Μιγαδικοί αριθμοί

Α. Ορισμός - Βασικές Έννοιες

1. $\boxed{\text{Μιγαδικός αριθμός}}$ $z = x+iy$ ή $z = x+yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, με $\sqrt{-1} = i$, εξ ορισμού είναι ο αριθμός

$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x+iy$
- → x : πραγματικό μέρος του z
- → y: φανταστικό μέρος του z
- → $\mathbb{C}$: σύνολο μιγαδικών αριθμών

Πραγματικό μέρος του z, $Re z = x \in \mathbb{R}$
Φανταστικό μέρος του z, $Im z = y \in \mathbb{R}$

π.χ $z = 3 - i \implies Re z = 3$ και $Im z = -1$, όπου Re z είναι Real z και Im z, Imaginary z.

2. Ιδιότητες μιγαδικών αριθμών

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$

- **Ισότητα**

Δυο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 είναι ίσοι

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \boxed{\text{και}}$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ αν $z_1 = x - 2yi$ και $z_2 = 3 + 4i$

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x = 3 \\ -2y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

- **Πρόσθεση**

Άθροισμα των z_1 και z_2, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, δηλαδή ένας νέος μιγαδικός αριθμός

Παράδειγμα

$$z_1 = 1-3i, \quad z_2 = 4+5i \Rightarrow z_1+z_2 = (1+4)+(-3+5)i \Rightarrow z_1+z_2 = 5+2i$$

$$z_1 - z_2 = (1-4)+(-3-5)i \Rightarrow z_1 - z_2 = -3-8i$$

$$z_1 = 3i = 0+3i, \quad z_2 = -2+4i \Rightarrow z_1 - z_2 = [0-(-2)] + (3-4)i = 2-i$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

- Αντιμεταθετική: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- Προσεταιριστική: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
- αν $z_1 + \cancel{z} = z_2 + \cancel{z} \Leftrightarrow z_1 = z_2$, $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

νόμος διαγραφής στο σύνολο $\mathbb{C}$

- Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός $z^* = 0+0i$, έτσι ώστε $z + z^* = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Ο μιγαδικός αριθμός $0+0i$ είναι **το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης**
- Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός $z' = (-x)+(-y)i$, έτσι ώστε αν $z = x+iy$, τότε $z + z' = 0$, ο **z' ονομάζεται αντίθετος του z** $\in \mathbb{C}$

π.χ. $z = -3+2i \Rightarrow z' = [-(-3)] + (-2)i = 3-2i$

οπότε όπως καταλαβαίνουμε η ύπαρξη του αντιθέτου μιγαδικού αριθμού μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης, ως εξής:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, προσθέτουμε στον $z_1 \in \mathbb{C}$, τον αντίθετο του $z_2 \in \mathbb{C}$

Πολλαπλασιασμός

$z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Θυμόμαστε $\boxed{i^2 = -1}$

π.χ. $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 5-3i$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3+2i)\cdot(5-3i) = -15 + 9i + 10i + 6 = -9 + 19i$$

$$2i \cdot (-3i) = -6i^2 = -6(-1) = 6$$

$\boxed{\text{Ιδιότητες πολλαπλασιασμού}}$

- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ αντιμεταθετική
- $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ προσεταιριστική

- επιμεριστική $z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$,

$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

- Νόμος διαγραφής πολλαπλασιασμού

$z_1\cdot z=z_2\cdot z \Leftrightarrow z_1=z_2, \ \forall\, z\in \mathbb{C}\setminus\{0+0i\}$

Μηδέν για το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι ο μιγαδικός αριθμός με μηδενικό πραγματικό και φανταστικό μέρος $z=0=0+0i$

αν $z=0+iy,\ y\neq 0 \Rightarrow z\neq 0$
αν $z=x+0i,\ x\neq 0 \Rightarrow z\neq 0$

- Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού $z^*=1+0i$

έτσι ώστε $z\cdot z^*=z, \forall\, z\in\mathbb{C}$

Αν $z^*=0+1i$, τότε $z=1+2i$

$z\cdot z^*=1i(1+2i)=1i-2=-2+i\neq z$

- Αντίστροφος μιγαδικού αριθμού

Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε, αν $z\in\mathbb{C}\setminus\{0+0i\}$ είναι $\frac{1}{z}$ και συμβολίζεται με $z^{-1}=\frac{1}{z}$. Ο αριθμός z^{-1} ονομάζεται αντίστροφος του z

π.χ. $z=1-i \rightarrow z^{-1}=\frac{1}{1-i}$

Εφ' όσον για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z υπάρχει ο αντίστροφός του, μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της $\boxed{\text{διαίρεσης}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad \forall\ z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-6i$, τότε

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

$$z_2 = 5-6i \Rightarrow z_2^{-1} = \frac{1}{5-6i} = \frac{(5+6i)}{(5-6i)(5+6i)} \quad *$$

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Με την ευκαιρία αυτή ορίζουμε τον συζυγή μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ο οποίος συμβολίζεται με $\bar{z} = x - iy$

π.χ. $z = 2-3i \Rightarrow \bar{z} = 2+3i$, οπότε

$z_2 = 5-6i \Rightarrow \bar{z}_2 = 5+6i$

*Σε συνέχεια του παραδείγματος έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \text{ όπου } z_2 = 5-6i \text{ και } z_2^{-1} = \frac{1}{5-6i}$$

$$z_2^{-1} = \frac{5+6i}{(5-6i)(5+6i)} = \frac{5+6i}{25+30i-30i+36} = \frac{5+6i}{61}$$

$$= \frac{5}{61} + \frac{6}{61}i, \text{ άρα}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (2+3i)\left(\frac{5}{61} + \frac{6}{61}i\right) = \frac{10}{61} + \frac{12}{61}i + \frac{15}{61}i - \frac{18}{61}$$

$$= -\frac{8}{61} + \frac{27}{61}i$$

3. Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών

Ορισμός

Δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζονται για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς, δηλαδή:

$$z^1 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{z^\nu = z^{\nu-1} \cdot z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \nu = 2, 3, 4 \ldots, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Επίσης ορίζεται ότι $z^{-\nu} = \frac{1}{z^\nu}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, με $z \neq 0$

