11. Τριφασικά Ηλεκτρικά Δίκτυα

11.1 Εισαγωγικά

Είναι γνωστή η μορφή ενός εναλλασσόμενου ρεύματος ή μιας εναλλασσόμενης τάσης

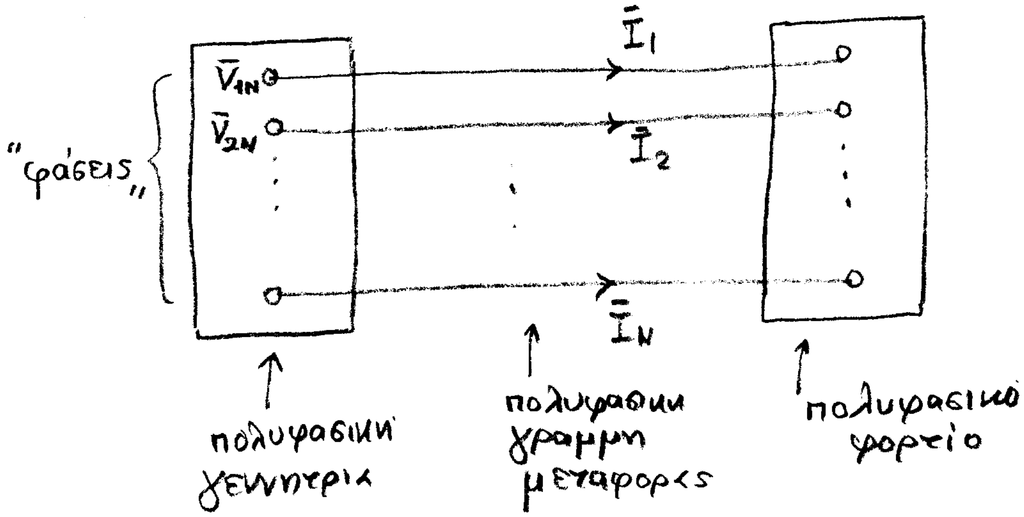
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$$

Οι απλές αυτές μορφές αποκαλούνται στην Τεχνική ορολογία και ως "μονοφασικό" ρεύμα ή τάση

Στην πράξη, στα δίκτυα παραγωγής, μεταφοράς και διανομής της ηλεκτρικής ενέργειας συμφέρει να έχουμε περισσότερες από μια τάσεις (και ρεύματα), της ίδιας βέβαια συχνότητας, αλλά με φασική απόκλιση (διαφορά φάσεως) μεταξύ τους.

Έτσι δημιουργούνται τα "πολυφασικά" ηλ. δίκτυα, που αποτελούνται από πολυφασικές γεννήτριες, πολυφασικές γραμμές μεταφοράς και πολυφασικά ηλ. φορτία (καταναλωτές)



Στο ανωτέρω σχήμα δεν μπήκαμε σε λεπτομέρειες για τον τρόπο σύνδεσης γεννήτριας - φορτίου κ.λπ. Απλά δείχνουμε την γενική εικόνα πολυφασικού συστήματος...

11.2 Ορισμος πολυφασικού συστήματος τάσεων

Σε ένα πολυφασικό σύστημα τάσεων αποτελούμενο απο n-τάσεις (n-φάσεις) η καθε τάση θα έχει την μορφή:

$$V_1(t) = V_m \sin(\omega t) \quad \text{(φάση 1)}$$

$$V_2(t) = V_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{(φάση 2)}$$

$$V_3(t) = V_m \sin\left(\omega t - 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$V_n(t) = V_m \sin\left(\omega t - (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{(φάση } n)$$

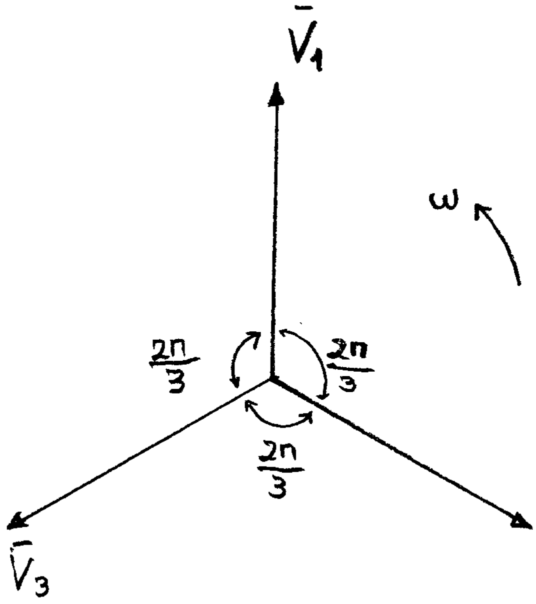
Παρατηρούμε ότι οι τάσεις $V_1(t), V_2(t), \ldots, V_n(t)$ έχουν

1) – ίδια κυκλική συχνότητα ω (απαραίτητο!)
2) – ίδιο πλάτος V_m (όχι απαραίτητο όμως)
3) – διαφορά φάσεως $\frac{2\pi}{n}$ διαδοχικά (όχι απαραίτητο!)

Στην περίπτωση που ισχύουν οι παραδοχες 1), 2) και 3) το n-φασικό σύστημα λέγεται "συμμετρικό"
ενω αν ισχύει μόνον η 1) (απαραίτητα)! λέγεται "μη συμμετρικό".

Παρακάτω δείχνουμε για $n=3$ ενα συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων και ένα μη-συμμετρικό

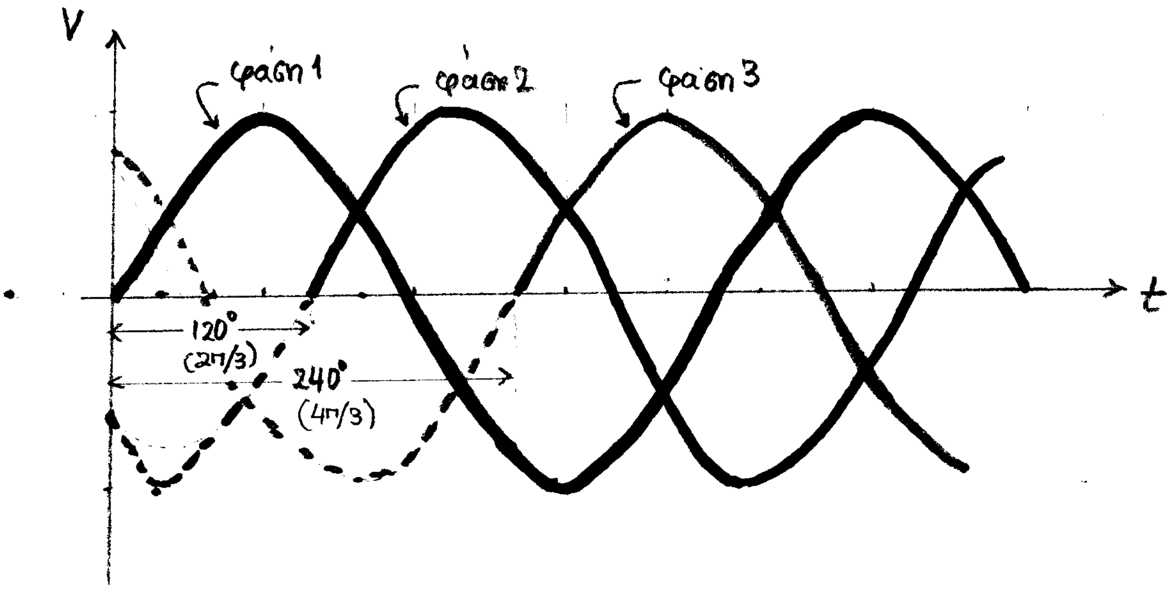
$n = 3$ συμμετρικό σύστημα



$$V_1(t) = V_m \sin\omega t \qquad \bar{V}_1 = V_m$$
$$V_2(t) = V_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad \bar{V}_2 = V_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$
$$V_3(t) = V_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \bar{V}_3 = V_m e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

Τα 3 διανύσματα στρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω αντι-ωρολογιακά

Η "διαδοχή" φάσεων είναι 1 – 2 – 3 (ευθύ σύστημα)

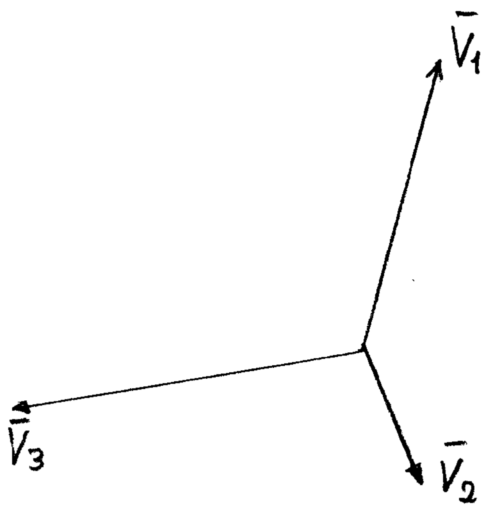


αν τα 3 διανύσματα $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ στρέφονται ωρολογιακά η διαδοχή φάσεων είναι 1 – 3 – 2 (αντίστροφο σύστημα

Παρατηρήστε ότι $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$ (γιατί;)

(γενικότερα $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n = 0$ σε συμμετρικό σύστημα!)

$n = 3$ Μη συμμετρικό 3 φασικό σύστημα



$$V_1(t) = V_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1)$$
$$V_2(t) = V_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2)$$
$$\omega \quad V_3(t) = V_{3m} \sin(\omega t - \varphi_3)$$

<u>Προσοχή!</u>

- Για να είναι 3φασικό το σύστημα θα πρέπει <u>οπωσδήποτε</u> να έχουμε $\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$

Αν έχουμε π.χ. $\varphi_1 = \varphi_2 \neq \varphi_3$ έχουμε διφασικό σύστημα

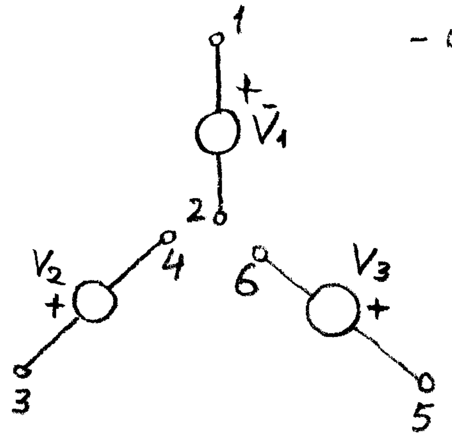
και αν $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 \rightarrow$ μονοφασικό σύστημα!

(δεν υπάρχει διαφορά φάσεως...)

11.3 Τριφασικά συστήματα

Παρακάτω θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριφασικά συστήματα γιατί είναι αυτά που χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά στις εφαρμογές

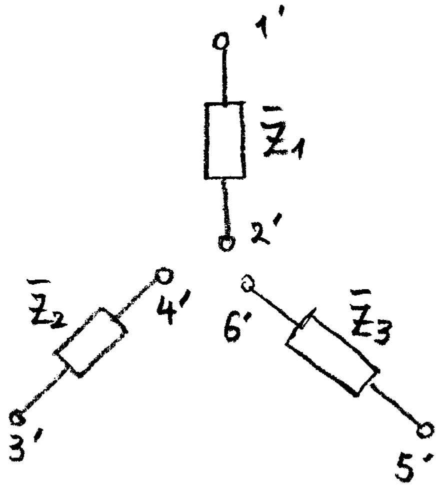
Τριφασική γεννήτρια



- αποτελείται από 3 πηγές τάσεως (άρα έχει 6 ακροδέκτες)

οι 3 τάσεις $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$ αποτελούν συνήθως συμμετρικό τριφασικό σύστημα

Τριφασικό φορτίο



- αποτελείται από 3 σύνθετες αντιστάσεις $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$ όχι απαραίτητα ίσες μεταξύ τους

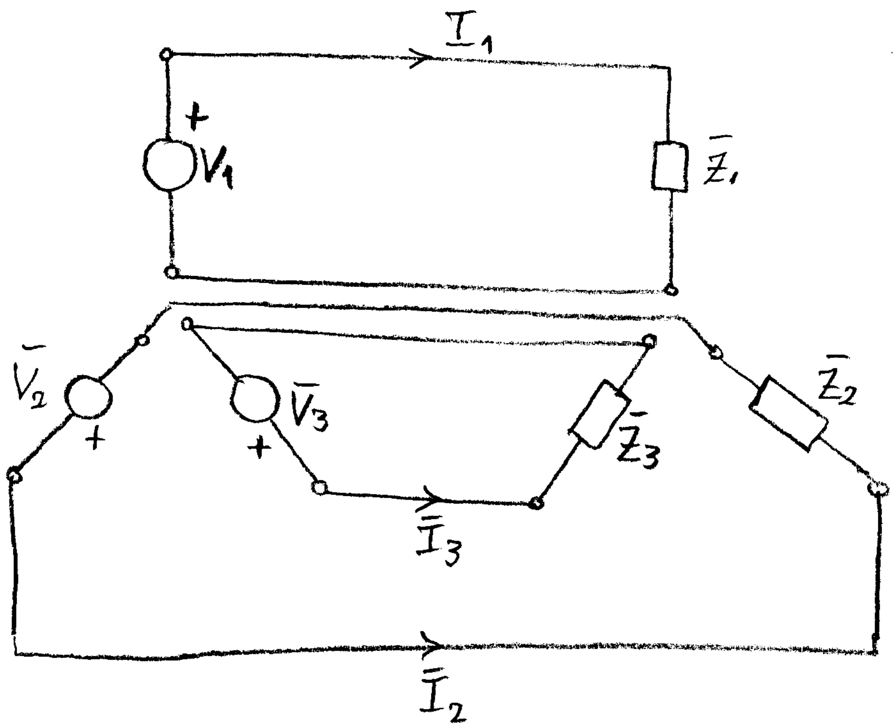
Πάλι έχουμε 6 ακροδέκτες

Αν ισχύει $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3$ το τριφασικό φορτίο λέγεται συμμετρικό

Τίθεται το ερώτημα:

- Πως θα συνδεθεί η τριφασική γεννήτρια με το τριφασικό φορτίο;

Η πιο απλή λύση φαίνεται παρακάτω:



