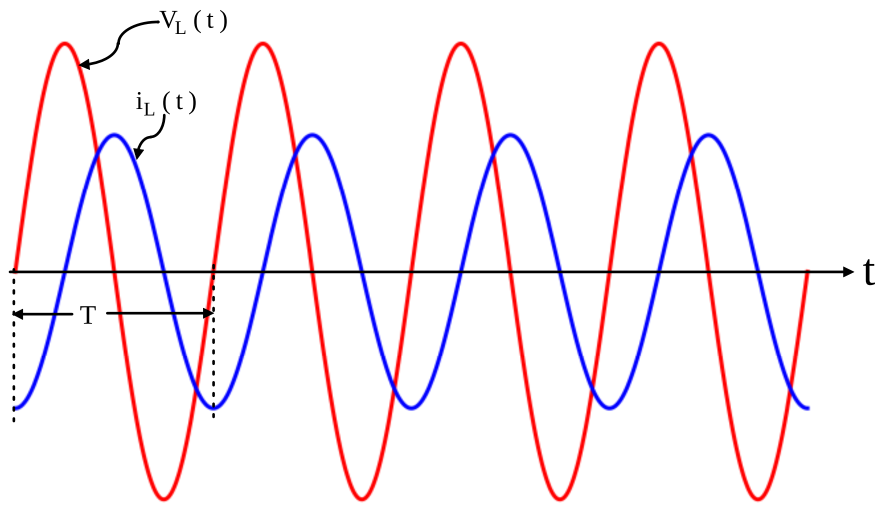
Θεωρούμε ότι $i_L(t) = I_{Lm}\sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{I}_L = I_{Lm}e^{j\varphi}$

και $V_L(t) = L\dfrac{d\,i_L(t)}{d\,t} = \omega L I_{Lm}\cos(\omega t + \varphi) = \omega L I_{Lm}\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$

άρα ο phasor θα είναι: $\bar{V}_L = \omega L I_{Lm} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega L I_{Lm} e^{j\varphi} = j\omega L \bar{I}_L$

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των $\bar{V}_L, \bar{I}_L$ καθώς και οι συναρτήσεις (κυματομορφές) $V_L(t)$ και $i_L(t)$

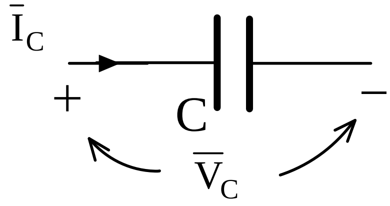




Παρατηρούμε ότι στο πηνίο η τάση $V_L(t)$ προηγείται του ρεύματος $i_L(t)$ κατά 90^o

10.4.3) Πυκνωτής με χωρητικότητα C

Στο πεδίο του χρόνου: $i_C(t) = C\,\dfrac{d\,V_C(t)}{d\,t}$

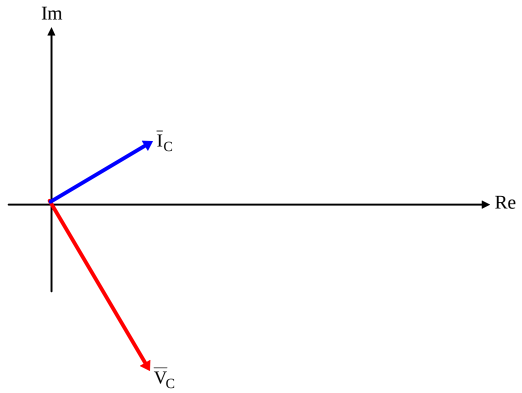


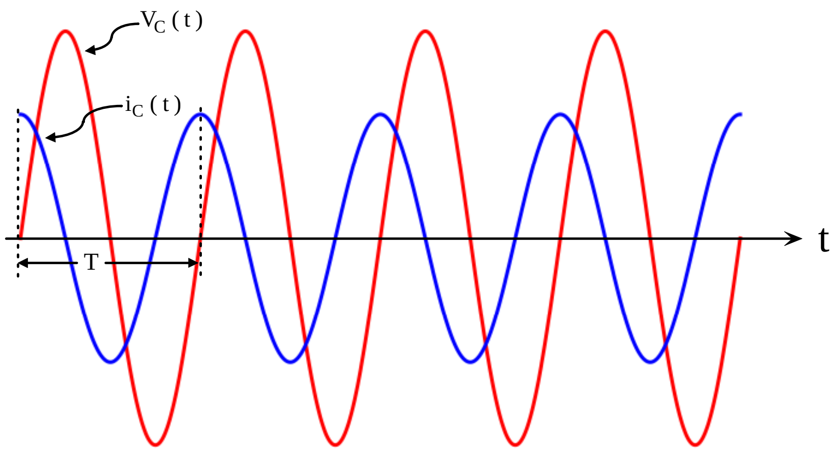
Θεωρούμε ότι $V_C(t) = V_{Cm}\sin(\omega t + \varphi)$ άρα ο phasor θα είναι $\bar{V}_C = V_{Cm} e^{j\varphi}$

