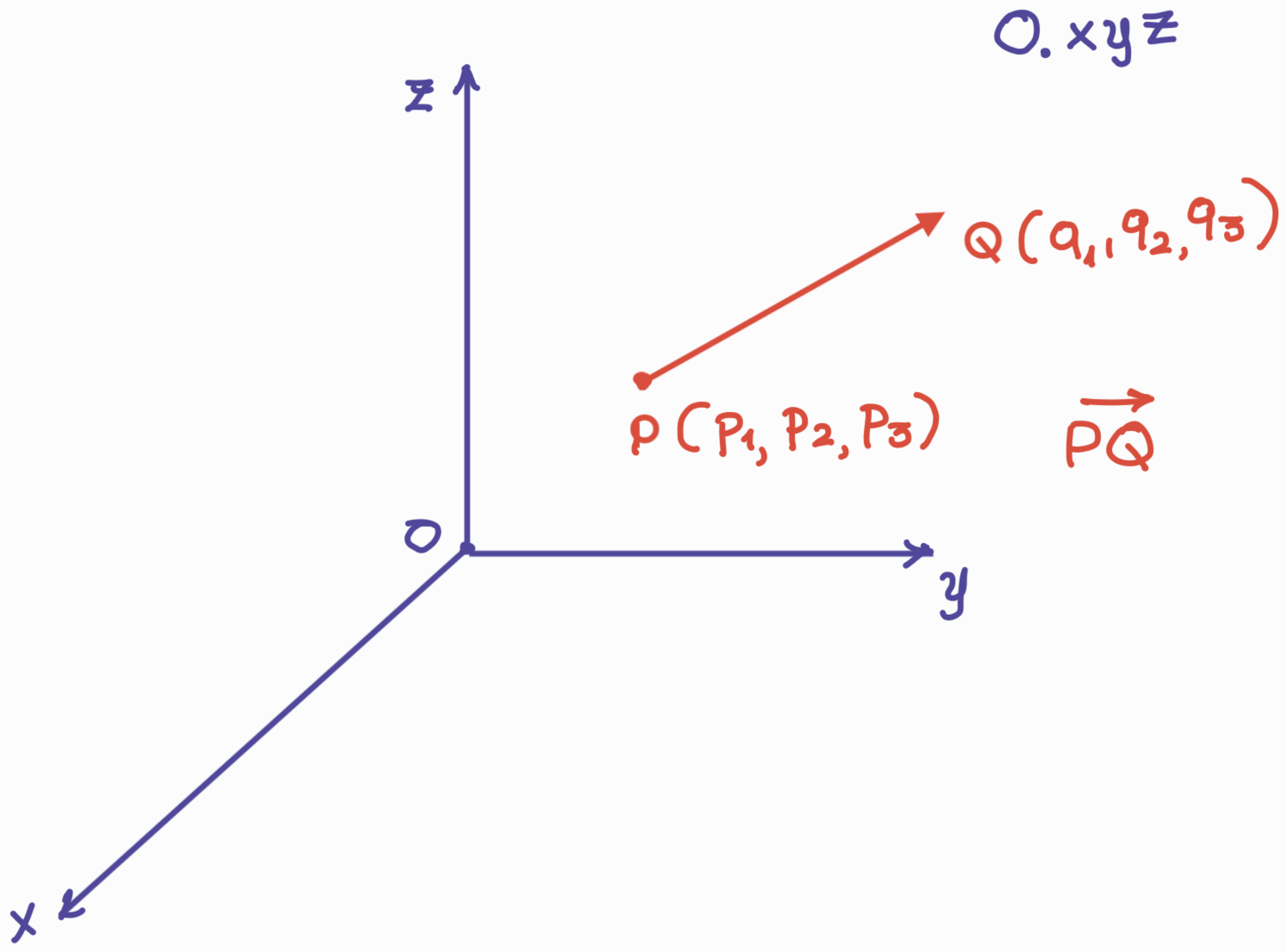
Διανύσματα

A Μαχίμων Ι - Α' Μηχανικών

2024 -25

Σοφία Κυρίτση- Γιάλλουρου

1. Βασικές έννοιες



α. Γεωμετρική περιγραφή διανύσματος στο χώρο

$\vec{PQ}$, ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $P(p_1, p_2, p_3)$ και πέρας το $Q(q_1, q_2, q_3)$