Ισχύει επίσης $z^0 = 1$, $z \neq 0$

- Δεν έχει έννοια στο σύνολο $\mathbb{C}$ η παράσταση

0^0

- Δεν έχει έννοια η διάταξη μεταξύ μιγαδικών αριθμών, δηλαδή δεν ορίζεται $z_1 \gtrless z_2$, δηλαδή δεν υπάρχει η έννοια της ανισότητας στο $\mathbb{C}$

Ιδιότητες δυνάμεων

Ισχύουν όλες οι γνωστές από τους πραγματικούς αριθμούς ιδιότητες των δυνάμεων, δηλαδή

$i^0 = 1$, $(1-2i)^0 = 1$

$i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$,

Γενικά ισχύει

$$\boxed{\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \quad , \forall k \in \mathbb{Z} \\ i^{4k+2} &= -1 \end{aligned}}$$

Παράδειγμα

$z = 2-3i$

$z^2 = (2-3i)^2 = 2^2 - 12i + (-3i)^2 = -5-12i$

$z^3 = (2-3i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 (3i) + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 - (3i)^3$

$= 8 - 36i - 54 - 27i^3 = -46 - 9i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $27i^3 = -27i$

4. Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί και ιδιότητες

Όπως έχει οριστεί αν $z \in \mathbb{C}$: $z+iy$, τότε ο συζυγής του είναι $\bar{z} = x - iy$ και ισχύουν

- $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$, δηλαδή $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$,

- $z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $x \neq 0$, άρα $\boxed{Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}}$

- $z - \bar{z} = (x+iy) + (-x+iy) = 2iy \Rightarrow$
$y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $y \neq 0$, άρα $\boxed{Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}}$

Επομένως για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x+iy$ ισχύουν $x = Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $y = Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
- $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

- $\overline{(z^{\nu})} = (\overline{z})^{\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}$

- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

- $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

5. Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x+iy$. Τότε ορίζεται σαν μέτρο του μιγαδικού αριθμού z, συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός αριθμός

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0}$$

είναι όμως $z \cdot \overline{z} = x^2+y^2$, οπότε $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Παραδείγματα

1. $|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$

2. Να βρεθεί το $\left|\dfrac{1+i}{2-3i}\right|$

$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-1+5i}{2^2+3^2} = -\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+i}{2-3i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{26}$$

3. $\left|(1+2i)^3\right|$

$$(1+2i)^3 = 1^3 + 3.1^2.2i + 3.1.(2i)^2 + (2i)^3$$

$$= 1 + 6i - 12 - 8i$$

$$= -11 - 2i$$

$$\left|(1+2i)^3\right| = \left|-11-2i\right| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{125}$$

Μορφές μιγαδικών αριθμών

6. Μορφές μιγαδικού αριθμού

1. Καρτεσιανή μορφή

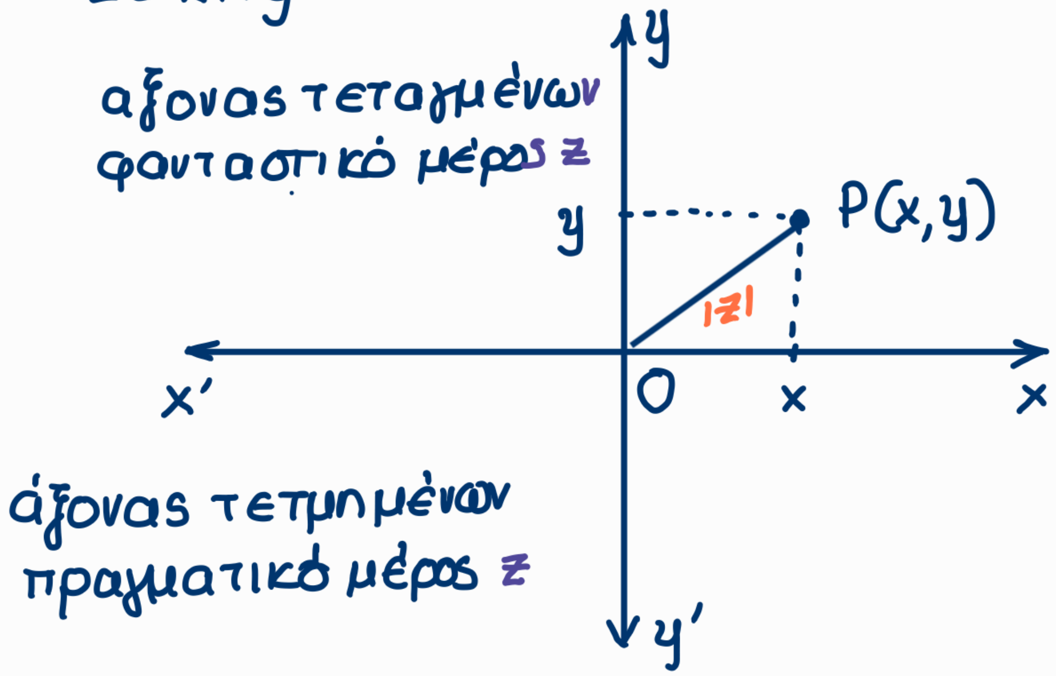
Έστω $z \in \mathbb{C}$, όπου $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

x: πραγματικό μέρος — Real του $x = Re\,z$

y: φανταστικό μέρος — Imaginary του z, $y = Im\,z$

2. Γεωμετρική μορφή

$z = x + iy$



Ισχύει

$(OP)^2 = x^2 + y^2$

$(OP) = \sqrt{x^2 + y^2}$

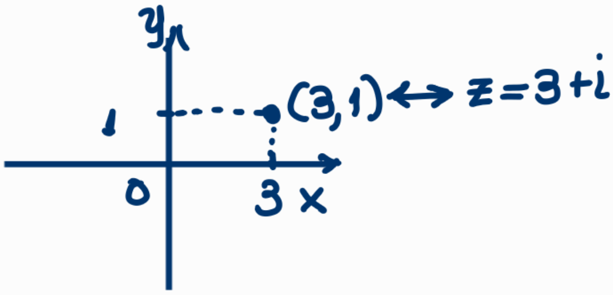
$(OP) = |z|$

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου $P(x,y)$, δηλαδή $z = x + iy \longleftrightarrow (x,y)$