Χρησιμοποιούμε 6 αγωγούς και συνδέουμε κάθε πηγή με το αντίστοιχο φορτίο ανεξάρτητα μεταξύ τους (3 κυκλώματα)

Αναφέραμε ότι το σύστημα πηγών $(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3)$ είναι συμμετρικό

Αν συμβεί να ισχύει $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}$ τότε και το σύστημα των 3 ρευμάτων:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}}, \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}}$$

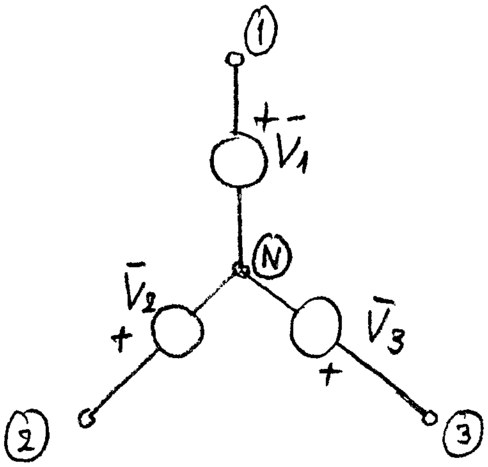
είναι συμμετρικό

11.4 Ζεύξεις τριφασικών συστημάτων

Ο προηγούμενος απλός τρόπος σύνδεσης 3φασικής γεννήτριας – φορτίου δεν χρησιμοποιείται ποτέ γιατί είναι αντι-οικονομικός σε κόστος αγωγών (πολλοί αγωγοί)

Στην πράξη χρησιμοποιούνται οι 2 παρακάτω τρόποι σύνδεσης πηγών και φορτίων μεταξύ τους

11.4.1 Ζεύξη πηγών σε αστέρα



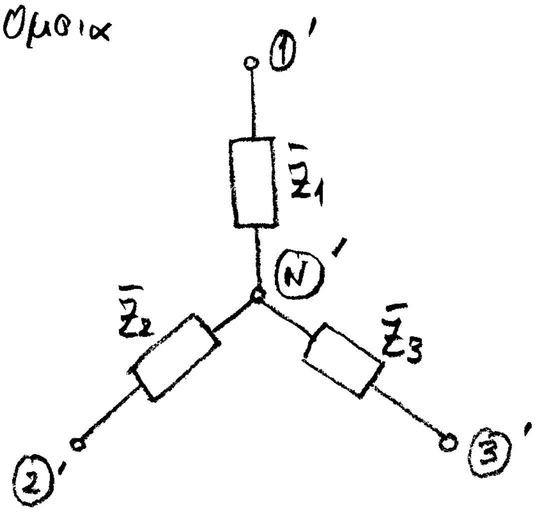
3φασική γεννήτρια
Ζεύξη αστέρα

Συνδέουμε σε κοινό κόμβο Ⓝ τον αρνητικό πόλο κάθε πηγής
ο κόμβος Ⓝ αποκαλείται
<u>ουδέτερος κόμβος</u>

Η 3φασική μας γεννήτρια έχει τώρα 4 ακροδέκτες (αντί 6). Ακροδέκτες ①, ②, ③, Ⓝ

11.4.2 Ζεύξη φορτίου σε αστέρα

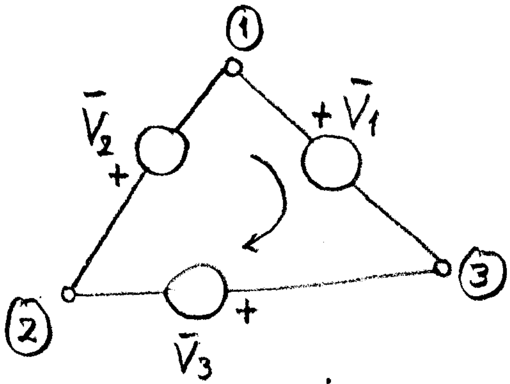
Όμοια



3φασικό φορτίο
Ζεύξη αστέρα

– το τριφασικό φορτίο έχει και αυτό 4 ακροδέκτες
Ακροδέκτες ①', ②', ③', Ⓝ'

11.4.3 Ζεύξη πηγών σε τρίγωνο



3φασική γεννήτρια ζεύξη τριγώνου

Οι 3 πηγές συνδέονται διαδοχικά η μία μετά την άλλη

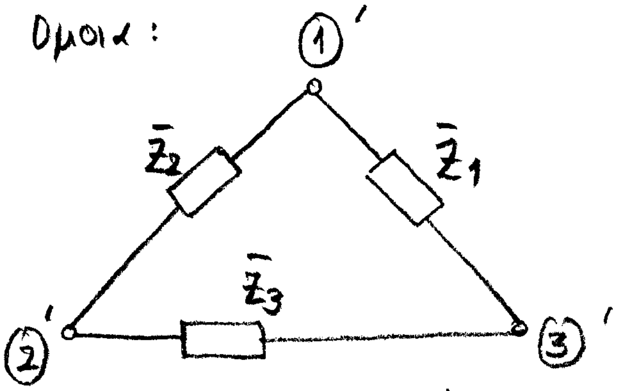
Αν το σύστημα πηγών είναι συμμετρικό (που σχεδόν πάντα θα είναι) θα ισχύει $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$

άρα δεν διαταράσσεται ο Ν.Ρ.Κ στον κλειστό βρόχο!

Παρατηρούμε ότι η 3φασική γεννήτρια έχει 3 ακροδέκτες!

11.4.4. Ζεύξη φορτίων σε τρίγωνο

Όμοια:



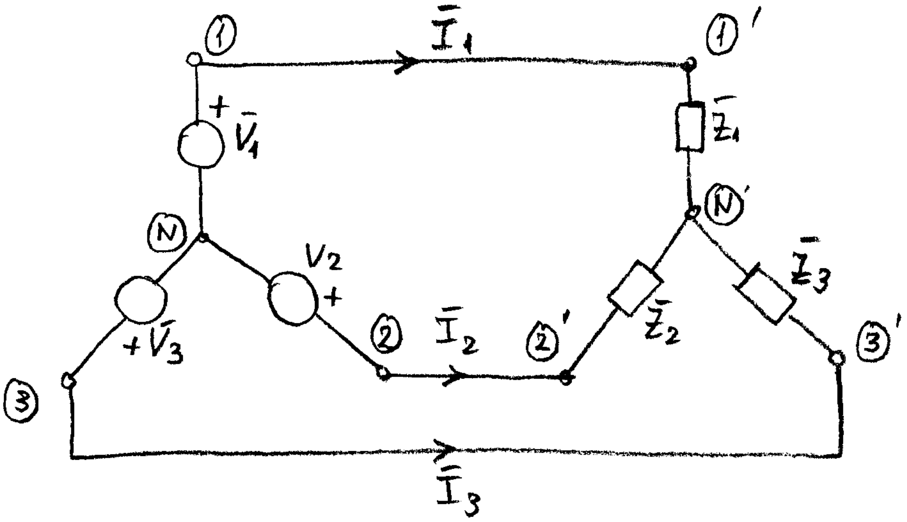
3 φασικό φορτίο ζεύξη τριγώνου

το τριφασικό φορτίο έχει και αυτό 3 ακροδέκτες

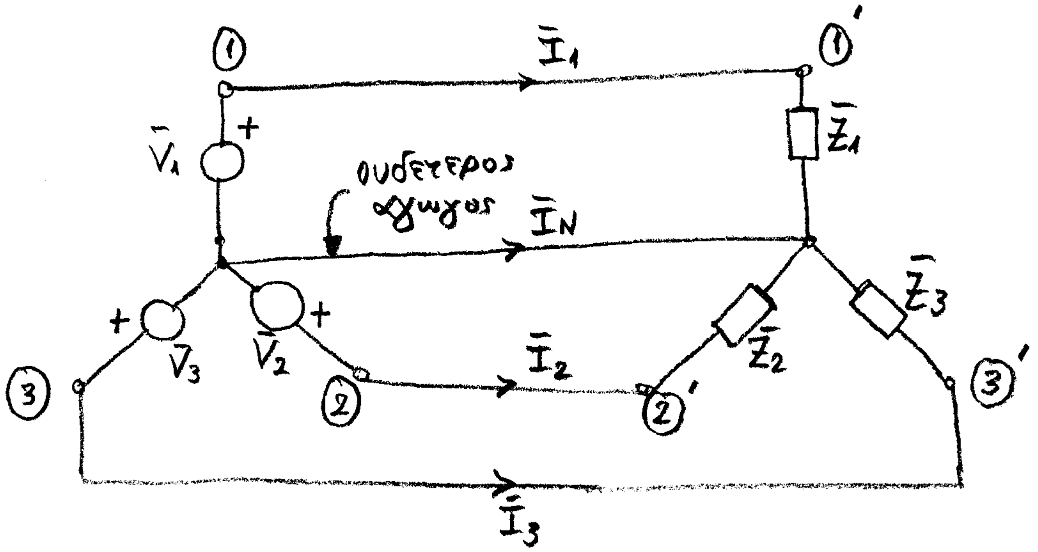
11.4.5 Ζεύξεις 3φασικών πηγών με 3φασικά φορτία

Προφανώς επιτρέπονται όλοι οι συνδυασμοί ζεύξεων πηγής-φορτίου. Αναφέρουμε παρακάτω όλους τους δυνατούς συνδυασμούς:

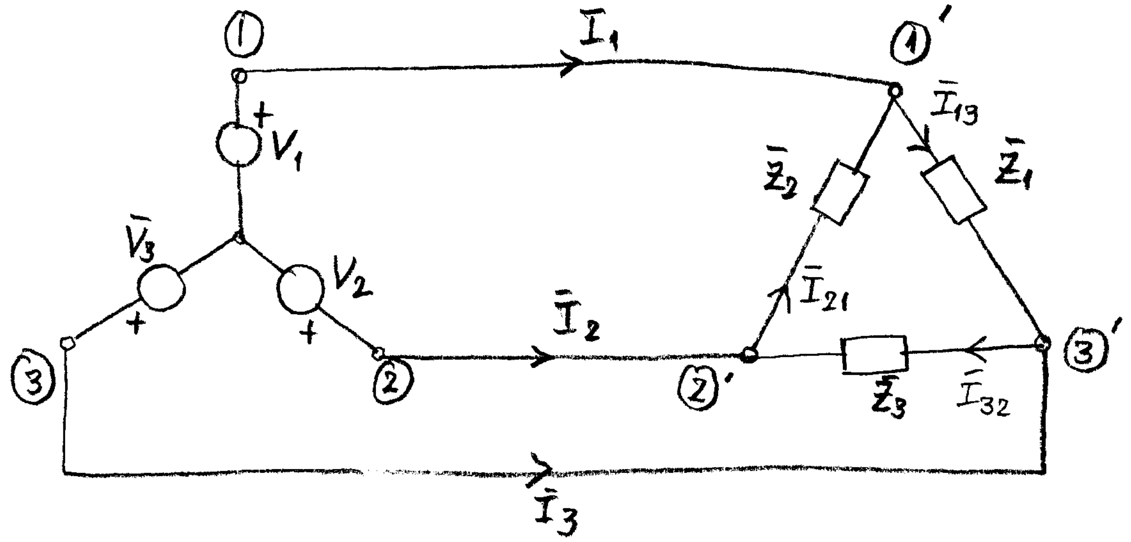
α) Πηγή αστέρας – φορτίο αστέρας χωρίς ουδέτερο αγωγό



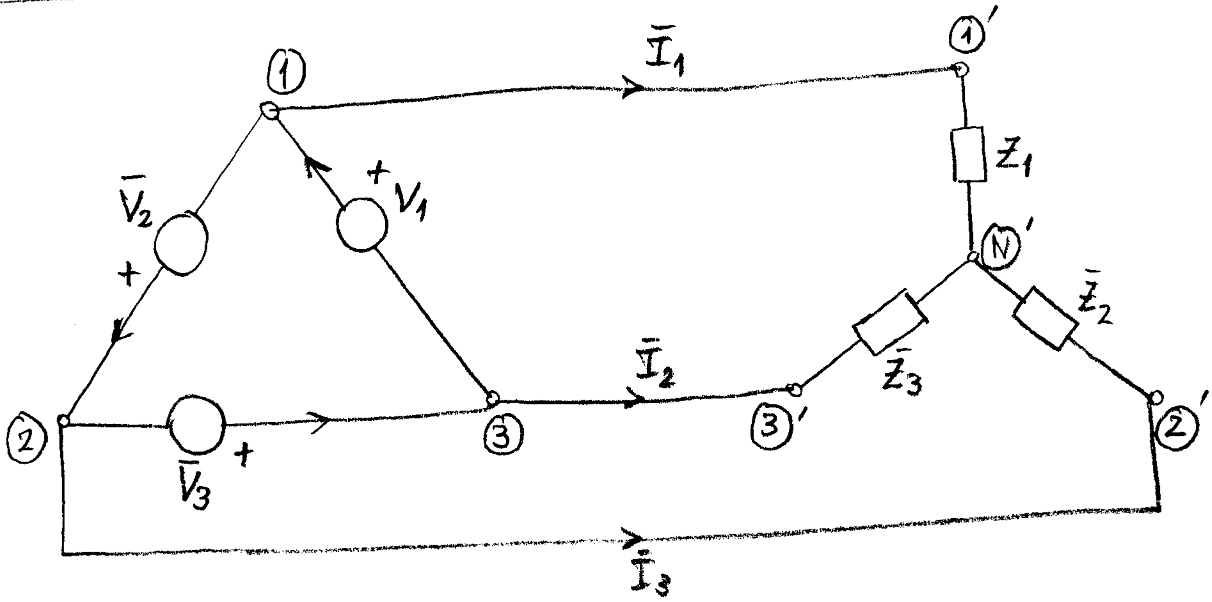
β) Πηγή αστέρας – φορτίο αστέρας με ουδέτερο αγωγό