β. Αλγεβρική περιγραφή διανύσματος στο χώρο περιγράφεται από τις συντεταγμένες του ως εξής

$$\vec{PQ} = (q_1 - p_1,\ q_2 - p_2,\ q_3 - p_3)$$

π.χ. $P = (-1, 2, -3)$, $Q = (0, 1, -2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (0-(-1),\ 1-2,\ -2-(-3))$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1)$$

Επίσης ορίζουμε το μέτρο $|\overrightarrow{PQ}|$, ως

$$\boxed{|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}}$$

οπότε π.χ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$

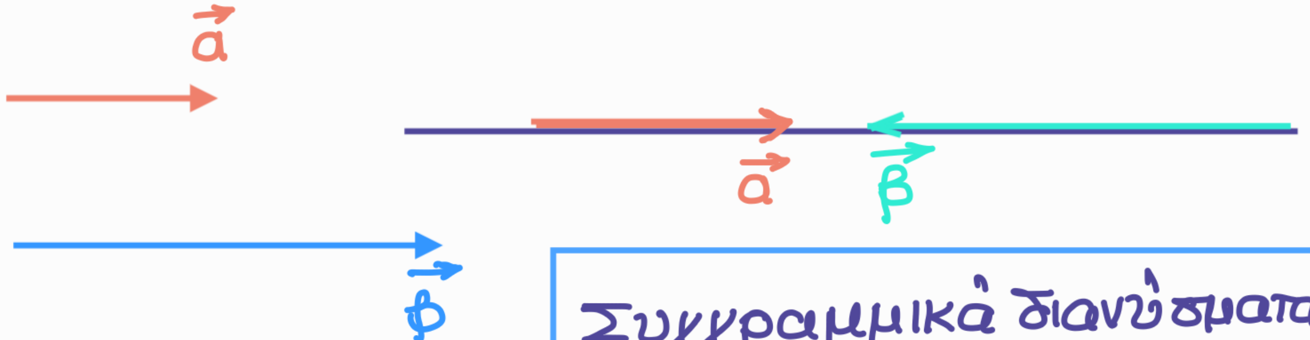
2. Συγγραμμικά διανύσματα

Ορισμός

Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του χώρου

Θα ονομάζουμε τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά διανύσματα ή γραμμικά εξαρτημένα ή παράλληλα, αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} = \lambda \vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{\beta} = \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Συγγραμμικά διανύσματα
συμβολίζεται $\vec{a} \,//\, \vec{\beta}$

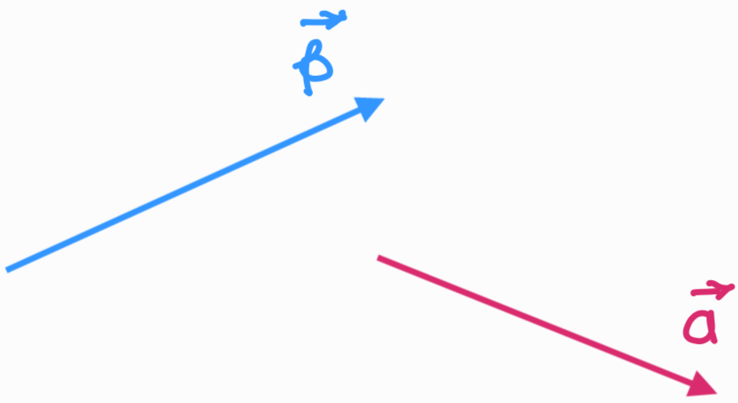
α. Αν $\lambda > 0$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα, π.χ. $\lambda = 2$, $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$, και συμβολίζεται $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$

β. Αν $\lambda < 0$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά και αντίρροπα. π.χ $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\vec{\beta}$

$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Συγγραμμικά } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \\ \text{Μη συγγραμμικά } \vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \end{array}}$$