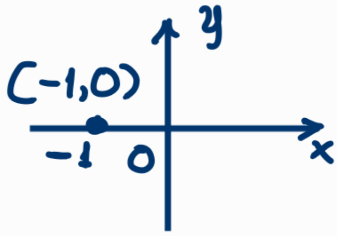
Το επίπεδο, στο οποίο παριστάνουμε γεωμετρικά όλους τους μιγαδικούς αριθμούς ονομάζεται μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο Gauss

Παραδείγματα

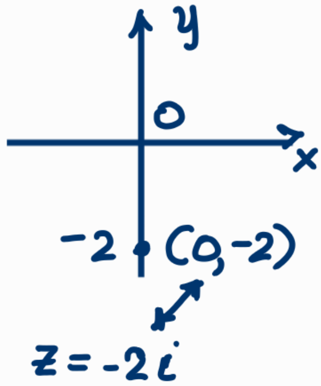
1. $z = 3+i$



2. $z=-1$

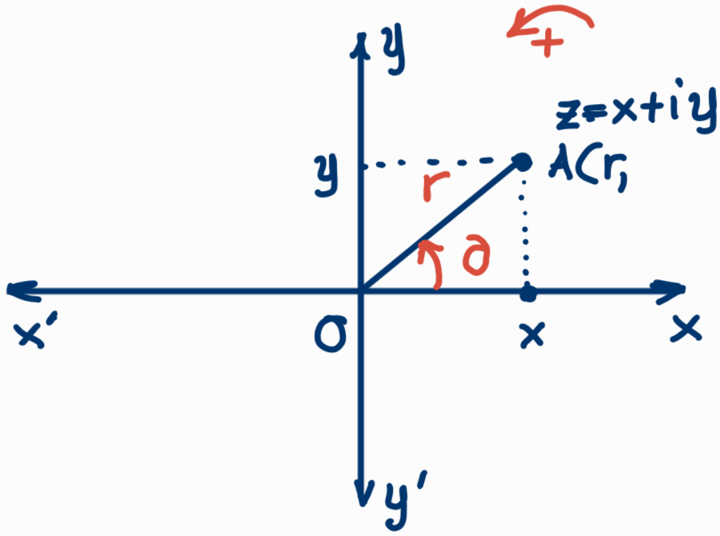


3. $z=-2i$



3. Τριγωνομετρική ή πολική μορφή

Έστω μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$



1. $\theta \in [0,2\pi)$
2. $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$
3. $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$

   $x,y \neq 0$

Επομένως για τον μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ ισχύει

$$\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ x=|z|\cos\theta \\ y=|z|\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow z=|z|\cos\theta+i\,|z|\sin\theta$$

$$\Rightarrow z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

Τριγωνομετρική μορφή $z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)$

Το επίπεδο που παριστάνονται οι μιγαδικοί αριθμοί με τριγωνομετρική μορφή ονομάζεται επίπεδο Argand.

- Οπότε για $z=x+iy$

$$\Downarrow$$

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

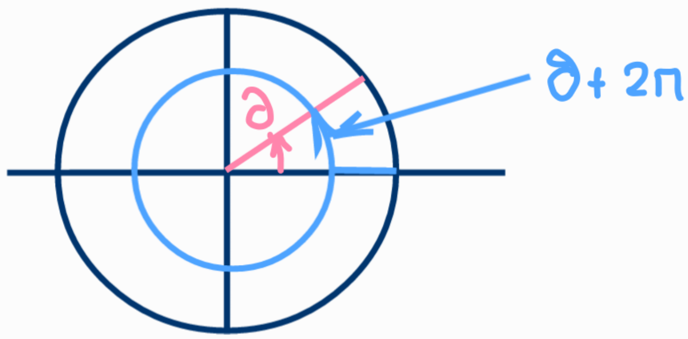
$\theta\in[0,2\pi)$, δηλαδή $0\leq\theta<2\pi$

- Αν η γωνία $\theta\in[0,2\pi)$, τότε ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $Arg z=\theta$

- Γενικά μια οποιαδήποτε γωνία $\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ είναι ένα οποιοδήποτε όρισμα του μιγαδικού αριθμού z και ισχύει $\arg=Arg z+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Διότι ισχύουν

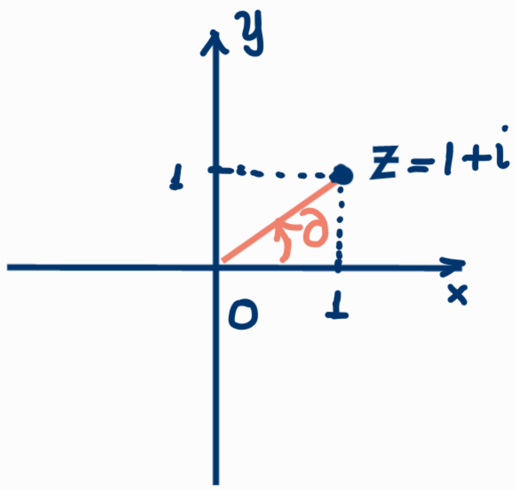
$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta&=\cos(\theta+2k\pi)\\ \sin\theta&=\sin(\theta+2k\pi)\end{aligned}}$$



Παράδειγμα

Έστω $z=1+i$, να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του, το $Arg z$ και $\arg z$.