και $i_C(t) = C\,\dfrac{d\,V_C(t)}{d\,t} = \omega C V_{Cm}\cos(\omega t + \varphi) = \omega C V_{Cm}\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$

άρα ο phasor θα είναι: $\bar{I}_C = \omega C V_{Cm} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = j\omega C V_{Cm} e^{j\varphi} = j\omega C \bar{V}_C$

Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται το διανυσματικό διάγραμμα των $\bar{V}_C$, $\bar{I}_C$ καθώς και οι συναρτήσεις (κυματομορφές) $V_C(t)$ και $i_C(t)$

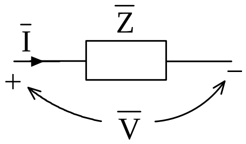




Παρατηρούμε ότι στον πυκνωτή το ρεύμα $i_C(t)$ προηγείται της τάσεως $V_C(t)$ κατά 90^o

10.5) Σύνθετη αντίσταση στην Η.Μ.Κ.

Ακριβώς όπως και στο πεδίο του χρόνου μπορούμε και στην Η.Μ.Κ. να σκεφτούμε έναν «γενικευμένο» νόμο του Ohm σύμφωνα με τον οποίο σε ένα ηλεκτρικό στοιχείο ορίζεται η **γενικευμένη σύνθετη αντίσταση** $\bar{Z}(j\omega)$ (ή και απλά $\bar{Z}(\omega)$)

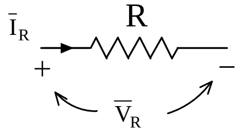
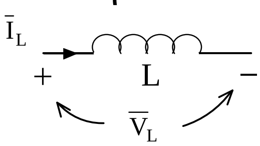
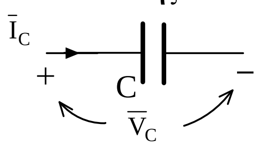


$$\bar{Z}(\omega) = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} \qquad (\text{Ohm})$$

και η **γενικευμένη σύνθετη αγωγιμότητα** $\bar{Y}(\omega)$

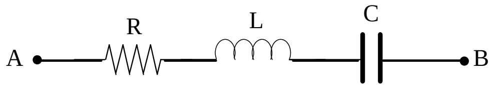
$$\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{\bar{Z}(\omega)} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} \qquad (\text{Ohm}^{-1})$$

Για τα τρία βασικά παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία θα είναι:

Ωμική αντίσταση R 	$\bar{Z}_R(\omega) = \frac{\bar{V}_R}{\bar{I}_R} = R$	$\bar{Y}_R(\omega) = \frac{\bar{I}_R}{\bar{V}_R} = \frac{1}{R}$
Πηνίο L 	$\bar{Z}_L(\omega) = \frac{\bar{V}_L}{\bar{I}_L} = j\omega L$	$\bar{Y}_L(\omega) = \frac{\bar{I}_L}{\bar{V}_L} = \frac{1}{j\omega L}$
Πυκνωτής C 	$\bar{Z}_C(\omega) = \frac{\bar{V}_C}{\bar{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}$	$\bar{Y}_C(\omega) = \frac{\bar{I}_C}{\bar{V}_C} = j\omega C$

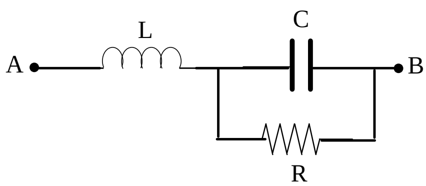
Αν θεωρήσουμε συνδεσμολογίες δύο ακροδεκτών **Α-Β,** αποτελούμενες από τα βασικά στοιχεία R, L, C μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική γενικευμένη σύνθετη αντίσταση $\overline{Z}(\omega)$. Ισχύουν και εδώ όλοι οι κανόνες σύνθεσης αντιστάσεων που είναι γνωστοί από τη στοιχειώδη θεωρία κυκλωμάτων. Παρακάτω αναφέρουμε δύο παραδείγματα:

α) Να βρεθεί η $\overline{Z}_{AB}(\omega)$



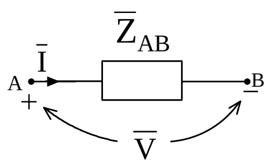
$$\overline{Z}_{AB}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

β) Να βρεθεί η $\overline{Z}_{AB}(\omega)$



$$\overline{Z}_{AB}(\omega) = j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε:



άν $\overline{V} = V_m e^{j\varphi_V}$ και $\overline{I} = I_m e^{j\varphi_I}$

Τότε $$\overline{Z}_{AB} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{V_m}{I_m} e^{j(\varphi_V - \varphi_i)} = R_{AB} + jX_{AB}$$

Στην περίπτωση που το στοιχείο $\overline{Z}$ αποτελείται μόνον από παθητικά στοιχεία R, L, C τότε το πραγματικό μέρος R_{AB} και το φανταστικό μέρος X_{AB} μπορούν να γραφούν σαν ρητές συναρτήσεις (πηλίκα πολυωνύμων) του ω, δηλαδή:

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_{AB}(\omega) = R_{AB}(\omega) + jX_{AB}(\omega)$$