γ. Αν $\lambda = 0$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{0}$



$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$

Παράδειγμα

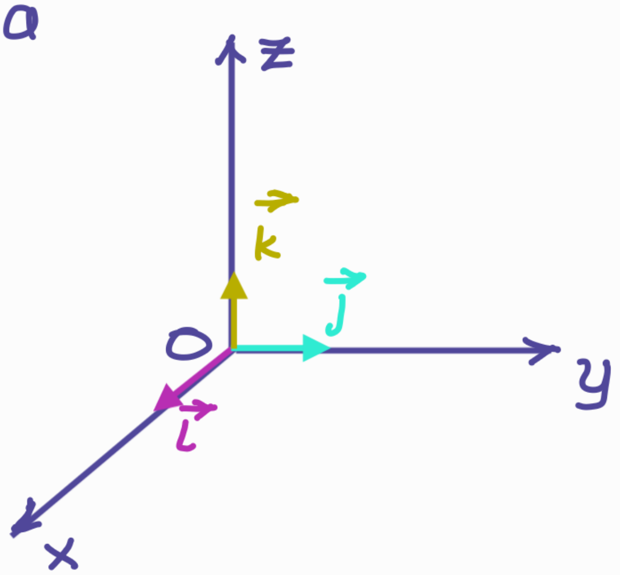
$\vec{\alpha} = (2, 3, 7)$ και $\vec{\beta} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$

είναι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, δηλαδή συγγραμμικά

Είναι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$, γιατί $\exists\, \lambda = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$:

$\vec{\beta} = -\frac{1}{4}\vec{\alpha}$, $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$

3. Διαφορετικός τρόπος γραφής διανύσματος με βάση τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox, Oy, Oz $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ αντίστοιχα

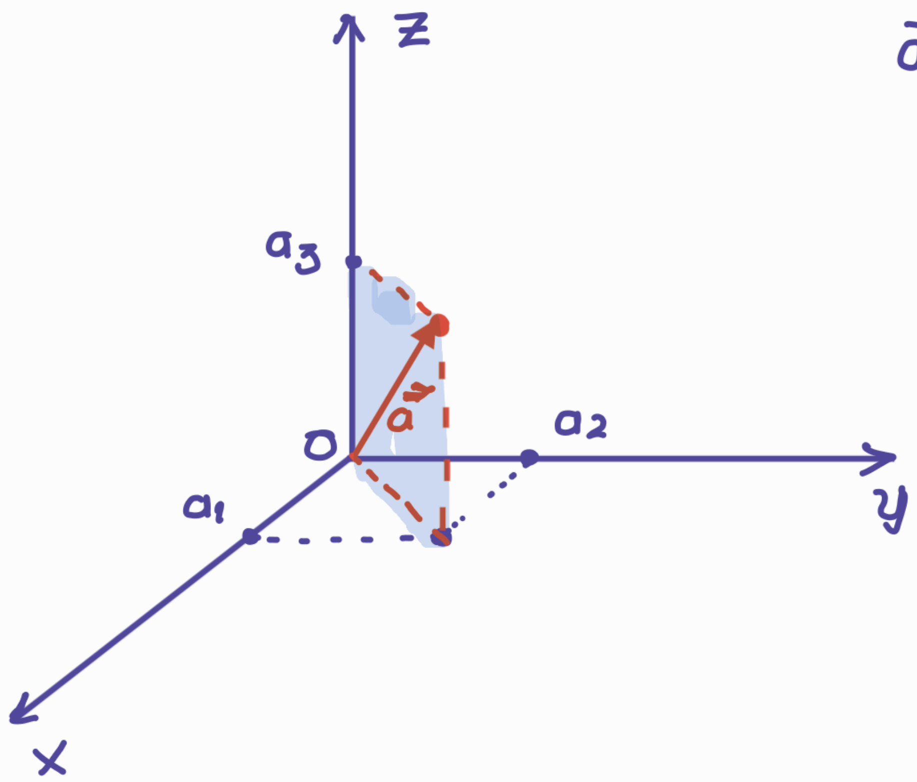


$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{\alpha} = \left(-1, 2, \frac{1}{2}\right) = -\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$, όπου

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$



$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

4. Ισότητα διανυσμάτων

Δύο διανύσματα του χώρου $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ είναι ίσα, $\vec{a}=\vec{\beta}$, αν και μόνο αν είναι συγγραμμικά και ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα :

$$\vec{a}=\vec{\beta} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{a}|=|\vec{\beta}| \end{cases}$$