Λύση: $z = 1 + i$



$z = 1 + i$

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

- $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\mathrm{Arg}\, z = \dfrac{\pi}{4}$, $\arg z = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$

Γενικά ισχύουν

1. Αν ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, έχει

$x, y > 0 \longrightarrow$ 1ο τεταρτημόριο $\Rightarrow \theta = \mathrm{Arg}\, z \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

2. Αν $x < 0$ και $y > 0$ 2ο τεταρτημόριο

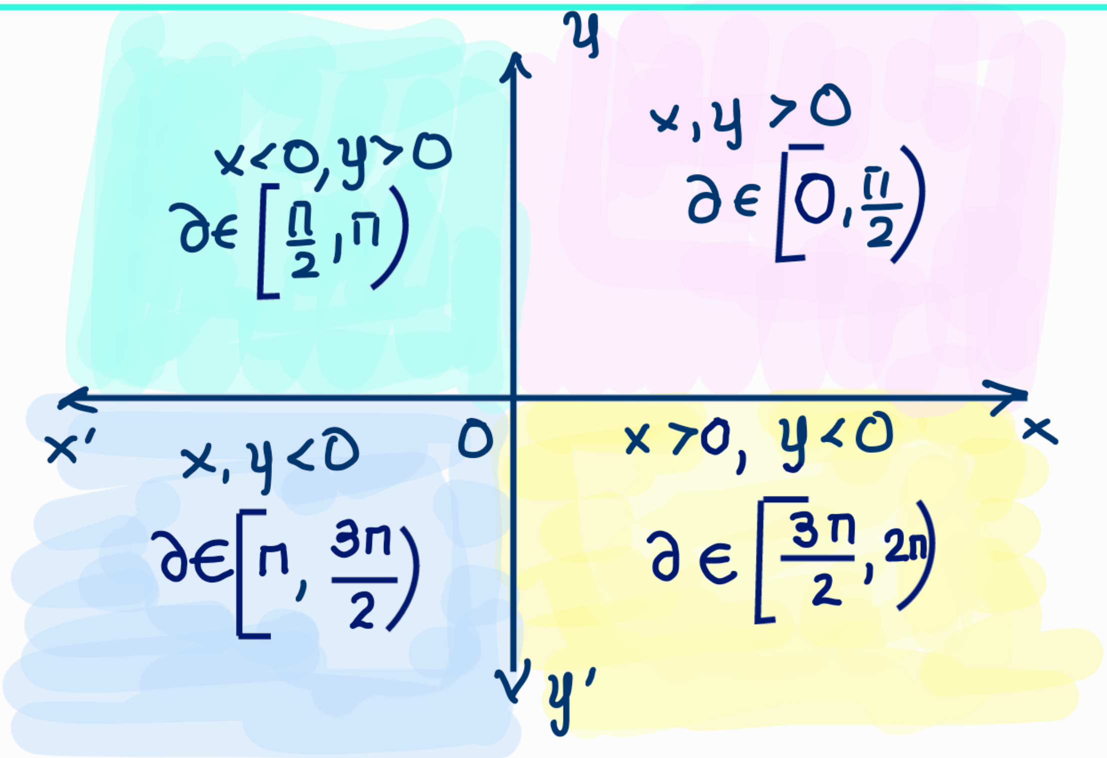
$\Rightarrow \theta = \mathrm{Arg}\, z \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

3. Αν $x, y < 0 \longrightarrow$ 3ο τεταρτημόριο $\Rightarrow$

$\theta = Arg\, z \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

4. Αν $x > 0, y < 0 \longrightarrow$ 4ο τεταρτημόριο $\Rightarrow$

$\theta = Arg\, z \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$



4. Εκθετική μορφή

Από την ταυτότητα του Leonhard Euler (1707 - 1783) έχουμε

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Απόδειξη

$z = \cos\theta + i\sin\theta$, οπότε $|z| = |e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta|$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i^2\sin\theta + i\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = iz \rightarrow \frac{dz}{z} = i\,d\theta \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int i\,d\theta$$

$$\Rightarrow \ln z = i\theta + c \Rightarrow z = e^{i\theta + c} \ *$$

$\Rightarrow$

Αν $z=1$, τότε $\theta=0$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = \cos 0 + i\sin 0$$

$$* \ 1 = e^{i0+c} \Rightarrow c=0,$$ επομένως

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ z &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}\right| \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ξαναγυρίζοντας στην ταυτότητα του Euler πολλαπλασιάζουμε και τα μέλη με $|z|$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \xrightarrow{\cdot|z|} |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι έστω ο $z \in \mathbb{C}$:

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$, με $|z| \neq 0 \Rightarrow$ ή $x \neq 0$ ή $y \neq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Τότε κάθε μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$ μπορεί να γραφεί σε τρεις μορφές

$z = x+iy$ καρτεσιανή

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ τριγωνομετρική

$z=|z|\cdot e^{i\theta}$ εκθετική

- Οι τρεις διαφορετικές μορφές είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

- $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, αν θέσουμε $\theta=\pi$, προκύπτει:

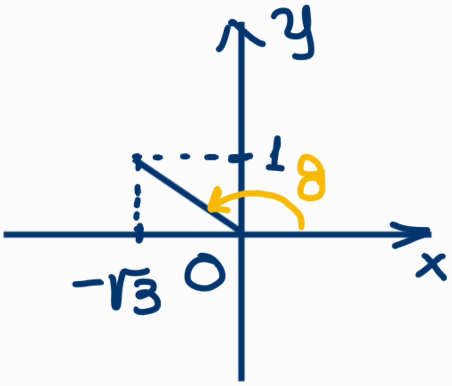
$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi \Rightarrow e^{i\pi}=-1+0 \Rightarrow$

$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$, η σχέση συνδέει τους κυριότερους αριθμούς μεταξύ τους, e, i, π, 1, 0.