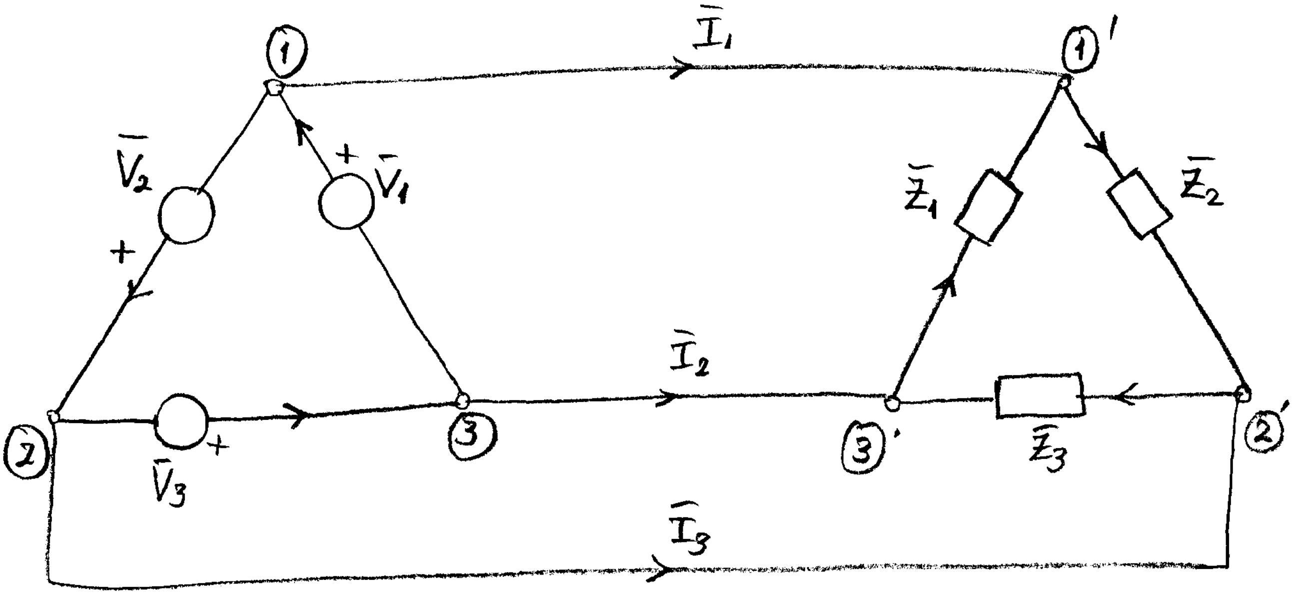
γ) Πηγή αστέρας - φορτίο τρίγωνο



δ) Πηγή τρίγωνο - φορτίο αστέρας



ε) Πηγή τρίγωνο – φορτίο τρίγωνο



11.5 Φασικά και πολικά μεγέθη (ή μεγέθη γραμμής)

Στα 3φασικά δίκτυα, ανεξάρτητα από τόν τρόπο ζεύξεως γεννήτριας ή φορτίου, ορίζονται τα φασικά και τα πολικά μεγέθη (τάσεις και ρεύματα). Παρακάτω δίνουμε τους ακριβείς ορισμούς τους.

- Φασική Τάση : $\bar{V}_\varphi$ είναι η τάση μεταξύ των δύο ακροδεκτών μιας γεννήτριας ή ενός φορτίου

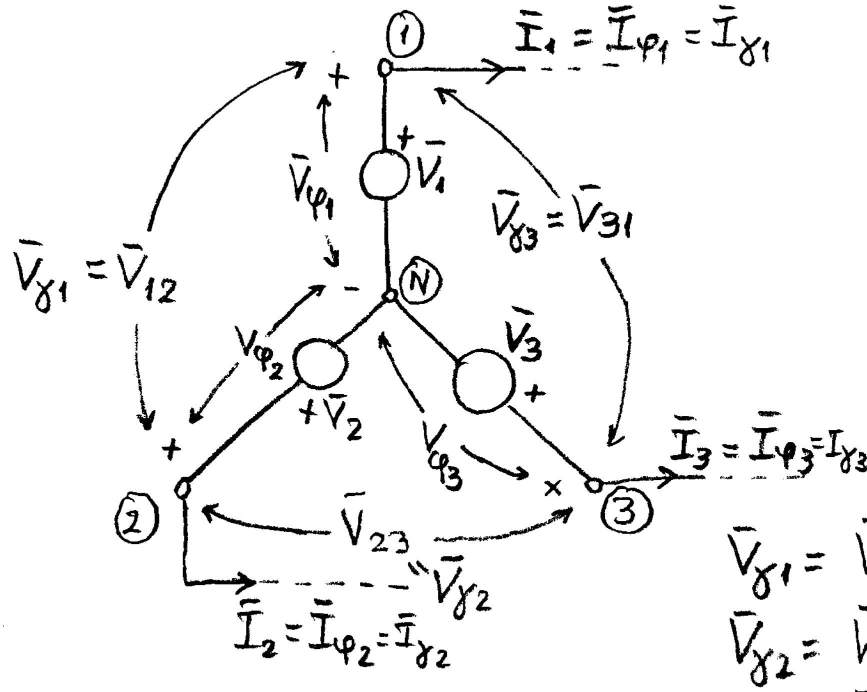
- Πολική τάση (η τάση γραμμής) : $\bar{V}_\gamma$ είναι η τάση μεταξύ των δύο διαδοχικών (+) στην 3φασική γεννήτρια

Φασικό ρεύμα $\bar{I}_\varphi$: το ρεύμα που διαρρέει κάθε γεννήτρια ή κάθε φορτίο

Πολικό ρεύμα I_γ : το ρεύμα που διαρρέει κάθε αγωγό σύνδεσης της 3φασικής γεννήτριας με το 3φασικό φορτίο

Παρακάτω θα δώσουμε αναλυτικά παραδείγματα των τάσεων και των ρευμάτων αυτών

Ζεύξη πηγών σε αστέρα (αντίστοιχα ισχύουν για ζεύξη φορτίου σε αστέρα)



Φασικές τάσεις

$$\bar{V}_{\varphi_1} = \bar{V}_{1N} = \bar{V}_1$$
$$\bar{V}_{\varphi_2} = \bar{V}_{2N} = \bar{V}_2$$
$$\bar{V}_{\varphi_3} = \bar{V}_{3N} = \bar{V}_3$$

Πολικές τάσεις

$$\bar{V}_{\gamma 1} = \bar{V}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$$
$$\bar{V}_{\gamma 2} = \bar{V}_{23} = \bar{V}_2 - \bar{V}_3$$
$$\bar{V}_{\gamma 3} = \bar{V}_{31} = \bar{V}_3 - \bar{V}_1$$

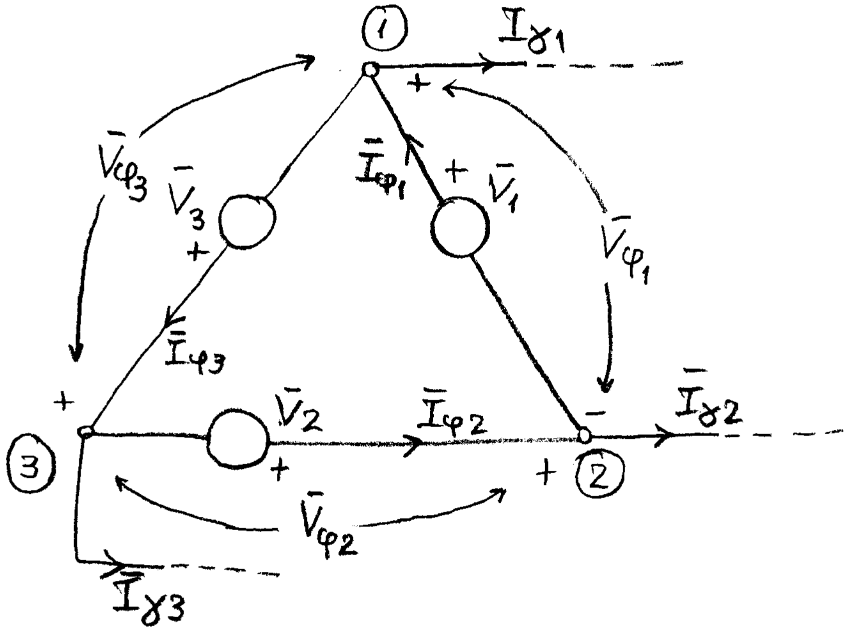
Φασικά ρεύματα

$$\bar{I}_{\varphi_1} = \bar{I}_1$$
$$\bar{I}_{\varphi_2} = \bar{I}_2$$
$$\bar{I}_{\varphi_3} = \bar{I}_3$$

Πολικά ρεύματα

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_{\gamma 1} &= \bar{I}_{\varphi_1} \\ \bar{I}_{\gamma 2} &= \bar{I}_{\varphi_2} \\ \bar{I}_{\gamma 3} &= \bar{I}_{\varphi_3} \end{aligned}\right\}$$ συμπίπτουν με τα φασικά ρεύματα

Ζεύξη πηγών σε τρίγωνο (αντίστοιχα ισχύουν για ζεύξη φορτίου σε τρίγωνο)



Φασικές τάσεις

$$\bar{V}_{\varphi 1} = \bar{V}_1$$
$$\bar{V}_{\varphi 2} = \bar{V}_2$$
$$\bar{V}_{\varphi 3} = \bar{V}_3$$

Πολικές τάσεις

$$\left.\begin{aligned} \bar{V}_{\gamma 1} &= \bar{V}_{12} = \bar{V}_1 = \bar{V}_{\varphi 1} \\ \bar{V}_{\gamma 2} &= \bar{V}_{23} = \bar{V}_2 = \bar{V}_{\varphi 2} \\ \bar{V}_{\gamma 3} &= V_{31} = V_3 = V_{\varphi 3} \end{aligned}\right\}$$ συμπίπτουν με τις φασικές τάσεις

φασικά ρεύματα

$\bar{I}_{\varphi 1}$

$\bar{I}_{\varphi 2}$ φαίνονται στο σχήμα

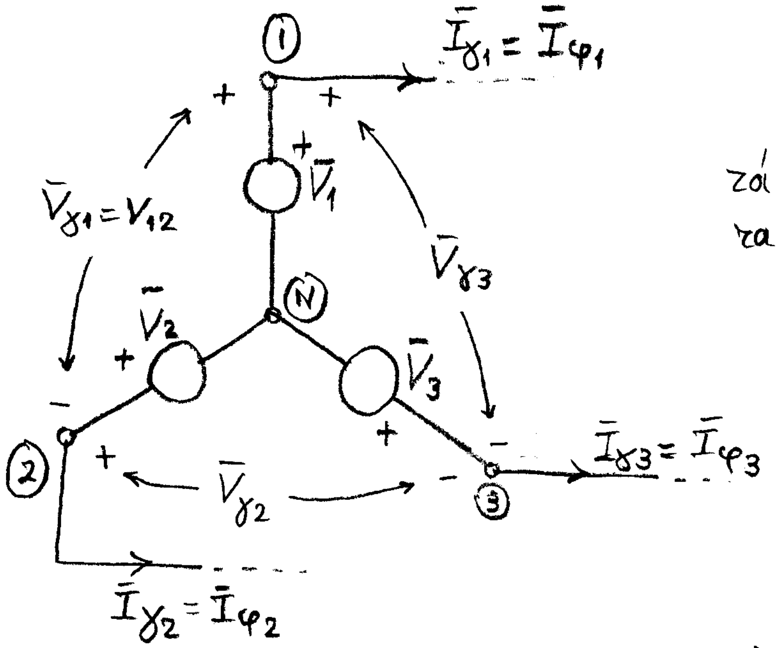
$\bar{I}_{\varphi 3}$

Πολικά ρεύματα

$$\bar{I}_{\gamma 1} = \bar{I}_{\varphi 1} - \bar{I}_{\varphi 3}$$
$$\bar{I}_{\gamma 2} = \bar{I}_{\varphi 2} - \bar{I}_{\varphi 1}$$
$$\bar{I}_{\gamma 3} = \bar{I}_{\varphi 3} - \bar{I}_{\varphi 2}$$

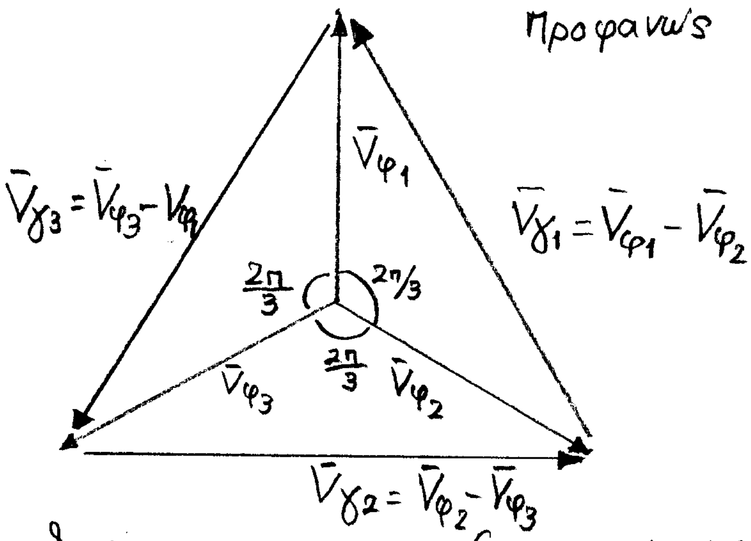
11.6 Σχέση φασικών και πολικών μεγεθών σε συμμετρικά 3φασικά συστήματα

Ζεύξη αστέρα (πηγές ή φορτία)



εδώ τα 3 πολικά ρεύματα ταυτίζονται με τα 3 φασικά ρεύματα

εξετάζω τις πολικές τάσεις (τάσεις γραμμής)

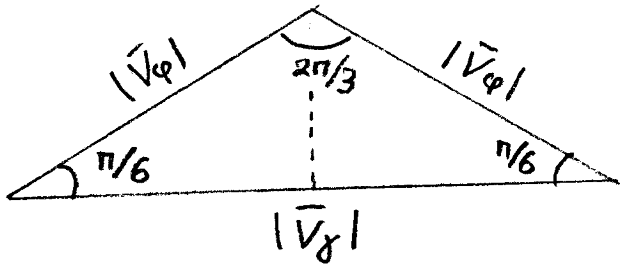


Προφανώς $|\bar{V}_{\varphi 1}| = |\bar{V}_{\varphi 2}| = |\bar{V}_{\varphi 3}| = |\bar{V}_\varphi|$