5. $\boxed{\text{Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο}}$

5α. Έστω $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

όπου $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{\beta} = \beta_1\vec{i} + \beta_2\vec{j} + \beta_3\vec{k}$

Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, συμβολίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, τον πραγματικό αριθμό $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$, δηλαδή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$

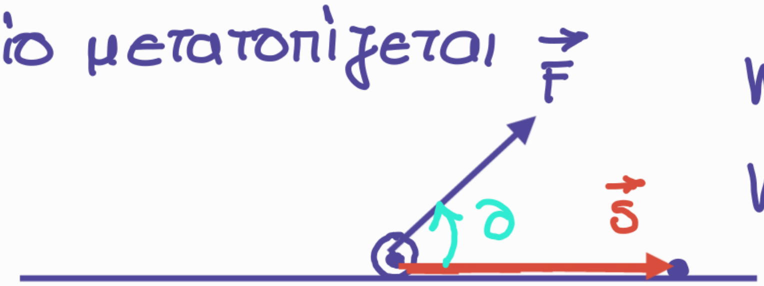
Παράδειγμα

$\vec{a} = (2, 3, -5)$ και $\vec{\beta} = \left(-1, 3, -\frac{1}{5}\right)$

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2(-1) + 3 \cdot 3 + (-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -2 + 9 + 1 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 8$

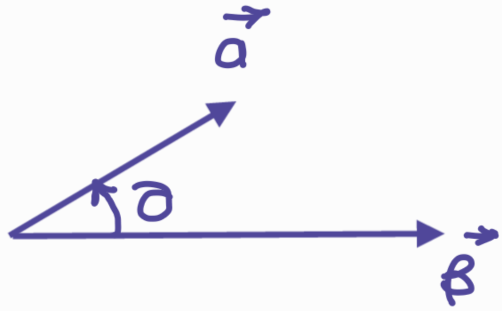
Παράδειγμα εσωτερικού γινομένου είναι το έργο δύναμης, η οποία επιδρά σε σώμα, το οποίο μετατοπίζεται



$W_F = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$W_F = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$

5β. Γεωμετρική διατύπωση του εσωτερικού γινομένου



$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\cos\theta$$

όπου $|\vec{a}|, |\vec{\beta}|$ είναι τα μέτρα των $\vec{a}, \vec{\beta}$ και θ η γωνία μεταξύ τους

Παράδειγμα

$\vec{a} = (5, -3, 2)$ και $\vec{\beta} = (0, 2, -1)$ και

$\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}} = \dfrac{\pi}{4}$ να υπολογισθεί το εσωτερικό τους γινόμενο με 2 τρόπους

1. $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 5\cdot 0 + (-3)\cdot 2 + 2(-1)$

$$= -8$$

2. $\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

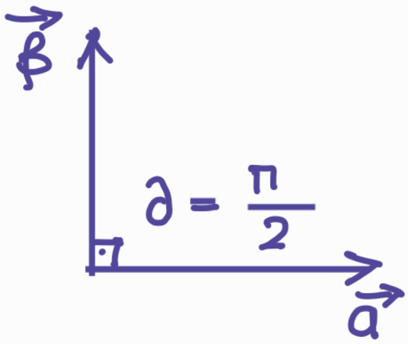
$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{38}\,\sqrt{5}\,\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = \frac{\sqrt{38}\,\sqrt{5}\,\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = \sqrt{95}$$

5γ. Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

1. Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta} \neq \vec{0}$ είναι κάθετα, αν και μόνο αν, ισχύει:

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\cdot 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{\beta}}$$

2. $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{a}$ αντιμεταθετική ιδιότητα

3. $\vec{a}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{a}\cdot\vec{\beta}+\vec{a}\cdot\vec{\gamma}$ επιμεριστική ιδιότητα

4. $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{\beta})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{\beta}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{\beta})$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$