Παραδείγματα

Να βρεθούν όλες οι μορφές του μιγαδικού αριθμού $z=-\sqrt{3}+i$

1. Σχήμα $\quad z=-\sqrt{3}+i\ ,\ x=-\sqrt{3},\ y=1$



2. $|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$$\cos\theta=\frac{x}{|z|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\ \theta=\frac{5\pi}{6}$$

Άρα $\operatorname{Arg}z=\frac{5\pi}{6}$, $\arg z=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

• Τριγωνομετρική μορφή $z=-\sqrt{3}+i=$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

• Εκθετική μορφή $z=|z|e^{i\theta}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\ .\ .\ .\ .\ .\ \ .$$

$$= 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

$z(\arg z) \longrightarrow$ πλειονότιμη συνάρτηση

$z(\mathrm{Arg} z) \longrightarrow$ μονότιμη συνάρτηση

Ιδιότητες της εκθετικής μορφής

- Έχουμε ότι $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1), αν θέσουμε όπου θ, το $-\theta$, παίρνουμε

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \Rightarrow$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = |z_2| (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

- $\boxed{\text{Ισότητα}}$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \theta_1 = 2k\pi + \theta_2, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Γινόμενο}}$

$z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$

$z_2 = |z_2| (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \\ z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

Γενικεύοντας, για ν το πλήθος μιγαδικούς $z_1, z_2 \dots z_\nu$ έχουμε

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu| \left[\cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)\right]$$

Αν $z_1 = z_2 = \dots = z_\nu = z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

τότε

$$\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdots |z|}_{\nu} \left[\cos(\underbrace{\theta+\theta+\dots+\theta}_{\nu}) + i\sin(\underbrace{\theta+\theta+\dots+\theta}_{\nu})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z^\nu = |z| \left[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)\right]}$$

Ταυτότητα de Moivre

• $z = z\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 0 \neq 0 + 0i$

$$\Rightarrow z^{-1} = z^{-1}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) \Rightarrow$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

• Απόδειξη από την ταυτότητα του Euler

• Πηλίκο

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$z_2 \neq 0$

Απόδειξη:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = |z_1| e^{i\theta_1} \; *$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_2| e^{i\theta_2} \; *, \quad z_2 \neq 0$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\theta_1} / e^{i\theta_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις στον τύπο } e^{i\pi} = -1}$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$ από ταυτότητα του Euler.

Ο μιγαδικός αριθμός $z = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow$

$z = -1 + i\cdot 0 \Rightarrow z = -1 + i0$

$z = \cos\pi + i\sin\pi = |1|(\cos\pi + i\sin\pi)$, αν $z = 1 \Rightarrow$

$1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i \in \mathbb{R}$.

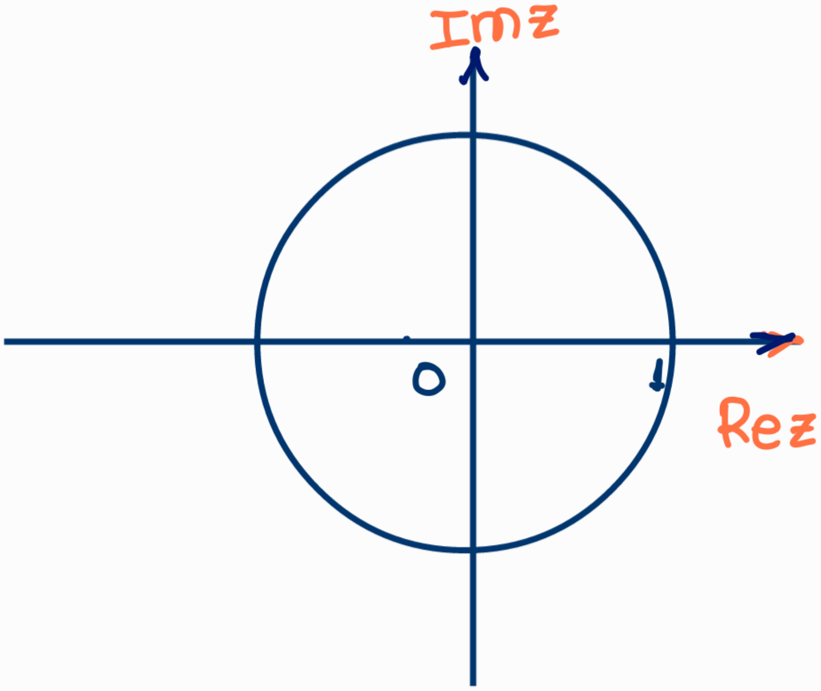
Ταυτότητα Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta = 0 \Rightarrow e^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$\theta = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

Παρατηρήσεις

- Αν $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ τότε επειδή $\theta = 2k\pi$, έχουμε $\cos 2k\pi = 1$ και $\sin\theta = \sin 2k\pi = 0 \Rightarrow z = |z| \in \mathbb{R}$, άρα πραγματικός αριθμός και επιπλέον θετικός
- Αν $\theta = (2k+1)\pi \Rightarrow \cos(2k\pi + \pi) = \cos\pi = -1$ και $\sin(2k\pi + \pi) = 0$, τότε ο z είναι πραγματικός και αρνητικός



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Downarrow$

περιφέρεια κύκλου με $(0, 1)$, διότι $\cos\theta + i\sin\theta =$

$|1| \cos\theta + i\sin\theta$

$f(\theta) = e^{i\theta}$

- Επίσης, αν $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, τότε $\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow z = i\,|z|$, δηλαδή καθαρά φανταστικός με θετικό φανταστικό μέρος
- Αν $\theta = (2k\pi + 1)\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, ο $z = -i\,|z|$ οπότε καθαρά φανταστικός, με αρνητικό φαντα-

Ρίζες μιγαδικών αριθμών

στικό μέρος.