οι $\bar{V}_{\gamma 1}$, $\bar{V}_{\gamma 2}$, $\bar{V}_{\gamma 3}$ θα έχουν ίσα μέτρα (λόγω συμμετρίας)

δηλ $|\bar{V}_{\gamma 1}| = |\bar{V}_{\gamma 2}| = |\bar{V}_{\gamma 3}| = |\bar{V}_\gamma|$

άρα θα έχουμε :



$$|\bar{V}_\gamma| = 2|\bar{V}_\varphi|\cos\frac{\pi}{6} = 2|\bar{V}_\varphi|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,|\bar{V}_\varphi|$$

δηλαδή σε συμμετρικό 3 φασικό σύστημα

ισχύει

$$|\bar{I}_{\text{πολικό}}| = |\bar{I}_{\text{φασικό}}|$$

$$\boxed{|\bar{V}_\gamma| = |\bar{V}_{\text{πολική}}| = \sqrt{3}\,|\bar{V}_{\text{φασική}}|}$$ (ζεύξη αστέρα)

(π.χ στο δίκτυο ΔΕΗ χαμηλής τάσης, η $V_{\text{φασική}}$ έχει ενεργό τιμή $V_{\text{φασική, εν}} = 220$ Volts

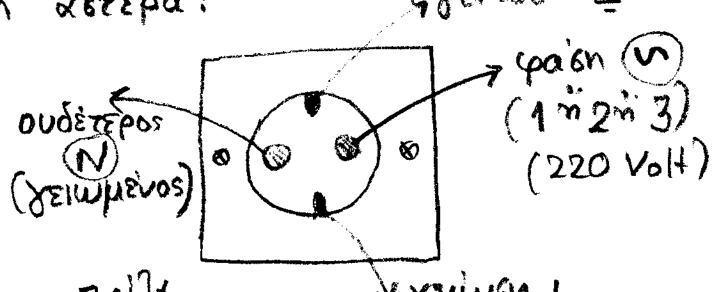
άρα $V_{\text{πολική, εν}} = \sqrt{3}\cdot 220 = 381$ Volts, σύνδεση αστέρα)

Παρατήρηση

Δίκτυο ΔΕΗ. → πρίζες σε οικιακούς καταναλωτές (3 ακροδέκτες)

- φάση ~
- ουδέτερος N
- γείωση ⏚

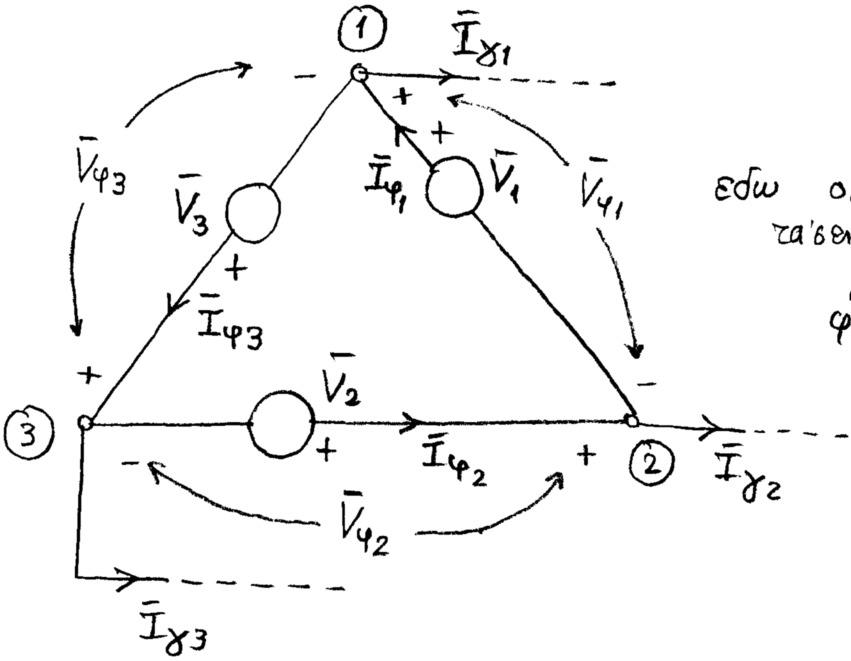
Σύνδεση αστέρα:



πρίζα σπιτιού (μονοφασική)

Ζεύξη τριγώνου (πηγές ή φορτία)

Με εντελώς όμοιο τρόπο σκεπτόμενοι, στη ζεύξη τριγώνου και σε συμμετρικό σύστημα θα έχουμε



εδώ οι 3 πολικές τάσεις ταυτίζονται με τις 3 φασικές τάσεις

$$|\bar{V}_{\varphi 1}| = |\bar{V}_{\varphi 2}| = |\bar{V}_{\varphi 3}| = |\bar{V}_{\varphi}| = |\bar{V}_{\gamma}|$$

και $$|\bar{I}_{\varphi 1}| = |\bar{I}_{\varphi 2}| = |\bar{I}_{\varphi 3}| = |\bar{I}_{\varphi}|$$

$$|\bar{I}_{\gamma 1}| = |\bar{I}_{\gamma 2}| = |\bar{I}_{\gamma 3}| = |\bar{I}_{\gamma}|$$

$$\boxed{|\bar{I}_{\pi o \lambda \iota \kappa o}| = |\bar{I}_{\gamma}| = \sqrt{3}\ |\bar{I}_{\varphi}|}$$ (ζεύξη τριγώνου)

11.7 Επίλυση 3φασικών ηλεκτρικών δικτύων

Για το θέμα αυτό αναφέρουμε τα εξής:

- Θα δίδεται πάντοτε το 3φασικό σύστημα των πηγών το οποίο πάντα θα είναι συμμετρικό, σε συνδεσμολογία αστέρα (συνήθως) ή τριγώνου (πιο σπάνια).

- Το 3φασικό σύστημα των φορτίων θα είναι και αυτό σε σύνδεση αστέρα ή τριγώνου, αλλά όχι απαραίτητα πάντοτε συμμετρικό

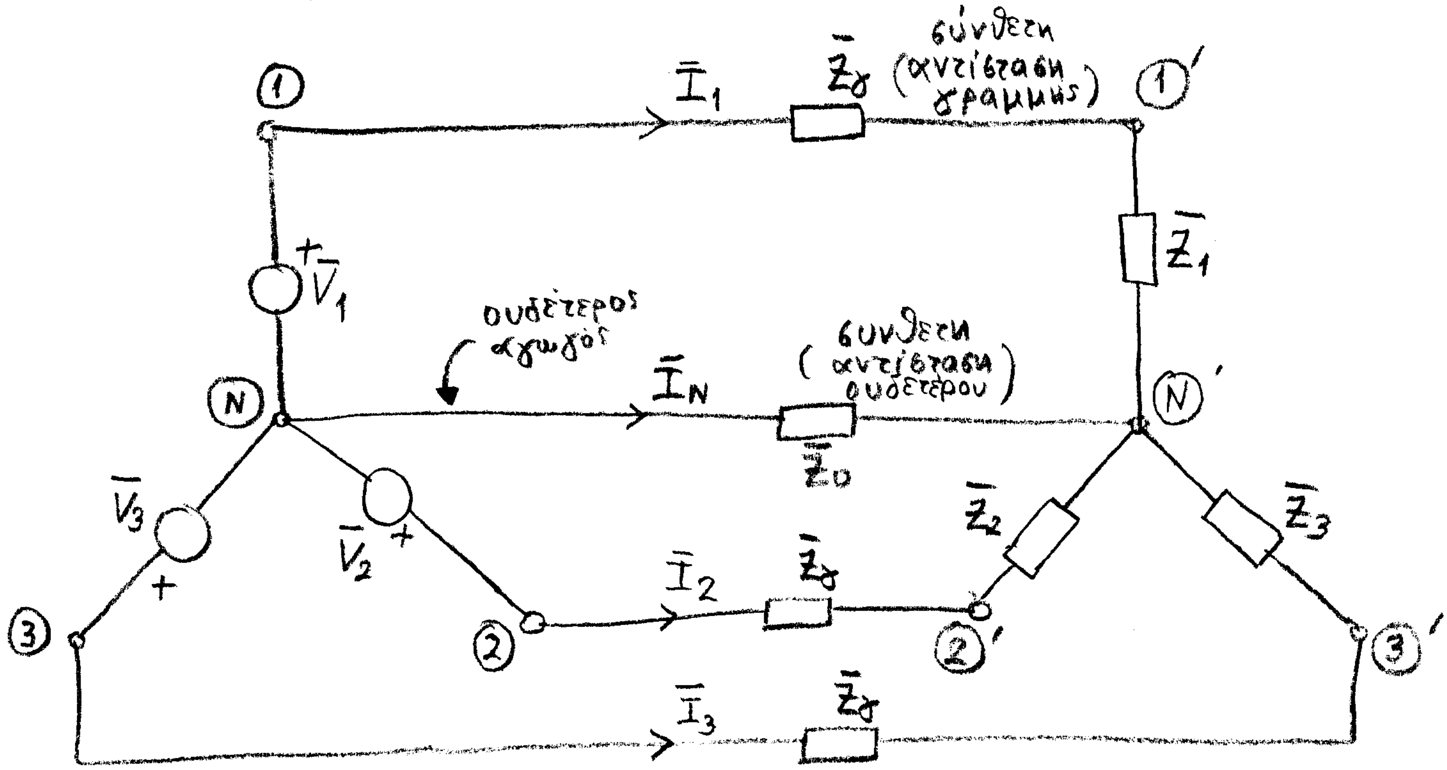
- Ζητούνται οι τάσεις και τα ρεύματα στα φορτία καθώς και οι ισχύες (ενεργος, άεργος, φαινομένη)

- Βασική σημασία έχουν στην επίλυση 3φασικών ηλεκτρικών δικτύων
  - Το θεώρημα Millman, όπως θα δούμε...
  - ο μετασχηματισμός αστέρα-τριγώνου

Παρακάτω θα προχωρήσουμε σε παραδείγματα.

Ζεύξη (σύνδεση) αστέρα (πηγές) – αστέρα (φορτία)

Η συνδεσμολογία φαίνεται παρακάτω.



το 3φασικό σύστημα των πηγών θα είναι συμμετρικό και:

$$\left.\begin{aligned}\bar V_1 &= V_m\\ \bar V_2 &= V_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}\\ \bar V_3 &= V_m e^{-j\frac{4\pi}{3}}\end{aligned}\right\}\ \underline{\text{ευθύ σύστημα}}$$

(διαδοχή 1-2-3)

ή

$$\left.\begin{aligned}\bar V_1 &= V_m\\ \bar V_2 &= V_m e^{-j\frac{4\pi}{3}}\\ \bar V_3 &= V_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}\end{aligned}\right\}\ \underline{\text{αντίστροφο σύστημα}}$$

(διαδοχή 1-3-2)

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με το ευθύ σύστημα...

Το "κλειδί" για την επίλυση του ανωτέρω δικτύου είναι ο υπολογισμός της τάσεως $\bar V_{NN'}$

Εδώ θα μας βοηθήσει πολύ το θεώρημα Millman

Έχουμε λοιπόν:

$$\bar{V}_{NN'} = \frac{-\bar{V}_1 \frac{1}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_\gamma} - V_2 \frac{1}{\bar{Z}_2+\bar{Z}_\gamma} - V_3 \frac{1}{\bar{Z}_3+\bar{Z}_\gamma}}{\frac{1}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_\gamma} + \frac{1}{\bar{Z}_2+\bar{Z}_\gamma} + \frac{1}{\bar{Z}_3+\bar{Z}_\gamma} + \frac{1}{\bar{Z}_0}} = \text{γνωστή}$$

άρα $\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \bar{Z}_\gamma + \bar{I}_1 \bar{Z}_1 + \bar{V}_{N'N}$

ή $\bar{V}_1 = \bar{I}_1 (\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}_1) - \bar{V}_{NN'} \Rightarrow \bar{I}_1 = \dfrac{\bar{V}_1 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}_1}$

ομοια... $\bar{I}_2 = \dfrac{\bar{V}_2 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}_2}$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}_3}$$

και το δίκτυο επιλύεται...

Αν έχουμε $\bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = \bar{Z}$ (συμμετρικό φορτίο)

τότε:

$$\bar{V}_{NN'} = \frac{-\frac{1}{\bar{Z}+\bar{Z}_\gamma}(\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3)}{\frac{3}{\bar{Z}+\bar{Z}_\gamma} + \frac{1}{\bar{Z}_0}} = 0$$

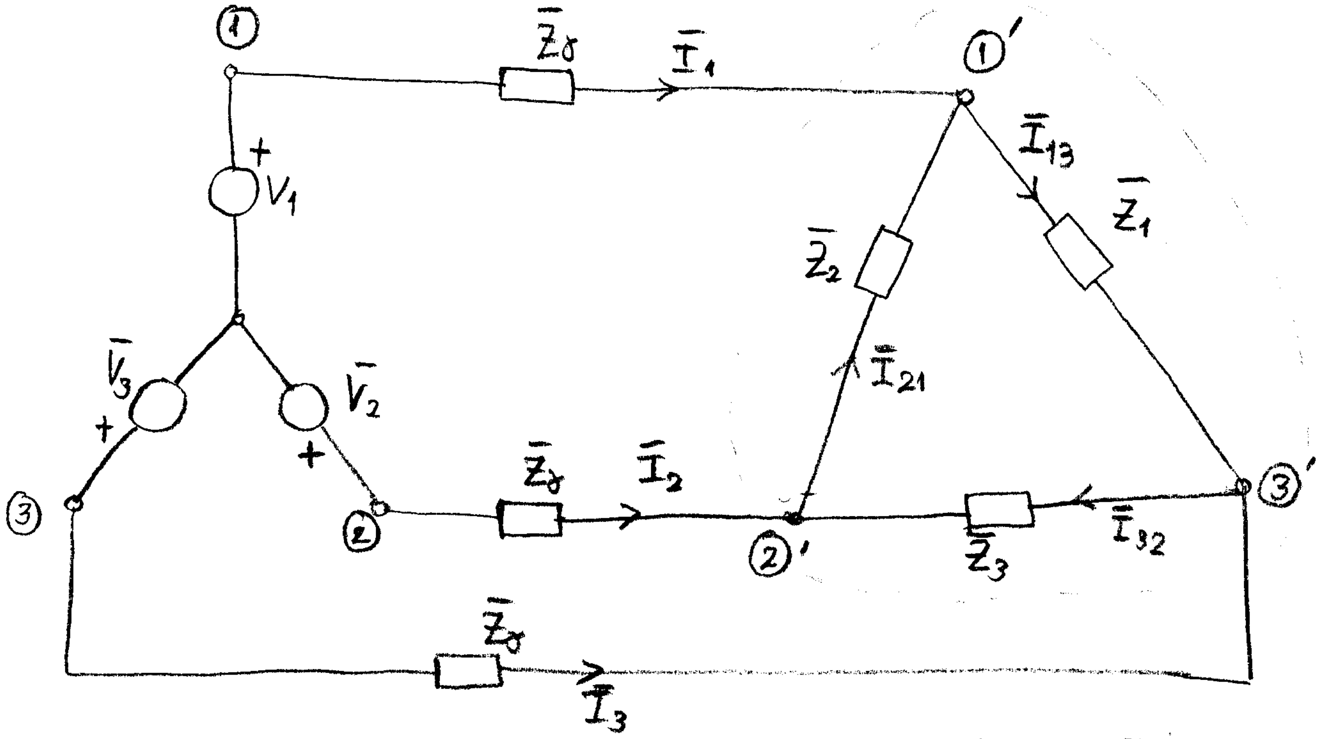
άρα ο ουδέτερος αγωγός ΔΕΝ χρειάζεται! (δέν διαρρέεται απο ρεύμα!)