5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=\vec{a}^{\,2}$, γιατί

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2=\vec{a}^{\,2}$

---

6. Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του χώρου

Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα του χώρου, όπου

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}=(a_1,a_2,a_3)$ και

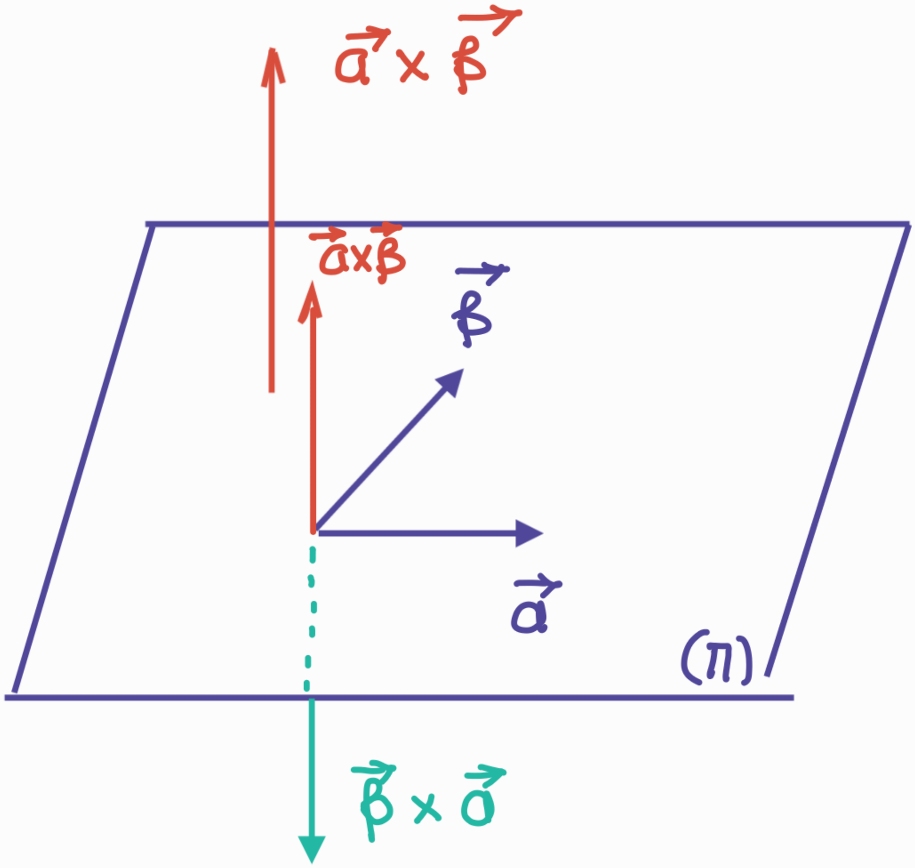
$\vec{\beta}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

Εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων, συμβολίζουμε με $\vec{a} \times \vec{\beta}$, το διάνυσμα

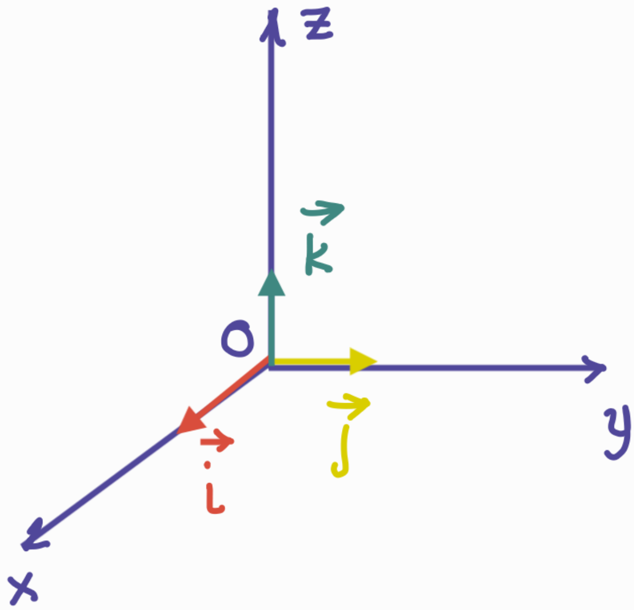
$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{\beta} = (a_2\beta_3 - a_3\beta_2)\vec{i} + (a_3\beta_1 - a_1\beta_3)\vec{j} + (a_1\beta_2 - a_2\beta_1)\vec{k}}$$