7. Ρίζες μιγαδικών αριθμών

Ορισμός Έστω μιγαδικός αριθμός $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ονομάζουμε ν-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού a, την οποία και συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{a}$ ή $a^{\frac{1}{\nu}}$, κάθε αριθμό $z \in \mathbb{C}$:

$$z^\nu = a$$

π.χ. $a = 1+i \Rightarrow \sqrt[3]{a} = z : \Rightarrow z^3 = 1+i$

Έστω $z = |z|e^{i\varphi}$ και $a = |a|e^{i\theta}$, τότε δεδομένου ότι $z^\nu = a \Rightarrow$

$$\left(|z|e^{i\varphi}\right)^\nu = |a|e^{i\theta} \Rightarrow |z|^\nu e^{i\nu\varphi} = |a|e^{i\theta} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} |z|^\nu = |a| \\ \nu\varphi = 2k\pi + \theta \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |z| = \sqrt[\nu]{|a|} \\ \varphi = \dfrac{2k\pi+\theta}{\nu} \end{array}}$$

Οπότε εφόσον $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z = |z|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\Rightarrow z = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{\nu} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{\nu}\right), k \in \mathbb{Z}$$

επομένως $k = 0, 1, \ldots \nu-1$, και έχουμε

ν το πλήθος διαφορετικές ρίζες του $a \in \mathbb{C}$.

Άρα έχουμε

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right),\ k=0,1,\ldots,\nu-1}$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1+i$.

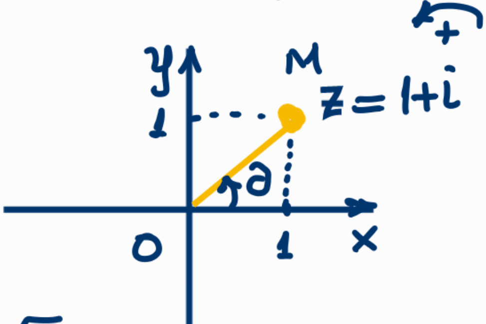
Λύση

Ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε τις $\sqrt[3]{1+i}$

$a = 1+i$

Μεθοδολογία

- $a = 1+i$, βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του.



$|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$x = 1,\ y = 1$

$\cos\theta = \frac{x}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα $z_k=\sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{\nu}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right)$,

$k=0,1,\dots \nu-1$

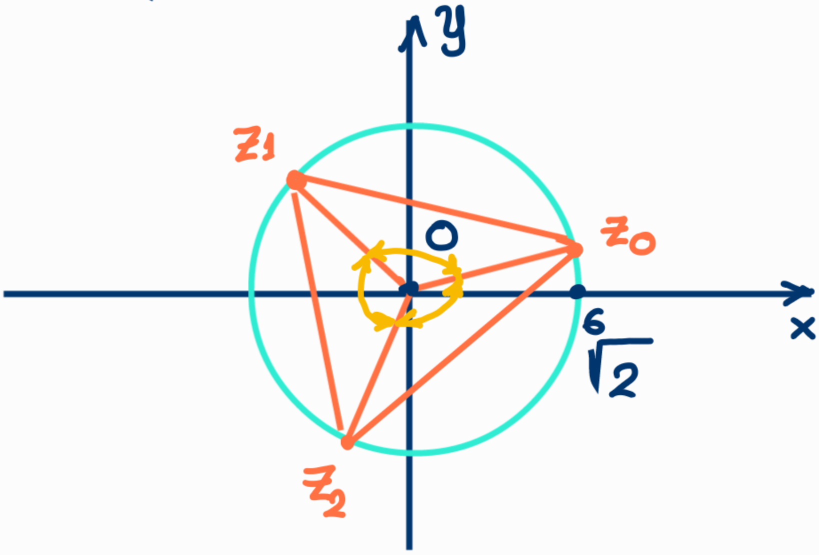
Εδώ $\nu=3 \Rightarrow k=0,1,2$. Επομένως

για $k=0$, $z_0=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}\right)$

$$\Rightarrow z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$k=1$, $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right) \rightarrow \frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}$

$k=2$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \rightarrow \frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}$



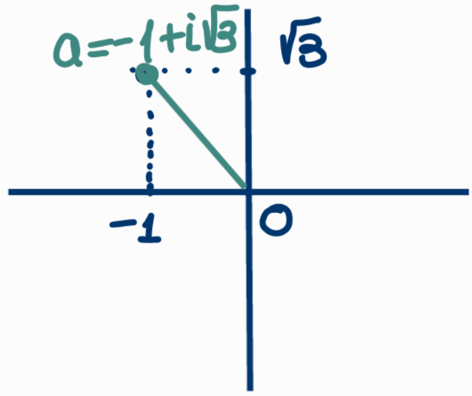
Οι τρεις ρίζες z_0, z_1, z_2 ορίζουν κορυφές ισο-πλεύρου τριγώνου.

