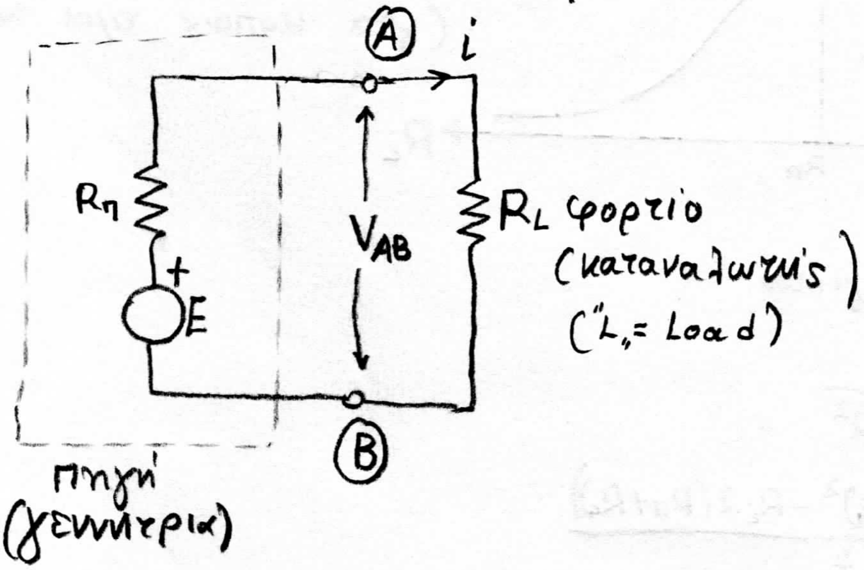
3) Θεώρημα Μεγίστης Μεταβιβάσεως Ισχύος

3.1 Στο συνεχές ρεύμα

Εστω το απλό κύκλωμα :



Εστω ότι $E = σταθ.$, $R_\pi = σταθ$

και R_L μεταβάλλεται $(0 \leq R_L < \infty)$

Ερώτημα:

- Για ποια τιμή της R_L έχω $P_{R_L} = μέγιστη$;
  και πόση είναι η $P_{R_L max}$;

Διερεύνηση :

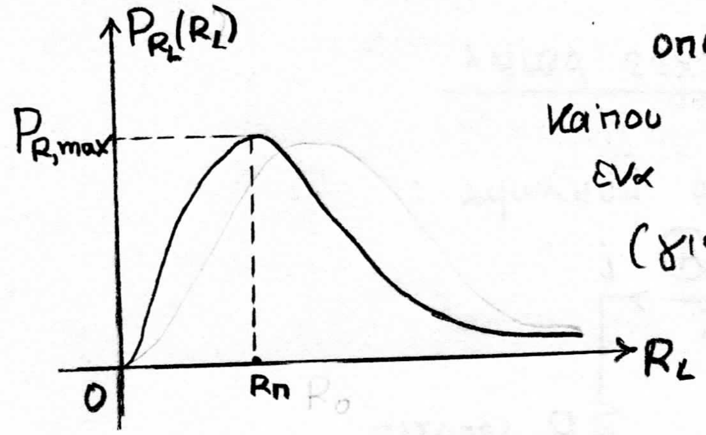
$P_{R_L} = i^2 R_L \qquad i = \dfrac{E}{R_\pi + R_L}$

άρα $P_{R_L}(R_L) = \dfrac{E^2 R_L}{(R_\pi + R_L)^2}$

Παρατηρώ ότι

- για $R_L = 0$ (βραχ/μα) $\quad P_{R_L} = 0$

- για $R_L \to \infty$ (ανοικτ/μα) $\quad P_{R_L} \to 0$ επίσης θα έχω την γραφική παράσταση



οπωσδήποτε κάπου θα εμφανιστεί ένα $P_{R,max}$ (για κάποια τιμή της R_L)