με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, τριών δακτύλων



Εφαρμογή



$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

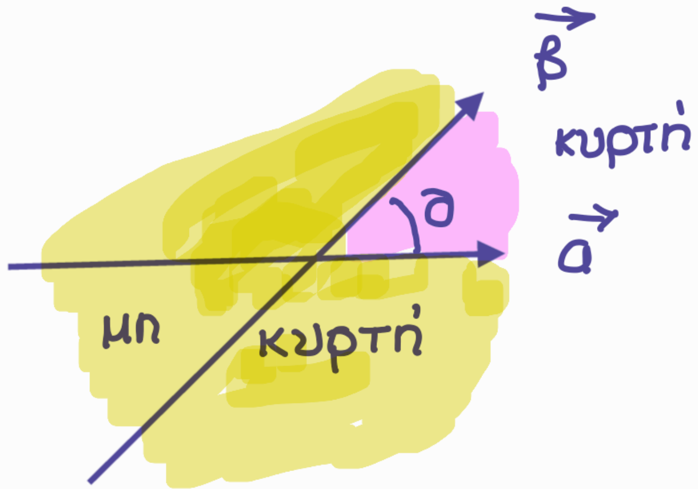
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

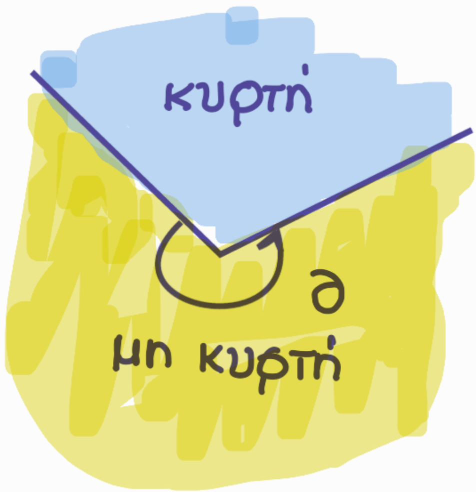
$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

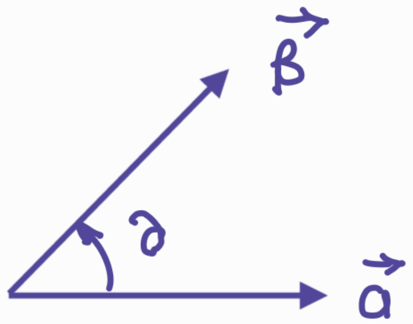
$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

6α. Μέτρο του εξωτερικού γινομένου



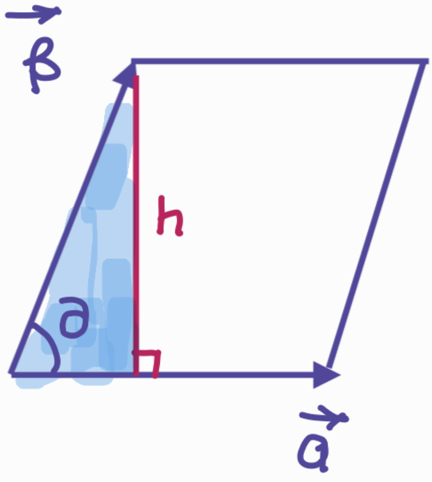




Τότε έχουμε $\boxed{|\vec{a} \times \vec{\beta}| = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}| \sin\theta}$

Υπολογισμός του μέτρου εξωτερικού γινομένου

6β. Φυσική σημασία του μέτρου δυο διανυσμάτων.



Έστω A το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και

h : το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση $\vec{a}$

$$\left.\begin{array}{l} A = |\vec{a}| \cdot h \\ h = |\vec{\beta}| \sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow A = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}| \sin\theta$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $|\vec{a}\times\vec{\beta}| = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\sin\theta$ $\Rightarrow$

$$A = |\vec{a}\times\vec{\beta}|$$

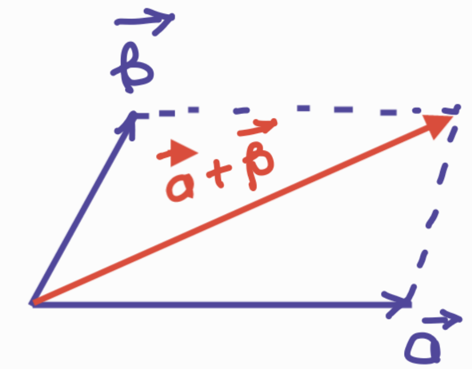
Συμπέρασμα

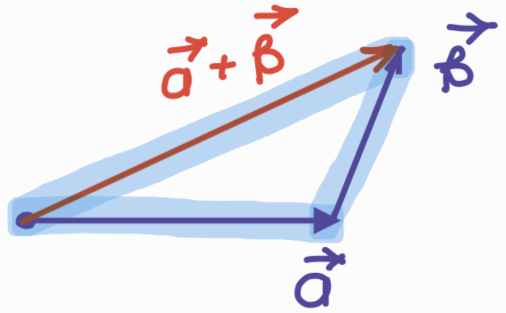
Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα δύο διανύσματα.