Γενικά οι ν-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου $(O, \sqrt[\nu]{|a|})$ και είναι κορυφές ν-πλευρών κανονικού πολυγώνου, δηλαδή πολύγωνο που έχει τις πλευρές ίσες και τις κεντρικές γωνίες ίσες με $\dfrac{2\pi}{\nu}$

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$

Λύση

$a = -1 + i\sqrt{3}$



• Τριγωνομετρική

$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{|a|} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Επομένως $a = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$|a| = 2$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

• $\nu = 2 \Rightarrow k = 0, 1$

$k=0$, $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$

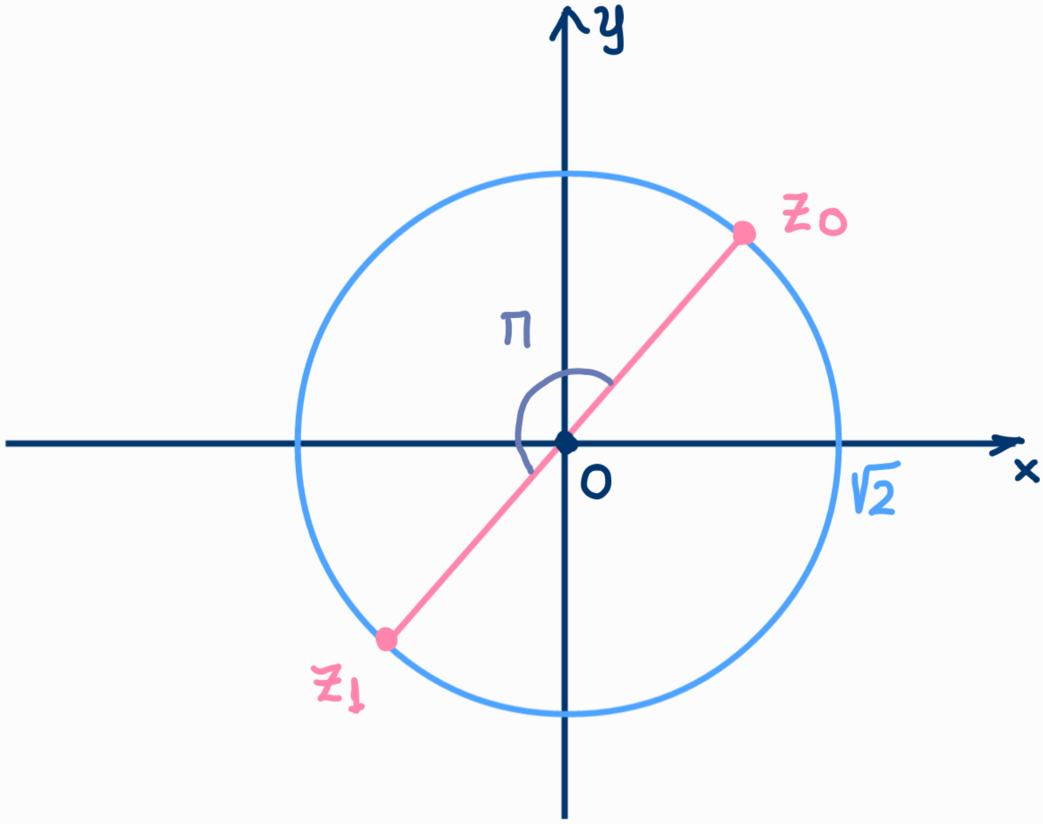
για $k=0 \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

Παρατηρούμε ότι τα ορίσματα των μιγαδικών z_1, z_2 που είναι οι δύο ρίζες του $\sqrt{a}$, είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ και διαφέρουν κατά $\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3} = \pi$. Επίσης αν αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες τιμές για τα ημίτονα και συνημίτονα στις z_0 και z_1 παίρνουμε:

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ και $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$. Τοποθετούμε τις z_0, z_1 στο επίπεδο $\mathbb{C}$ και προκύπτει το σχήμα:



Οι δύο ρίζες z_0 και z_1 βρίσκονται στα άκρα διαμέτρου του κύκλου $(O, \sqrt{2})$

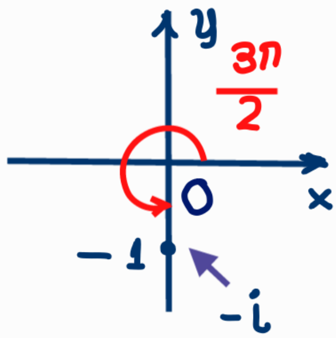
Γενικά όταν έχουμε εξίσωση της μορφής $z^{\nu}=\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, βρίσκουμε

- την τριγωνομετρική μορφή του $\alpha \rightarrow |\alpha|, \theta$
- εφαρμόζουμε τον τύπο εύρεσης της ν-οστής ρίζας για $k=0, 1, 2 \ldots \nu-1$.

3. Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^5=-32i$.

Λύση

• 1. Βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του $a=-32i$. Προς διευκόλυνση πράξεων βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του $-i$.



$$Arg(-i)=\frac{3\pi}{2}$$

$|-i|=1$ και $|a|=32$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$

Άρα $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

Επομένως $a=-32i=32\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

• 2. Εφαρμόζουμε τον γνωστό τύπο της ρίζας και έχουμε

Εφόσον $\nu=5 \Rightarrow k=0,1,2,3,4$

$$k=0 \Rightarrow z_0=\sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{5}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)}$$

$$k=1 \Rightarrow \boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)} \rightarrow \frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{5}$$

$$k=2 \Rightarrow \boxed{z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}\right)}$$

$$k=3 \Rightarrow \boxed{z_3 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}\right)}$$