και $\bar{I}_1 = \dfrac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}}$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_3}{\bar{Z}_\gamma + \bar{Z}}$$

Ζεύξη αστέρα (πηγές) - τριγώνου (φορτία)

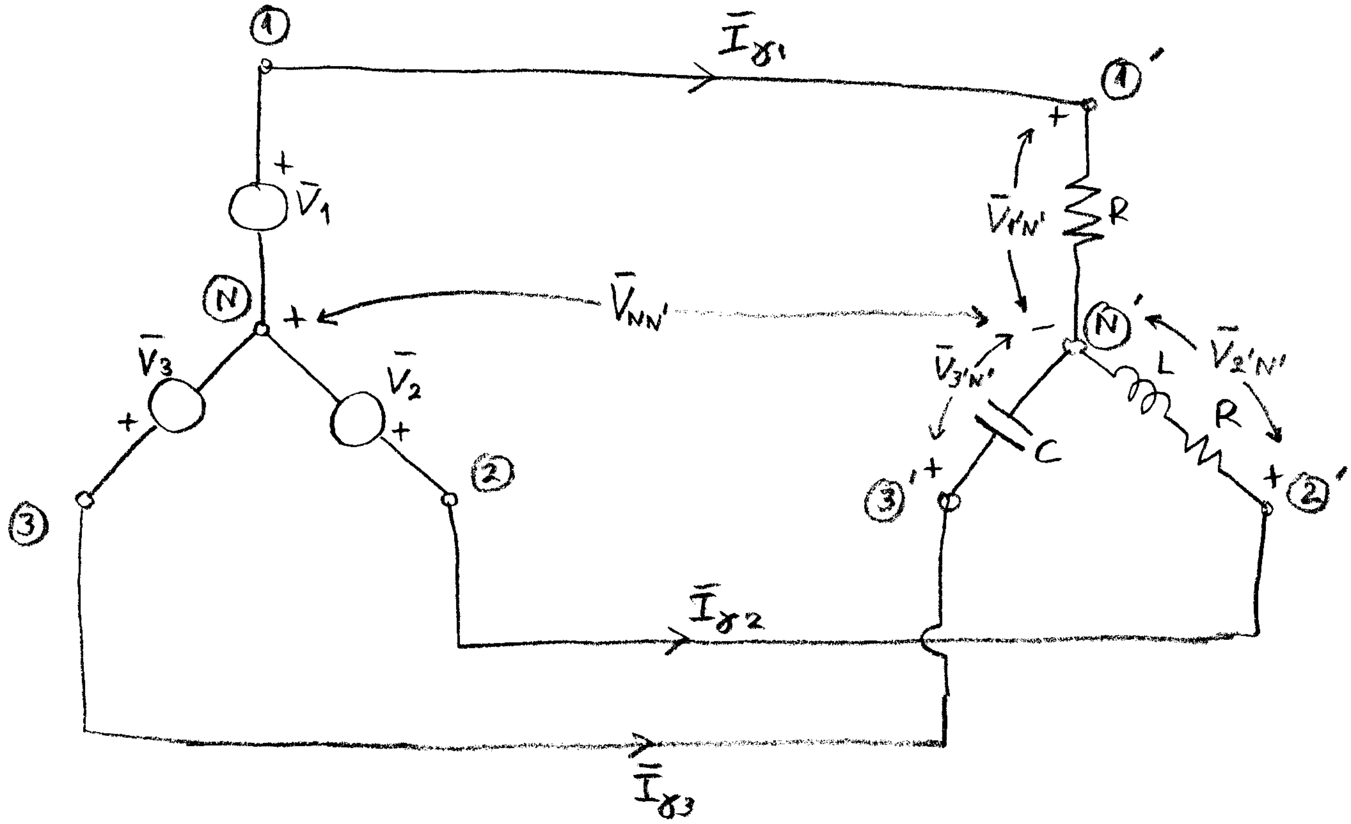


στην περίπτωση αυτή μετατρέπουμε το τρίγωνο των φορτίων ($\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$) σε αστέρα και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα ...

Θα ακολουθήσουν λυμένα παραδείγματα...

Εφαρμογή 1

Δίδεται το ακόλουθο τριφασικό δίκτυο:



Ουδέτερος δεν υπάρχει.

Δίδονται

$$\left.\begin{aligned}\bar{V}_1 &= 200 \text{ V}\\ \bar{V}_2 &= 200\angle -2\pi/3 \text{ V}\\ \bar{V}_3 &= 200\angle -4\pi/3 \text{ V}\end{aligned}\right\}$$ ευθύ συμμετρικό 3φασικό σύστημα πηγών

$\omega = 2\pi \cdot 50 = 314.16$ r/s

$R = 100\,\Omega$

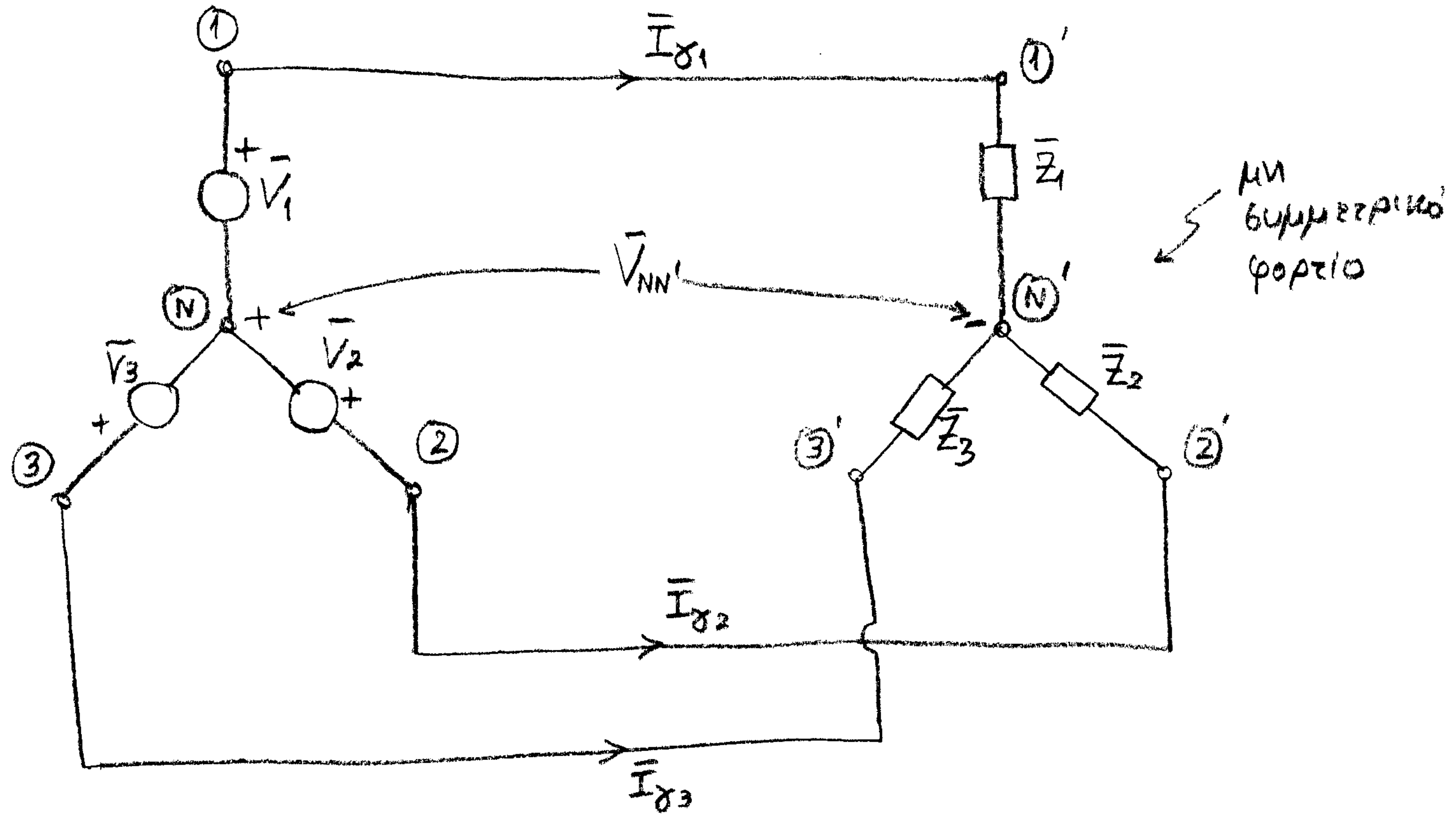
$L = 0.319$ H

$C = 31.83\ \mu F$

Ζητούνται οι τάσεις $\bar{V}_{1'N'}$, $\bar{V}_{2'N'}$, $\bar{V}_{3'N'}$ (φασικές τάσεις) και τα ρεύματα $\bar{I}_{\gamma 1}$, $\bar{I}_{\gamma 2}$, $\bar{I}_{\gamma 3}$

Απ/

το δίκτυο γράφεται:



όπου $\bar{Z}_1 = R = 100\,\Omega$

$\bar{Z}_2 = R + j\omega L = 100 + j100\,\Omega$

$\bar{Z}_3 = \frac{1}{j\omega C} = -j100\,\Omega$

άρα

$$\bar{V}_{NN'} = -\frac{-\bar{V}_1\frac{1}{\bar{Z}_1} - \bar{V}_2\frac{1}{\bar{Z}_2} - \bar{V}_3\frac{1}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}} = -\frac{1.7526\angle 51.2^\circ}{0.0158\angle 18.3^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V}_{NN'} = 110.92\angle 32.9^\circ \text{ Volts}}$$

επομένως:

$$-\bar{V}_1 + \bar{I}_{\gamma 1}\bar{Z}_1 + \bar{V}_{N'N} = 0 \Rightarrow \bar{I}_{\gamma 1} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_1} = 2.99\angle 11.6^\circ \text{ A}$$

ομοίως

$$\bar{I}_{\gamma 2} = \frac{\bar{V}_2 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_2} = 0.80\angle -138.5^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{\gamma 3} = \frac{\bar{V}_3 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_3} = 2.33\angle -178.3^\circ \text{ A}$$

(έλεγχος $\bar{I}_{\gamma 1} + \bar{I}_{\gamma 2} + \bar{I}_{\gamma 3} = 7.9\times 10^{-4} + j2\times 10^{-3} \simeq 0 + j0$
(σωστό)

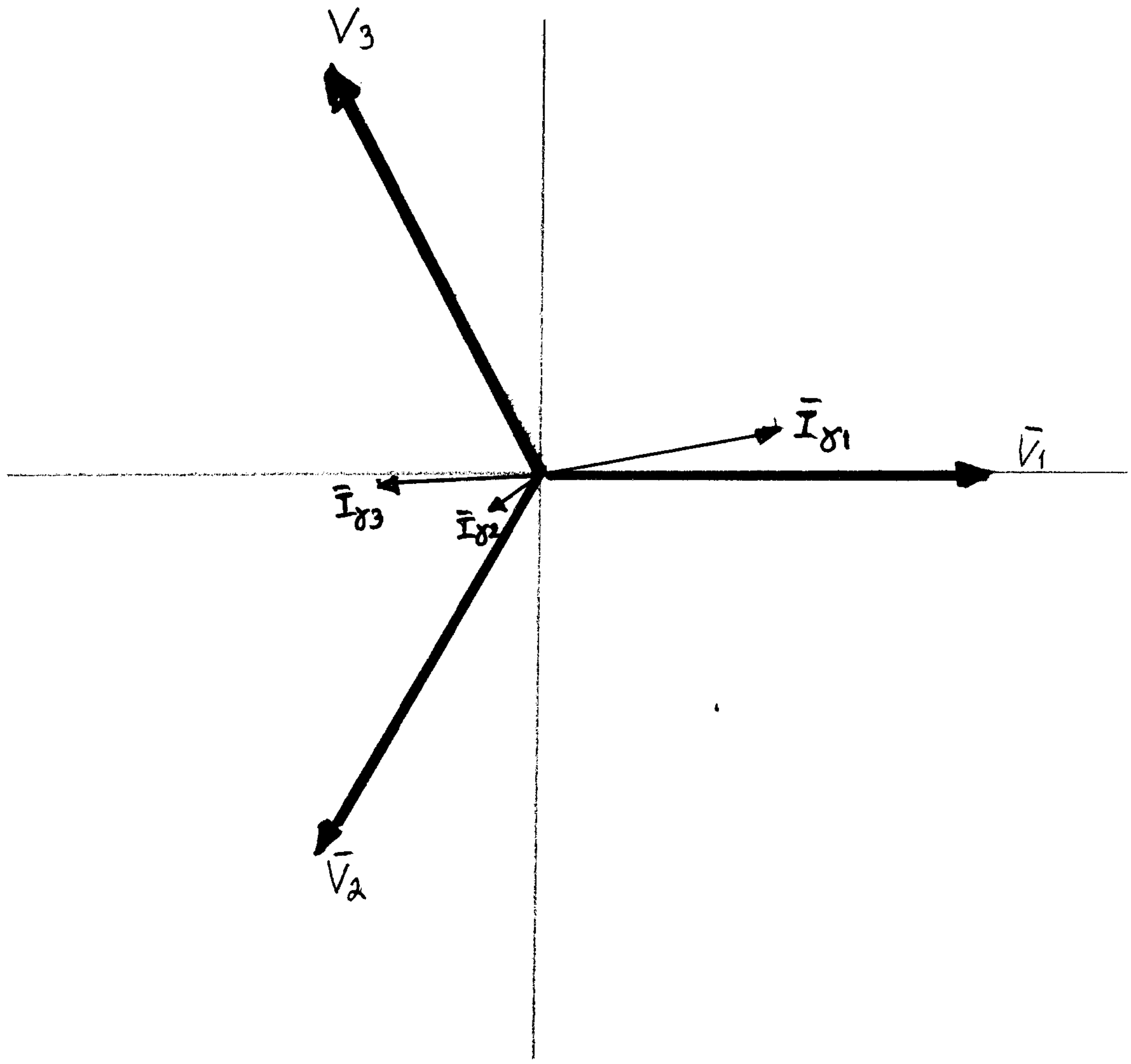
υπολογισμός φασικών τάσεων

$$\bar{V}_{1'N'} = \bar{I}_{\gamma 1} \cdot \bar{Z}_1 = 299 \angle 11.6^\circ \text{ Volts}$$

$$\bar{V}_{2'N'} = \bar{I}_{\gamma 2} \cdot \bar{Z}_2 = 113.1 \angle -93.5^\circ \text{ Volts}$$