υπολογίζω το σημείο μεγίστου

$$P_{R_L}(R_L) = \frac{E^2 R_L}{(R_\Pi + R_L)^2}$$

$$\frac{dP_{R_L}(R_L)}{dR_L} = \frac{E^2\left((R_\Pi + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_\Pi + R_L)\right)}{(R_\Pi + R_L)^4}$$

πρέπει $\frac{dP_{R_L}(R_L)}{dR_L} = 0$ άρα $(R_\Pi + R_L)^2 - 2R(R_\Pi + R_L) = 0$

ή $R_\Pi^2 + R_L^2 + \cancel{2R_\Pi R_L} - \cancel{2R_\Pi R_L} - 2R_L^2 = 0 \Rightarrow R_\Pi^2 - R_L^2 = 0$

$\Rightarrow R_L = \pm R_\Pi$ προφανώς η $R_L = -R_\Pi$ απορρίπτεται

άρα για $\boxed{R_L = R_\Pi}$ έχω $P_{R_L}(R_L) = P_{R_L max}$

η συνθήκη $R_L = R_\Pi$ λέγεται <u>συνθήκη προσαρμογής</u>

η $P_{R_L max} = \frac{E^2 R_\Pi}{(2R_\Pi)^2} = \frac{E^2}{4R_\Pi}$ μέγιστη ισχύς που μπορεί να απορροφήσει το φορτίο

Η ισχύς βραχυκυκλώσεως της πηγής είναι (όταν $R_L = 0$)

$$P_{E, \beta\rho\alpha\chi} = \frac{E^2}{R_\Pi}$$

— Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ισχύς που μπορεί να απορροφήσει η R_L είναι το 25% της ισχύος βραχυκυκλώσεως της πηγής.

Εξετάζουμε τον βαθμό αποδόσεως του συστήματος

$$\eta = \frac{\text{ισχύς που απορροφά το φορτίο } R_L}{\text{ισχύς που παράγει η πηγή } E} = \frac{P_{R_L}}{P_E}$$

γενικά είναι:

$$P_{R_L} = V_{AB} \cdot i \quad \text{και} \quad P_E = E \cdot i$$

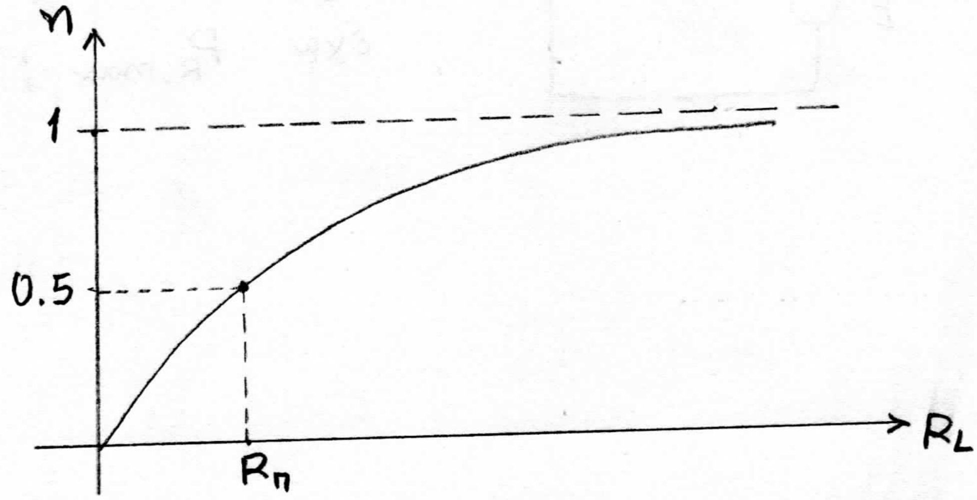
$$\text{και} \quad V_{AB} = E \frac{R_L}{R_L + R_\Pi}$$

άρα

$$\eta = \frac{E \frac{R_L}{R_L+R_\Pi} \cdot i}{E \cdot i} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{R_L}{R_L + R_\Pi}}$$