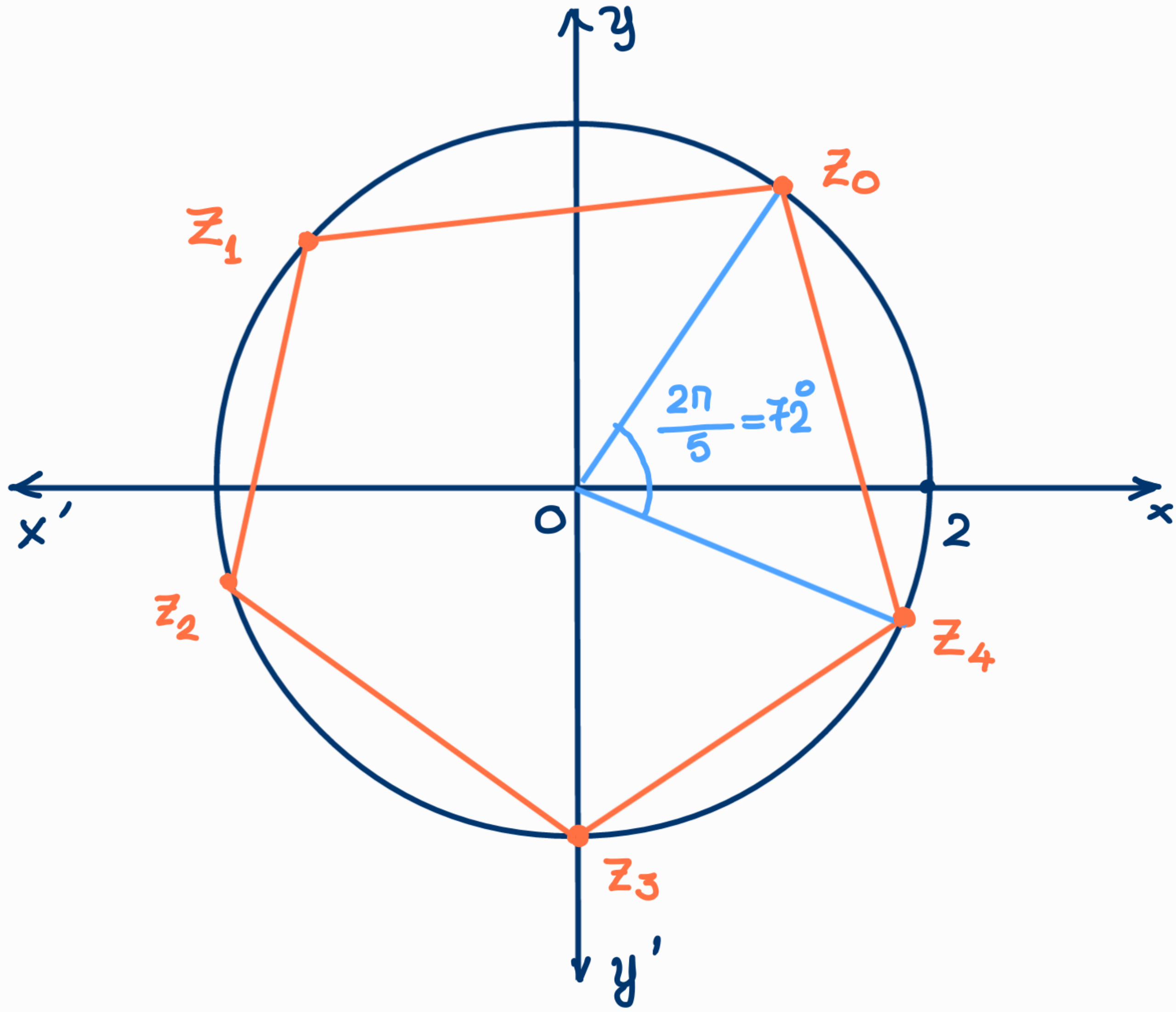
$$k=4 \Rightarrow \boxed{z_4 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}\right)}$$

Διαφορά μεταξύ ορισμάτων $\frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} \rightarrow \frac{2\pi}{\nu}$

Οι 5 ρίζες βρίσκονται στην περιφέρεια κύκλου $(0, 2)$ και αποτελούν κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό.

Η κεντρική γωνία είναι $\frac{2\pi}{5} = 72°$

Αν τοποθετήσουμε τις ρίζες z_0, z_1, z_2, z_3 και z_4 στο μιγαδικό επίπεδο προκύπτει το επόμενο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι οι 5 ρίζες του φανταστικού αριθμού $-32i$ είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου.

4. Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$$

Λύση

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση 2ου βαθμού

της μορφής $ax^2+bx+c=0$, τότε γνωρίζουμε

ότι οι ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$ είναι της μορφής

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$ οπότε αντικαθιστώντας

$a=1,\quad b=2i-3,\quad c=5-i$

$$\Delta=b^2-4ac=(2i-3)^2-4(5-i)$$
$$=-4-12i+9-20+4i$$
$$=15-8i=-16+1-8i=(4i)^2-2.4i.1+1^2$$
$$=(1-4i)^2$$

Άρα: $z_1=\dfrac{-(2i-3)+(1-4i)}{2}\Rightarrow \boxed{z_1=2-3i}$

και αντίστοιχα, $\boxed{z_2=1+i}$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την $\sqrt{\Delta}=$

$\sqrt{-15-8i}$ και με τον γνωστό τρόπο, ως εξής

$z^2 = -15 - 8i$

$a = -15 - 8i \Rightarrow |a| = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = 17$

$\cos\theta = \dfrac{x}{|a|} = -\dfrac{15}{17}$ και $\sin\theta = \dfrac{y}{|a|} = -\dfrac{8}{17}$

οπότε να θεωρήσουμε το $Arg(a) = \theta$, με γνωστά

$\cos\theta$ και $\sin\theta$. $\nu = 2 \Rightarrow k = 0, 1$.

Άρα $z_k = \sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\theta + 2k\pi}{2}\right)$

Για $k = 0 \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Για $k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{17}\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{17}\left(-\cos\dfrac{\theta}{2} - i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\rightarrow \boxed{z_1 = -\sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Εφαρμόζοντας τους γνωστούς τύπους

$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \pm\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

Όμως επειδή ο αριθμός $a = -15 - 8i$ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο, η γωνία θ ανήκει επίσης στο 3ο τεταρτημόριο, δηλαδή $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ η γωνία $\frac{\theta}{2}$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο, άρα έχει αρνητικό συνημίτονο και θετικό ημίτονο. Συνεπώς

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \quad \text{και} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

οπότε με αντικατάσταση στις z_0 και z_1 παίρνουμε ότι $z_0 = -1+4i$ και $z_1 = 1-4i$