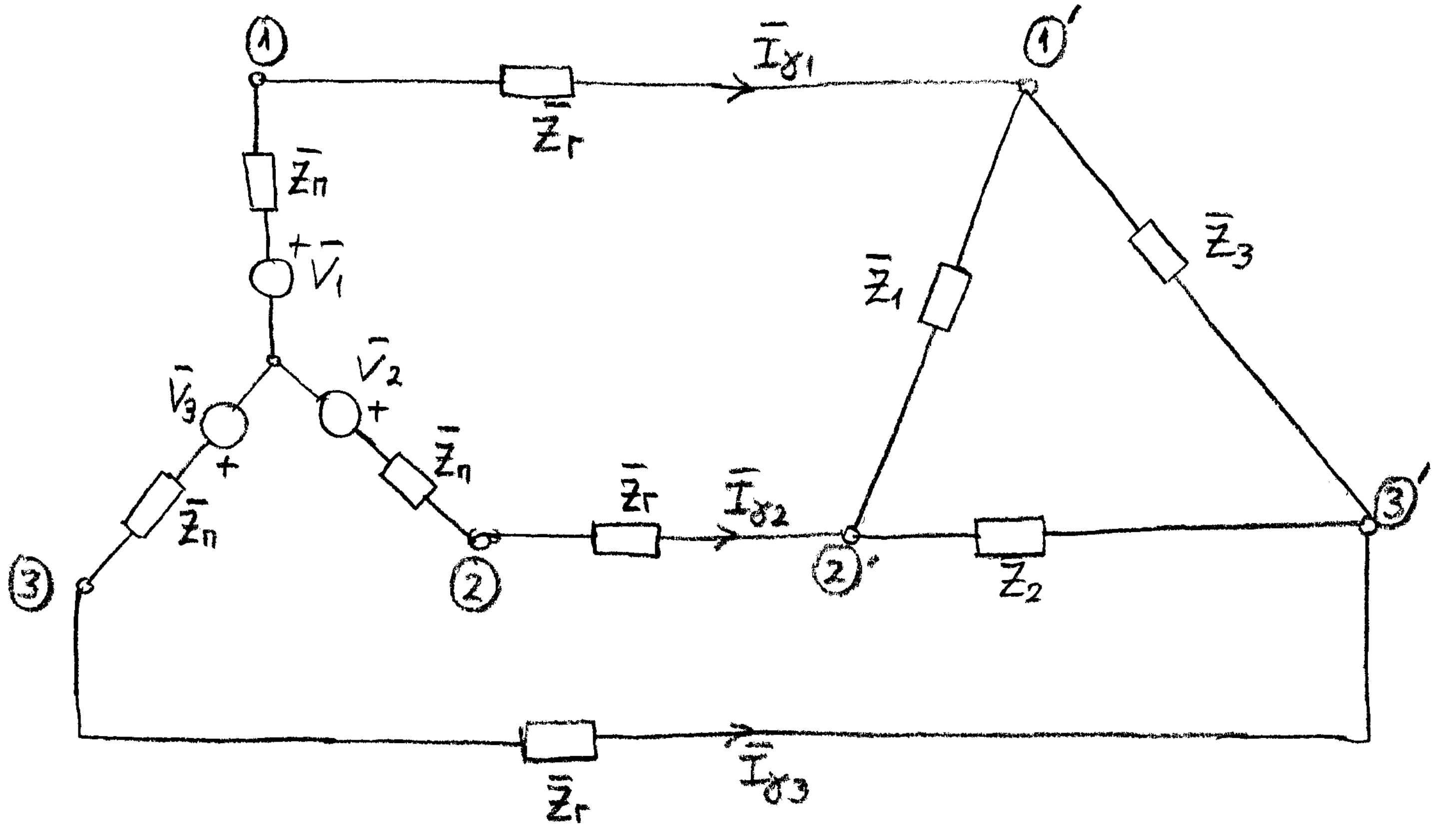
$$\bar{V}_{3'N'} = \bar{I}_{\gamma 3} \cdot \bar{Z}_3 = 233 \angle 91.9^\circ \text{ Volts}$$

Διανυσματικά διαγράμματα



Εφαρμογη 2

Διδεται το τριφασικό δίκτυο:



όπου:

$\bar{V}_1 = 220\ V$

$\bar{V}_2 = 220\angle{-120^\circ}\ V$

$\bar{V}_3 = 220\angle{-240^\circ}\ V$

$\bar{Z}_\pi = 5 + j2\ \Omega$ (εσωτ. αντίσταση πηγών)

$\bar{Z}_r = 10\ \Omega$ (αντίσταση γραμμής)

$\bar{Z}_1 = 50 + j20\ \Omega$

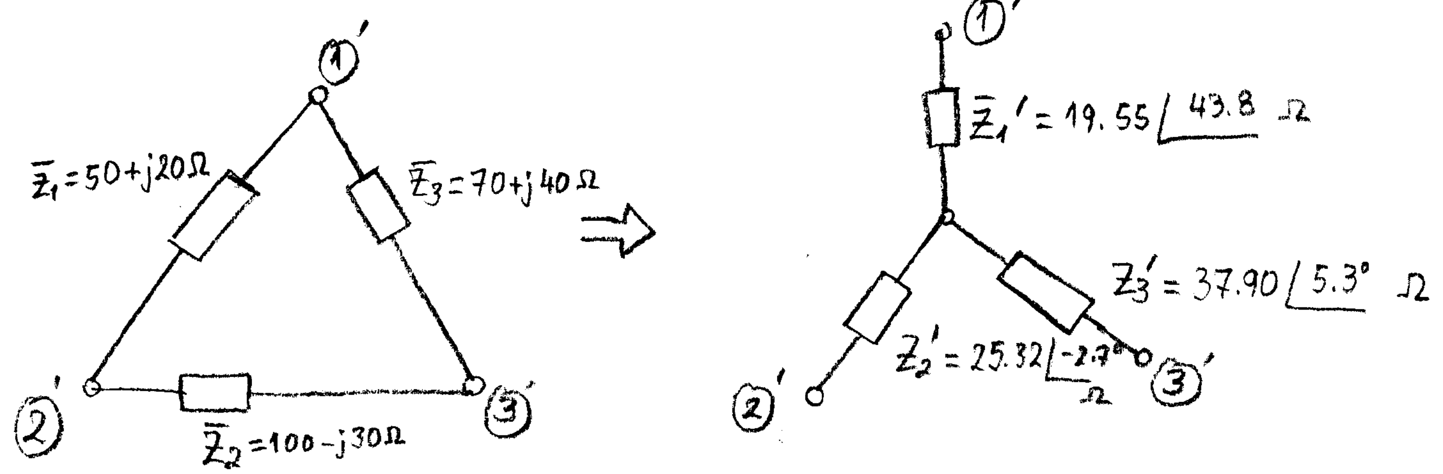
$\bar{Z}_2 = 100 - j30\ \Omega$

$\bar{Z}_3 = 70 + j40\ \Omega$

Ζητούνται τα ρεύματα γραμμής $\bar{I}_{\gamma 1}$, $\bar{I}_{\gamma 2}$, $\bar{I}_{\gamma 3}$

Απ/

Μετασχηματίζουμε το τρίγωνο $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ σε αστέρα:



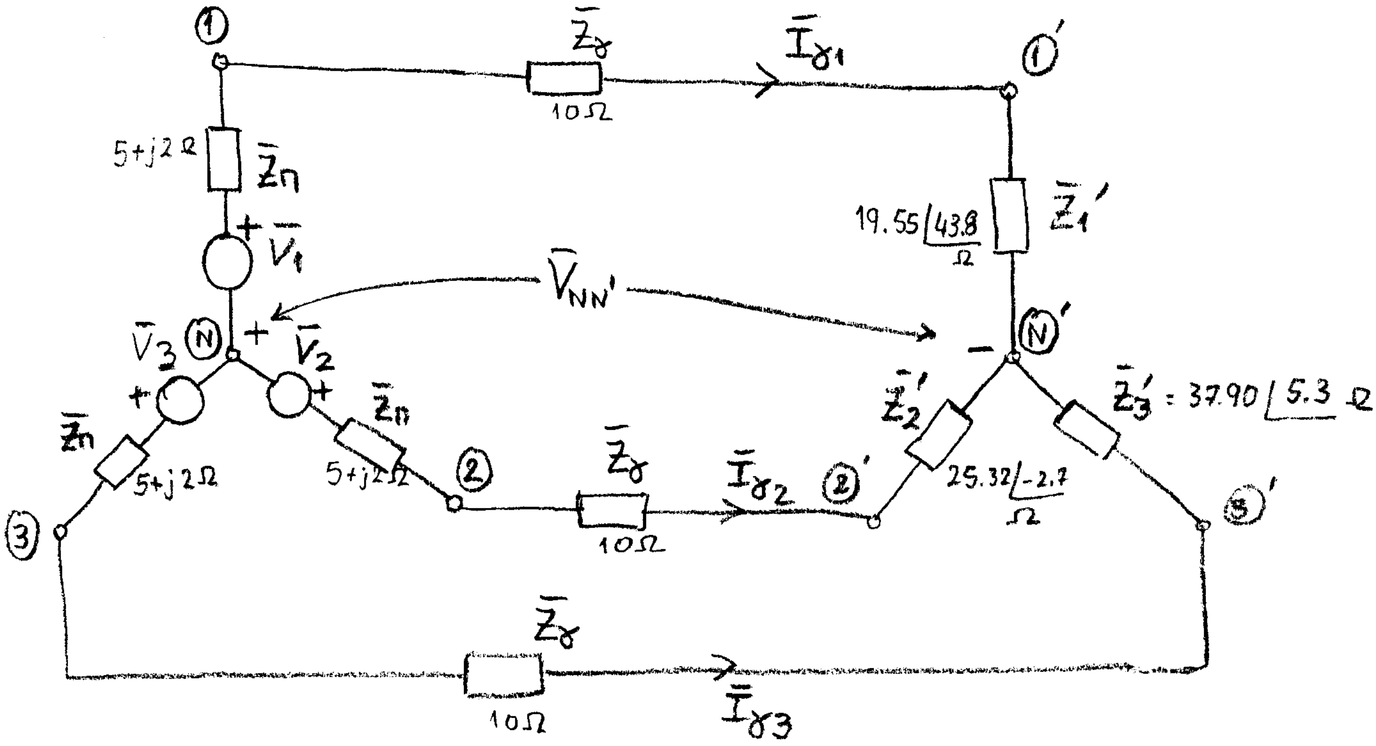
$$\bar{Z}_1' = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{(50+j20)\cdot(70+j40)}{220+j30} = 19.55\angle 43.8^\circ\ \Omega$$

όμοια...

$$\bar{Z}_2' = \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 25.32\angle -2.7^\circ\ \Omega$$

$$\bar{Z}_3' = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = 37.90\angle 5.3^\circ\ \Omega$$

το δίκτυο γίνεται:



υπολογίζουμε την τάση $\bar{V}_{NN'}$

$$\bar{V}_{NN'} = \frac{-\bar{V}_1 \dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_1'} - \bar{V}_2 \dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_2'} - \bar{V}_3 \dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_3'}}{\dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_1'} + \dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_2'} + \dfrac{1}{\bar{Z}_n+\bar{Z}_r+\bar{Z}_3}} =$$

$$= \frac{4.248\angle 108.8^\circ}{0.072\angle -13.4^\circ} \Rightarrow \bar{V}_{NN'} = 59,0 \angle 122.2^\circ \text{ Volts}$$

άρα $-\bar{V}_1 + \bar{I}_{\gamma 1}(\bar{Z}_n + \bar{Z}_r + \bar{Z}_1') + \bar{V}_{N'N} = 0$

$$\Rightarrow \bar{I}_{\gamma 1} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_n + \bar{Z}_r + \bar{Z}_1'} = 5,92\angle -13,2^\circ \text{ A}$$

όμοια

$$\bar{I}_{\gamma 2} = \frac{\bar{V}_2 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_n + \bar{Z}_r + \bar{Z}_2'} = 4,95\angle -136.3^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{\gamma 3} = \frac{\bar{V}_3 + \bar{V}_{NN'}}{\bar{Z}_n + \bar{Z}_r + \bar{Z}_3} = 5.26\angle 114.5^\circ \text{ A}$$

11.8 Ισχύς στα τριφασικά ηλ. δίκτυα

Σε ένα τριφασικό ηλ δίκτυο η στιγμιαία τριφασική ισχύς θα είναι προφανώς το άθροισμα των στιγμιαίων ισχύων των φάσεων