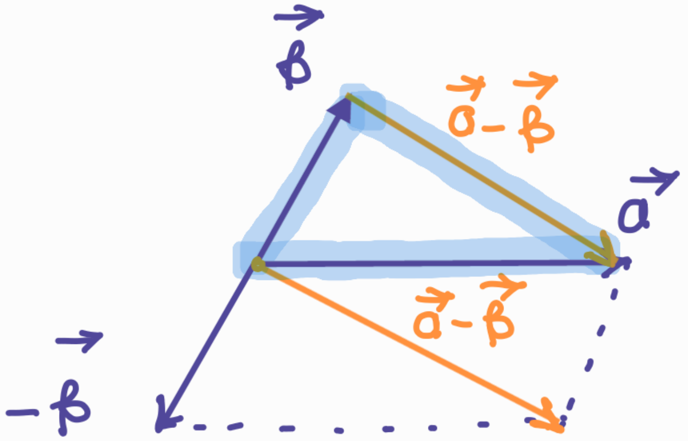
6γ. Ιδιότητες εξωτερικού γινομένου

1. $\vec{a} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{a}$

2. $\vec{a} \times (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = (\vec{a} \times \vec{\beta}) + (\vec{a} \times \vec{\gamma})$







3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{\beta}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{\beta} = \vec{a} \times (\lambda\vec{\beta}), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4. Αν $\vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{\beta}$ συγγραμικά

αν $\theta = 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ ομόρροπα

αν $\theta = \pi \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ αντίρροπα

Τότε $\vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{0}$, $\vec{a}, \vec{\beta}$ συγγραμμικά

Ασκήσεις

1. Αν $\vec{a} = (-2, 1, 2)$, να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ και $|\vec{a}|\vec{a}$

Λύση

- $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \Rightarrow |\vec{a}| = 3$
- $|2\vec{a}| = |2|\,|\vec{a}| = 2 \cdot 3 = 6$
- $||\vec{a}|\vec{a}| = |\vec{a}|\,|\vec{a}| = 3^2 = 9$

2. Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο και η γωνία των διανυσμάτων

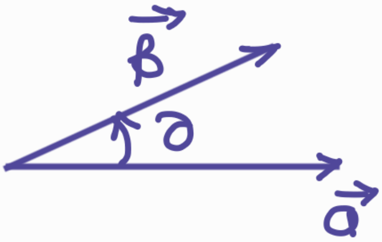
$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \sqrt{13}\,\vec{k} = (1, -2, \sqrt{13})$

$\vec{\beta} = -2\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{13}\,\vec{k} = (-2, 1, \sqrt{13})$

Λύση

$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = 1(-2) + (-2)\cdot 1 + \sqrt{13}\,\sqrt{13}$$

$$= 9$$



$$\vec{a}\cdot\vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}|\cos\theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(\sqrt{13})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{a}|\,|\vec{\beta}|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{9}{3\sqrt{2}\;3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(1,\,2,\,-\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},\,\lambda,\,1)$. Να βρεθούν

i) Το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$

ii) Το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\widehat{\vec{a},\vec{\beta}} = \frac{\pi}{3}$

Λύση

i) Για να είναι $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1 \cdot \sqrt{3} + 2\lambda - \sqrt{3} \cdot 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

ii) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 2\lambda$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}|\,|\vec{\beta}| \cos\theta \quad , \quad \theta = \widehat{\vec{a},\vec{\beta}}$$

Έχουμε όμως

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \lambda^2 + 1} = \sqrt{\lambda^2 + 4}$$

Άρα έχουμε

$$2\lambda = 2\sqrt{2}\,\sqrt{\lambda^2+4}\,\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = 2(\lambda^2+4)$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 = 8 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm 2}$$