όταν έχω προσαρμογή $R_L = R_\Pi$

$$\text{τότε} \quad \eta = \frac{R_\Pi}{R_\Pi + R_\Pi} = 0.5 \quad (\text{ή } 50\%)$$



Γραφική παράσταση του $\eta(R)$

Παρατηρούμε ότι για $R_L > R_\Pi$ έχω μεγαλύτερο βαθμό αποδόσεως από 0.5 αλλά η P_{R_L} είναι <u>μικρότερη</u> από την $P_{R_L,max} = \frac{E^2}{4R_\Pi}$

Παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε την σχέση που συνδέει την απορροφούμενη ισχύ P_{R_L} (ως ποσοστό της ισχύος βραχυκυκλώσεως της πηγής), συναρτήσει του βαθμού αποδόσεως η

Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} P_{R_L} &= \frac{E^2 R_L}{(R_\Pi + R_L)^2} \\ \text{και} \quad \eta &= \frac{R_L}{R_\Pi + R_L} \end{aligned}\right\} P_{R_L} = E^2 \left(\frac{R_L}{R_\Pi + R_L}\right) \frac{1}{R_\Pi + R_L}$$

δηλαδή: $P_{R_L} = E^2 \eta \dfrac{1}{R_\Pi + R_L}$

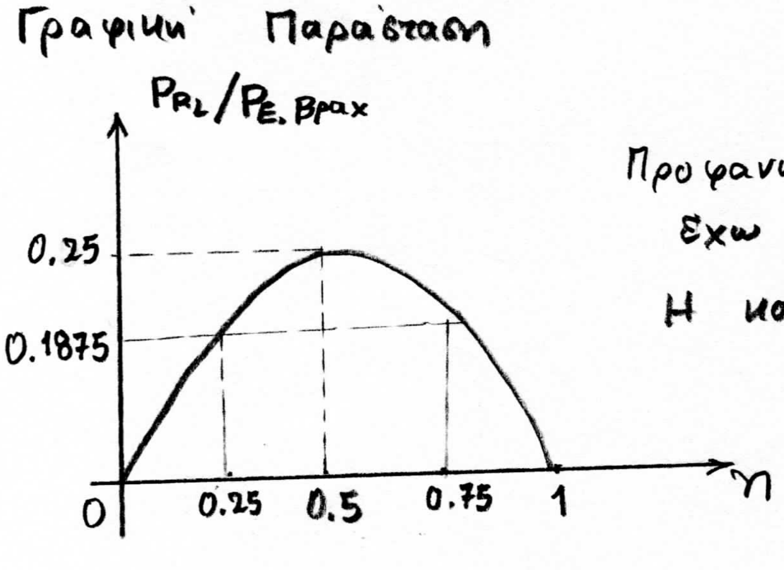
από την σχέση $\eta = \dfrac{R_L}{R_\Pi + R_L} \Rightarrow \eta R_\Pi + \eta R_L = R_L \Rightarrow$

$\Rightarrow R_L = \dfrac{\eta R_\Pi}{(1-\eta)}$

άρα: $P_{R_L} = E^2 \eta \dfrac{1}{R_\Pi + \dfrac{\eta R_\Pi}{1-\eta}} = E^2 \eta \dfrac{1}{\dfrac{R_\Pi - \eta R_\Pi + \eta R_\Pi}{1-\eta}} = \dfrac{E^2}{R_\Pi} \eta (1-\eta)$

άρα $\boxed{\dfrac{P_{R_L}(\eta)}{P_{E,\beta\rho\alpha\chi}} = \eta(1-\eta) = \eta - \eta^2}$