Δηλαδή:
$$P(t) = \sum_{i=1}^{3} V_{\varphi_i}(t) I_{\varphi_i}(t)$$

όπου $V_{\varphi_i}(t)$, $I_{\varphi_i}(t)$ είναι οι <u>φασικές</u> τάσεις και τα <u>φασικά</u> ρεύματα στα φορτία

Παρακάτω θα θεωρήσουμε ότι έχουμε <u>συμμετρικό</u> τριφασικό δίκτυο με 3 ίσα φορτία $\bar{Z}$

όπου $\bar{Z} = R + jX$

αν $\bar{V}_\varphi$ η φασική τάση στο φορτίο $\bar{Z}$ τότε το φασικό ρεύμα θα είναι $\bar{I}_\varphi = \frac{\bar{V}_\varphi}{\bar{Z}}$

και η πραγματική ισχύς σε κάθε φάση θα είναι

$$P = \frac{1}{2} V_{\varphi m} I_{\varphi m} \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

άρα η συνολική ενεργός τριφασική ισχύς θα είναι:

$$P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = 3P = \frac{3}{2} V_{\varphi m} I_{\varphi m} \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = \frac{3}{2} V_{\varphi m} I_{\varphi m} \cos\varphi}$$ με πλάτη

ή $$\boxed{P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma.} = 3 V_{\varphi,\varepsilon\nu} \cdot I_{\varphi,\varepsilon\nu} \cdot \cos\varphi}$$ με ενεργές τιμές

- σε ζεύξη αστέρα ισχύει:

$$V_{\varphi m} = \frac{V_{\gamma m}}{\sqrt{3}} \quad , \quad I_{\varphi m} = I_{\gamma m}$$

άρα $\quad P_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = \frac{3}{2} \frac{V_{\gamma m}}{\sqrt{3}} I_{\gamma m} \cos\varphi \Rightarrow$

$$\boxed{P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_{\gamma m} I_{\gamma m} \cos\varphi}$$

με πλάτη των $\bar{V}_\gamma , \bar{I}_\gamma$

ή

$$\boxed{P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = \sqrt{3}\, V_{\gamma,\varepsilon\nu} I_{\gamma,\varepsilon\nu} \cos\varphi}$$

με ενεργές τιμές των $\bar{V}_\gamma , \bar{I}_\gamma$ (συνηθίζεται πιό πολύ στα 3φ δίκτυα)

- σε ζεύξη τριγώνου ισχύει:

$$V_{\varphi m} = V_{\gamma m} \quad , \quad I_{\varphi m} = \frac{I_{\gamma m}}{\sqrt{3}}$$

και εύκολα θα καταλήξουμε στόν ίδιο τύπο

$$\boxed{P^{\varepsilon\nu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\sigma} = \sqrt{3}\, V_{\gamma,\varepsilon\nu} \cdot I_{\gamma,\varepsilon\nu} \cos\varphi}$$

(με ενεργές τιμές)

Ο ανωτέρω τύπος ισχύει ανεξάρτητα από τόν τρόπο ζεύξεως των φάσεων. Υπενθυμίζεται ότι αφορά <u>συμμετρικά</u> 3φ συστήματα

Επίσης για την τριφασική άεργο και φαινομένη ισχύ θα ισχύουν οι τύποι

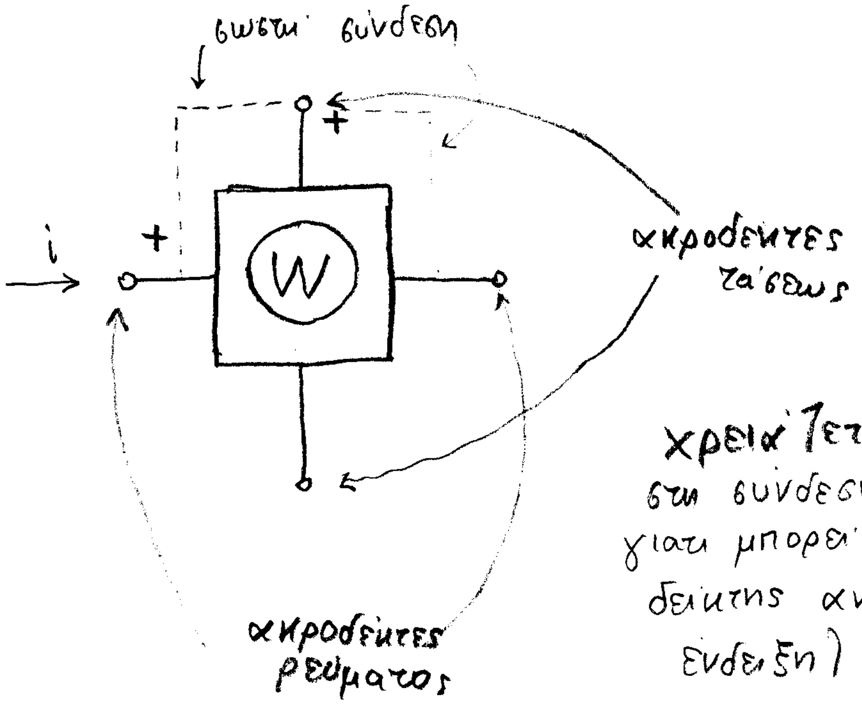
$$\boxed{P^{\alpha\epsilon\rho\gamma o\varsigma}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\varsigma.} = \sqrt{3}\ V_{\gamma,\epsilon\nu} \cdot I_{\gamma,\epsilon\nu}\ \sin\varphi}$$

$$\boxed{P^{\varphi\alpha\iota\nu o\mu}_{\tau\rho\iota\varphi\alpha\varsigma.} = \sqrt{3}\ V_{\gamma,\epsilon\nu} \cdot I_{\gamma,\epsilon\nu}}$$

11.9 Μετρήσεις με Βαττόμετρα σε τριφασικά δίκτυα

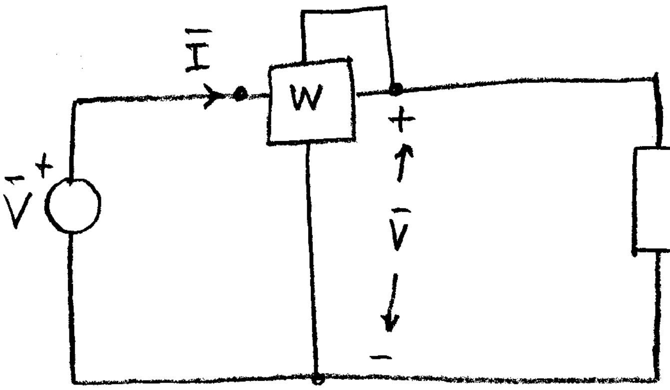
Το Βαττόμετρο είναι ένα όργανο μέτρησης το οποίο μετρά πραγματική (ενεργό) ισχύ.

Διαθέτει 4 ακροδέκτες (2 για την τάση και 2 για το ρεύμα)



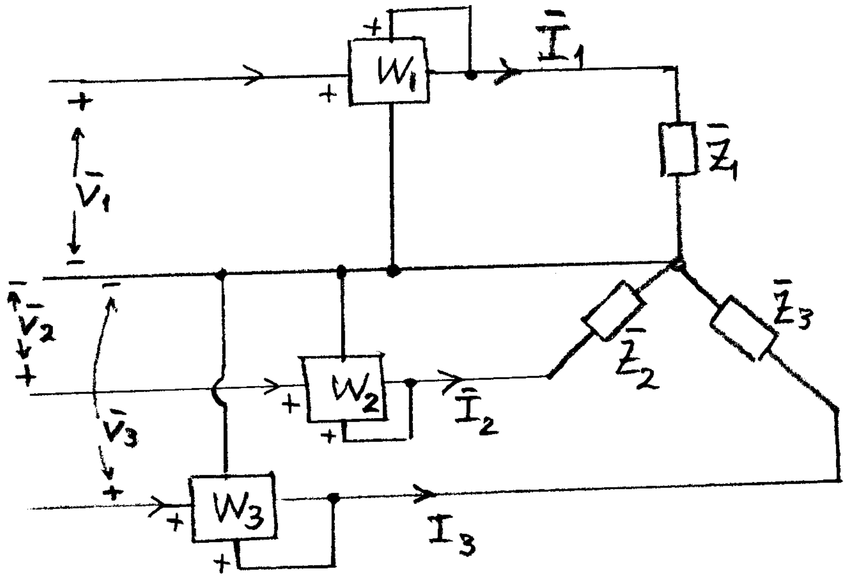
Χρειάζεται προσοχή στη σύνδεση ενός βαττομέτρου γιατί μπορεί να κινηθεί ο δείκτης ανάποδα (αρνητική ένδειξη)

Παρακάτω δείχνουμε τον τρόπο σύνδεσης ενός βαττομέτρου για μέτρηση ισχύος στο φορτίο $\bar{Z}$



Σε ένα 3φασικο <u>ασύμμετρο</u> δίκτυο θα χρειαστούν 3 βαττόμετρα (βλ. σχήμα)

Π.χ. ζεύξη αστέρα

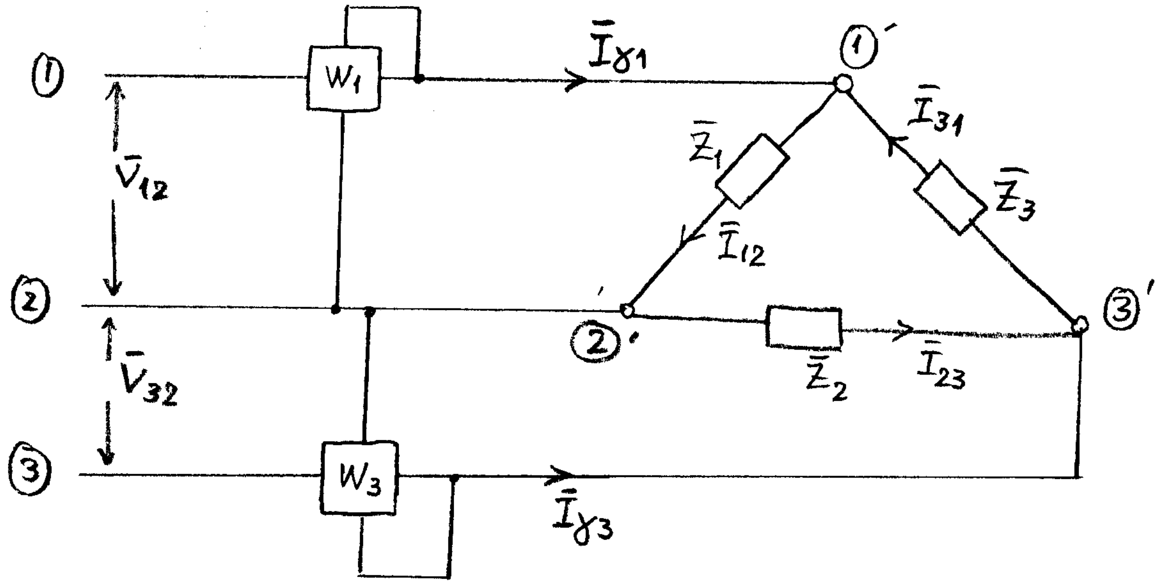


Θα ισχύει:

$$P^{εν}_{τριφας} = W_1 + W_2 + W_3$$

Μέθοδος των 2 βαττομέτρων

Έστω ασύμμετρο 3φασικό δίκτυο σε ζεύξη τριγώνου (θα μπορούσε να ήταν και αστέρας)



Συνδέουμε τους ακροδέκτες τάσεως των 2 βαττομέτρων σε 2 (οποιεσδήποτε) φάσεις και χρησιμοποιούμε την 3η φάση ως κοινό σημείο αναφοράς για τους ακροδέκτες τάσεως (βλ. ανωτέρω σχήμα)

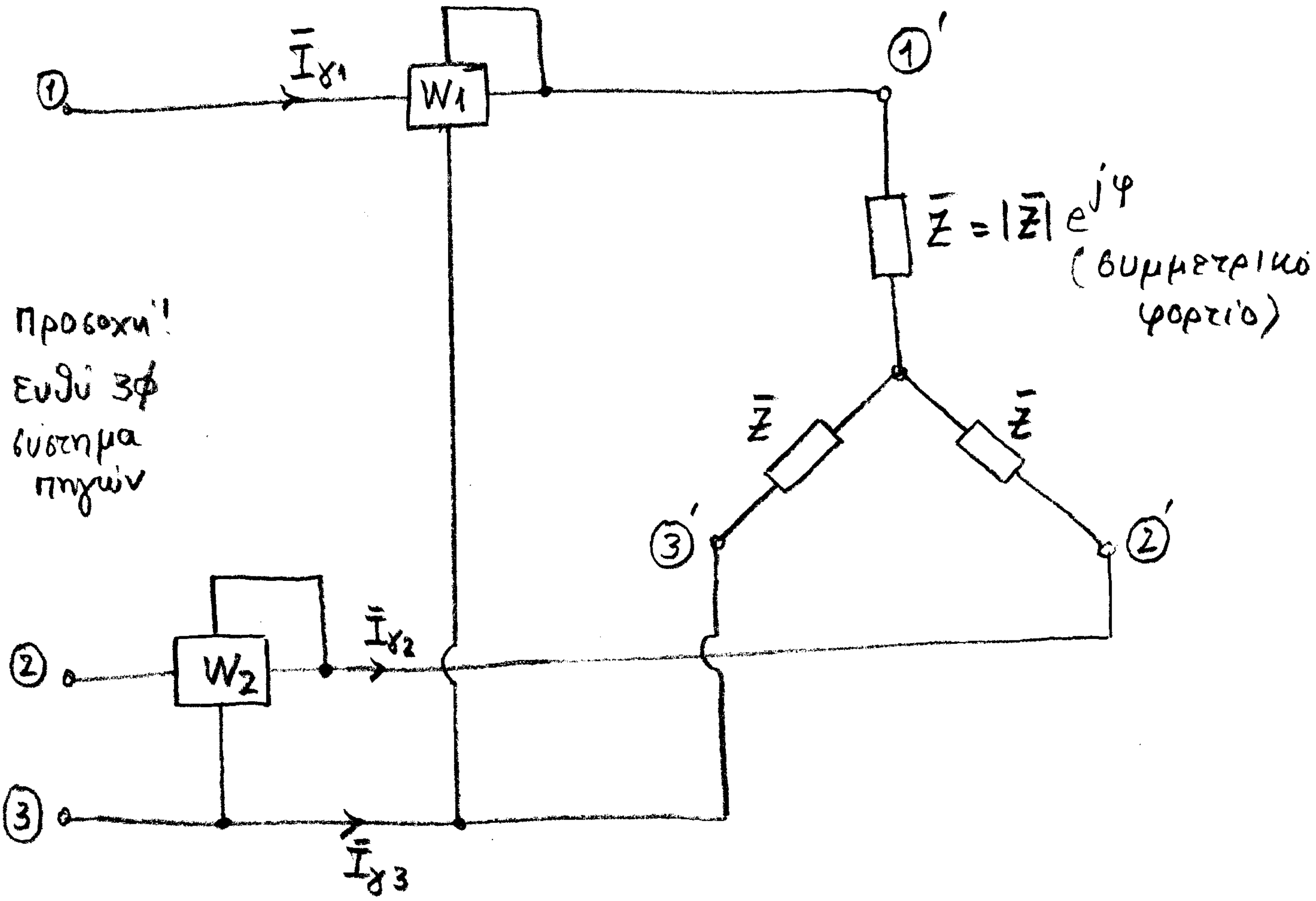
Αποδεικνύεται (δεν θα αναφέρουμε την απόδειξη) ότι το άθροισμα των ενδείξεων των 2 βαττομέτρων είναι η ενεργός τριφασική ισχύς που απορροφά το 3φασικό φορτίο δηλαδή

$$P^{εν}_{τριφασ} = W_1 + W_3$$

Δηλαδή για τη μέτρηση της 3φασικής ενεργού ισχύος αρκούν 2 βαττόμετρα

Στην περίπτωση που έχουμε συμμετρικό φορτίο η μέθοδος των 2 Βαττομέτρων επιτρέπει και τη μέτρηση του συντελεστού ισχύος του συστήματος