Γραφική Παράσταση



Προφανώς για $\eta = 0.5$ έχω $P_{R_L,max}$

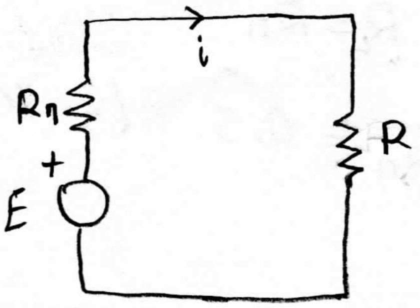
Η καμπύλη είναι συμμετρική

Εφαρμογές

- Σύνδεση ηχείων με ενισχυτή (συνήθως $R = 8\Omega$)
- Σύνδεση κεραίας με δέκτη (τηλεόραση, ραδιόφωνο κ.λ.π. εδώ $R \simeq 75\Omega$)
- Δεν εφαρμόζεται ποτέ η προσαρμογή στην περίπτωση γεννητριών ισχύος (Δ.Ε.Η. κ.λπ)
- γιατί;

Ερώτηση

Στο γνωστό κύκλωμα:



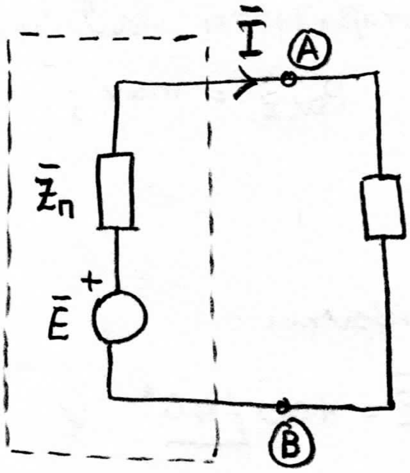
έστω $R = \sigma\tau\alpha\theta.$

και μεταβάλλεται η R_π

- για ποια τιμή της R_π έχω $P_{R,max}$;

3.2 Στο εναλλασσόμενο ρεύμα (Η.Μ.Κ.)

Έχουμε το ίδιο κύκλωμα



$$\bar{Z}_n = R_n + jX_n$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

η $\bar{Z}$ μεταβάλλεται

$$0 \leq R < \infty$$

$$-\infty < X < \infty$$

- για ποια τιμή της $\bar{Z}$ έχουμε $P_{εν,Z} = max$ στην $\bar{Z}$;

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι αυτό συμβαίνει όταν

$$\boxed{\bar{Z} = \bar{Z}_n^*}$$

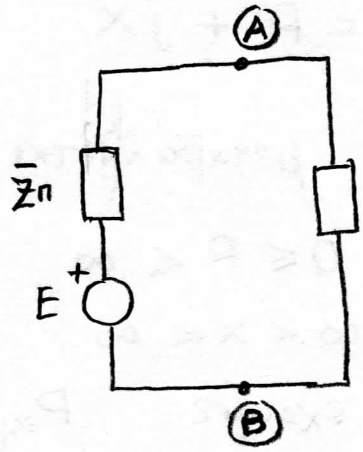
δηλ. $R = R_n$, $X = -X_n$

και: $P_{εν,Z} = \frac{1}{2}|\bar{I}|^2 R = \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{E}}{\bar{Z}+\bar{Z}_n}\right|^2 R$

άρα $P_{εν,Z,max} = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}|^2}{|2R_n|^2}R_n = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}|^2}{4R_n}$ $(R = R_n)$

Παράδειγμα

Στην παρακάτω διάταξη η $\bar{Z}$ μεταβάλλεται αυθαίρετα
- για ποια τιμή της θα έχουμε $P_{\varepsilon\nu, Z} = max$;



Δίδονται

$\bar{E} = 100\angle 40^\circ$ V

$\bar{Z}_\Pi = 2 + j5\ \Omega$

$R_\Pi \quad X_\Pi$

Απ/

Προφανώς $P_{\varepsilon\nu, Z} = max$ όταν

$$\bar{Z} = \bar{Z}_\Pi^* = 2 - j5\Omega$$

και $$P_{\varepsilon\nu, Z\,max} = \frac{1}{2}\frac{|\bar{E}|^2}{4R_\Pi} = 625\ W$$