Θα έχουμε (π.χ σε σύνδεση αστέρα)



Προσοχή! Ευθύ 3φ σύστημα πηγών

$$\tan\varphi = \sqrt{3}\,\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}$$

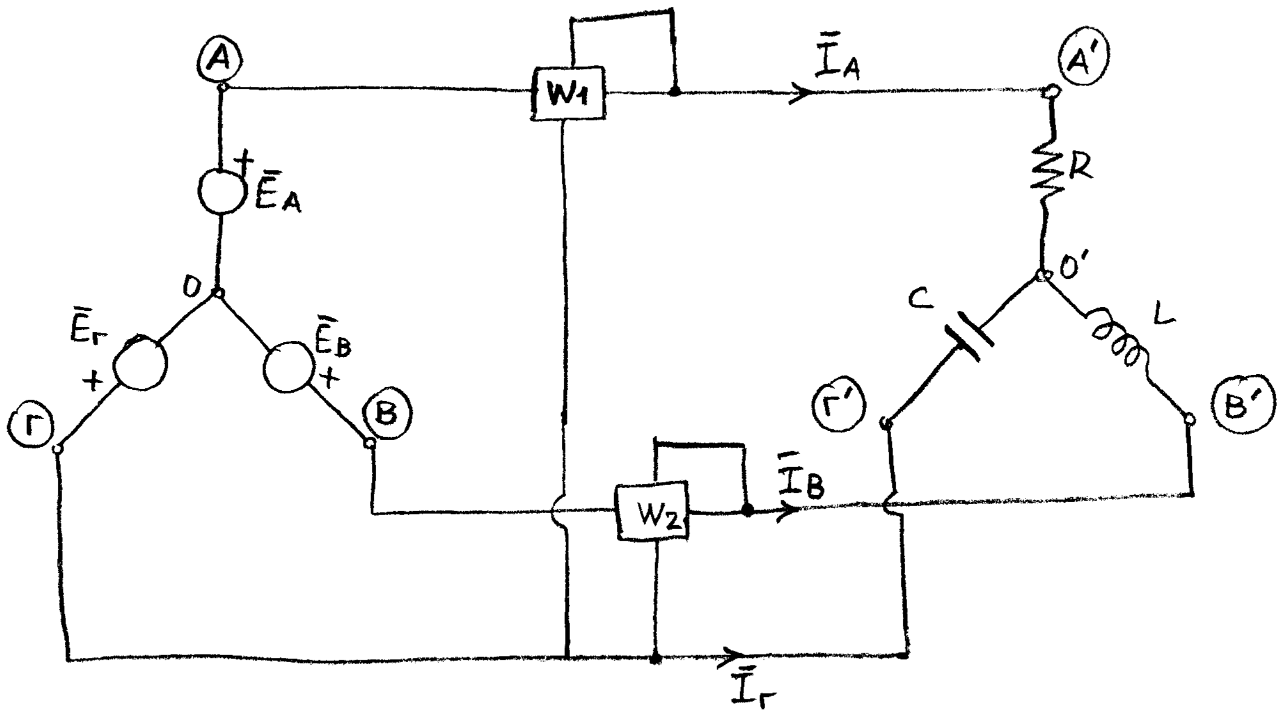
εδώ (χρησιμοποιείται η φάση ③ σαν σημείο αναφοράς των τάσεων)

Π.χ αν $W_1 = W_2$ τότε $\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1$

αν $W_1 = -W_2$ τότε $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$

Εφαρμογή 3

Στο παρακάτω τριφασικό κύκλωμα να βρεθούν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων W_1 και W_2 και να συγκριθεί το άθροισμα των ενδείξεων αυτών με την συνολική πραγματική ισχύ του συστήματος.



Δίδονται: $\bar{E}_A = 220 \ V$ $\qquad R = 76\Omega$

$\bar{E}_B = 220\angle -\frac{2\pi}{3} \ V$ $\qquad L = 0.242 \ H$

$\bar{E}_\Gamma = 220\angle -\frac{4\pi}{3} \ V$ $\qquad C = 41.9 \ \mu F$

(ενεργές τιμές) $\qquad \omega = 2\pi \cdot 50 \ r/s$

Απ/ υπολογίζουμε:

$$j\omega L = j\,2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}242 = j76\,\Omega$$

$$\frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2\pi \cdot 50 \cdot 41.9 \times 10^{-6}} = -j76\,\Omega$$

Το βαττόμετρο W_1 μετρά ενεργό ισχύ

$$P_{ev,1} = Re\left\{ \bar{V}_{A\Gamma} \cdot \bar{I}_A^* \right\}$$ με τις (ενεργές τιμές) των $\bar{V}_{A\Gamma}$, $\bar{I}_A$

όπου: $\bar{V}_{A\Gamma} = \bar{E}_A - \bar{E}_\Gamma$

όμοια το W_2 μετρά

$$P_{ev,2} = Re\left\{ \bar{V}_{B\Gamma} \cdot \bar{I}_B^* \right\}$$

όπου $\bar{V}_{B\Gamma} = \bar{E}_B - \bar{E}_\Gamma$

Το φορτίο είναι ασύμμετρο άρα υπολογίζουμε την τάση $\bar{V}_{OO'}$

$$\bar{V}_{OO'} = \frac{-\bar{E}_A \frac{1}{R} - \bar{E}_B \frac{1}{j\omega L} - \bar{E}_\Gamma \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}}$$

ή

$$\bar{V}_{OO'} = \frac{-\frac{220}{76} - \frac{220\angle -120^\circ}{j76} - \frac{220\angle -240}{-j76}}{\frac{1}{76} + \frac{1}{j76} + \frac{1}{-j76}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{76}\left(220 + \frac{220\angle -120}{j} + \frac{220\angle -240^\circ}{-j}\right)}{\frac{1}{76}}$$

άρα $V_{OO'} = -220\left(1 + e^{-j210^\circ} + e^{-j150}\right)$

$\Rightarrow V_{OO'} = -220 \cdot (-0.732) = 161.05$ Volts άρα $-\bar{E}_A + \bar{I}_A R + \bar{V}_{o'o} = 0 \Rightarrow \bar{I}_A = \dfrac{\bar{E}_A + \bar{V}_{oo'}}{R}$

$$\Rightarrow \bar{I}_A = \frac{220 + 161.05}{76} = 5 \text{ Amp}$$

ομοια $\bar{I}_B = \dfrac{\bar{E}_B + \bar{V}_{oo'}}{j\omega L} = \dfrac{220\angle -120^\circ + 161.05}{j76}$

$$\Rightarrow \bar{I}_B = 2.6\angle -164.9^\circ \text{ Amp}$$

επομενως

$$P_{\epsilon\nu,1} = Re\{\bar{V}_{A\Gamma} \cdot \bar{I}_A^*\} = Re\{(220 - 220\angle -240^\circ) \cdot 5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\epsilon\nu,1} = 1650 \text{ Watts}$$

και

$$P_{\epsilon\nu,2} = Re\{\bar{V}_{B\Gamma} \cdot \bar{I}_B^*\} = Re\{(220\angle -120^\circ - 220\angle -240^\circ) \cdot 2.6\angle +164.9\}$$

$$\Rightarrow P_{\epsilon\nu,2} = 258 \text{ Watts}$$

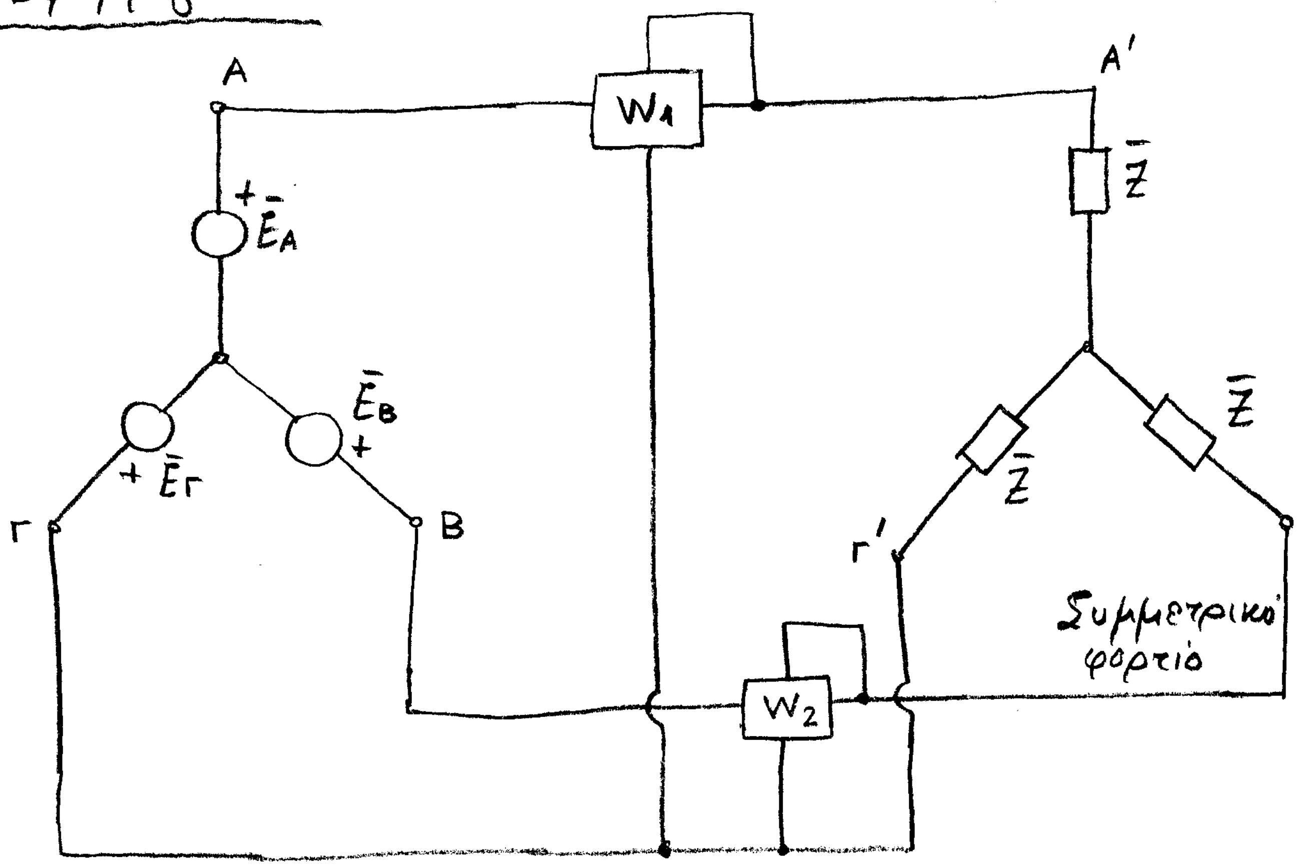
αρα $P_{\epsilon\nu,1} + P_{\epsilon\nu,2} = 1908$ Watts

Η συνολική πραγματική ισχύς θα είναι

$$P_{\epsilon\nu,3\phi} = |\bar{I}_A|^2 R = 1900 \text{ Watt} \quad (\text{γιατί;})$$

(το σφάλμα οφείλεται σε αριθμ. προσεγγίσεις)

Εφαρμογή 4



Στο τριφασικό κύκλωμα του σχήματος οι ενδείξεις των βαττομέτρων είναι $W_1 = 766\,W$ και $W_2 = -174\,W$

Ζητείται να βρεθούν

1) Η γωνία φ του φορτίου $(\varphi = \varphi_V - \varphi_i)$

2) Η άεργος και η φαινομένη 3ϕ ισχύς

Απ/ $P_{3\phi,\,\text{ενεργ}} = W_1 + W_2 = 766 + (-174) = 592$ Watts

$$\tan\varphi = \sqrt{3}\,\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \sqrt{3}\,\frac{766-(-174)}{766+(-174)} = 2.75$$

άρα $\varphi = \tan^{-1}(2.75) = 70^\circ$

$P_{3\phi,\,\text{αεργος}} = P_{3\phi\,\text{ενεργ}} \tan\varphi = +1628$ VAR (γιατί;)

$$P_{\substack{\text{φαινομ}\\3\phi}} = \sqrt{P^2_{\substack{3\phi\\\text{ενεργ}}} + P^2_{\substack{3\phi\\\text{αεργ}}}} = 1732.3 \text{ VA}$$