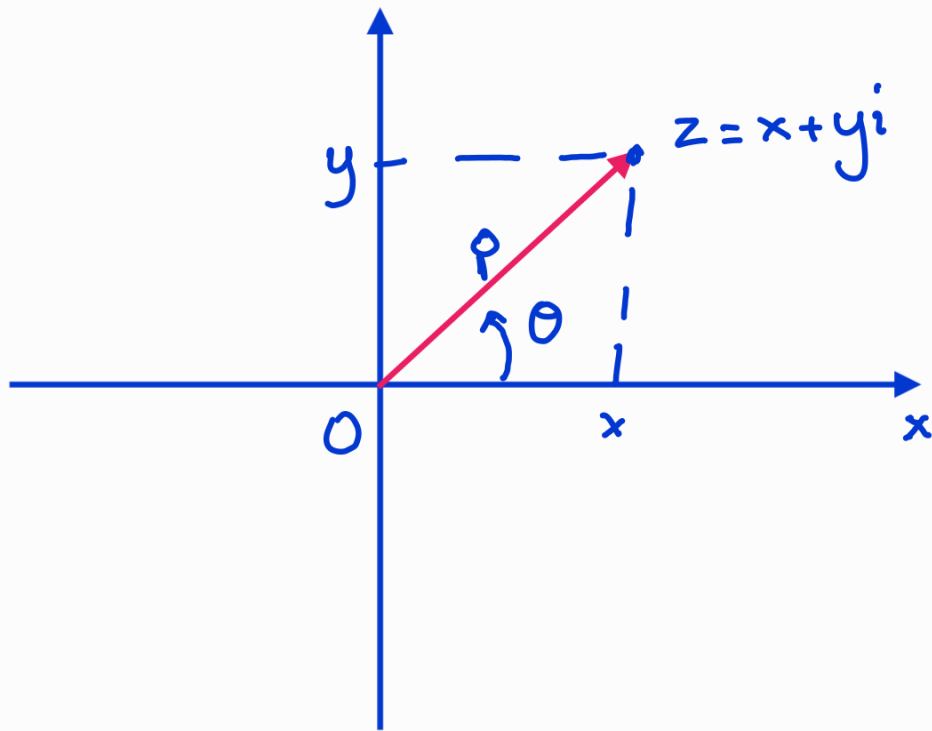


Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού



$$x = \rho \cos \theta, \quad \rho = |z|$$
$$y = \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Αρα $x = |z| \cos \theta$
 $y = |z| \sin \theta$

$$z = x + yi$$

$$|z| \cos \theta + i |z| \sin \theta$$

$$Z = |Z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

- Αν η γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, τότε λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

- Γενικά για οποιαδήποτε γωνία $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε ένα οποιοδήποτε όρισμα του μιγαδικού και ισχύει $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

π.χ

$$Z = x + yi$$

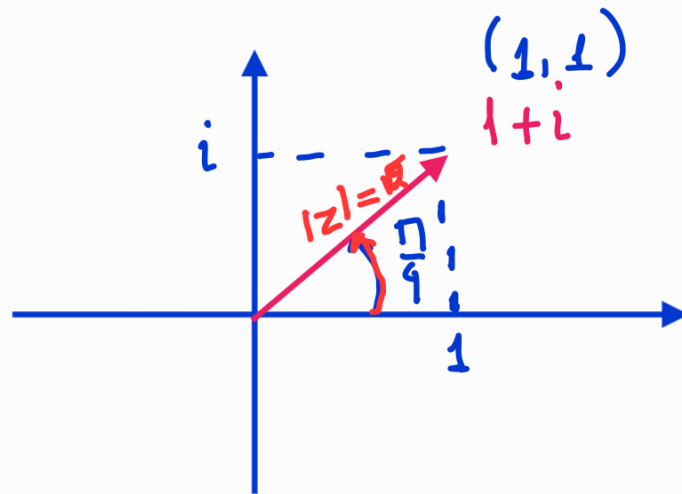
$$Z = 1 + i$$

$$Z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$1 = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{|z|} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|z|} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$



$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Τριγωνομετρική
μορφή

Εκθετική μορφή μιγαδικού

Ταυτότητα Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Άρα $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}$$

εκθετική
μορφή
μικαδικού

π.χ

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{άρα}$$

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$$

εκθετική
μορφή

κάθε μιγαδικός αριθμός δίνεται

- $z = x + yi$, καρτεσιανή μορφή

$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$ τριγωνομετρική μορφή

- $z = |z|e^{i\theta}$, εκθετική μορφή

Οι τρεις μορφές είναι ισοδύναμες

π.χ Να βρείτε όλες τις μορφές του μιγαδικού $z = -\sqrt{3} - i$

- $z = -\sqrt{3} - i$, καρτεσιανή

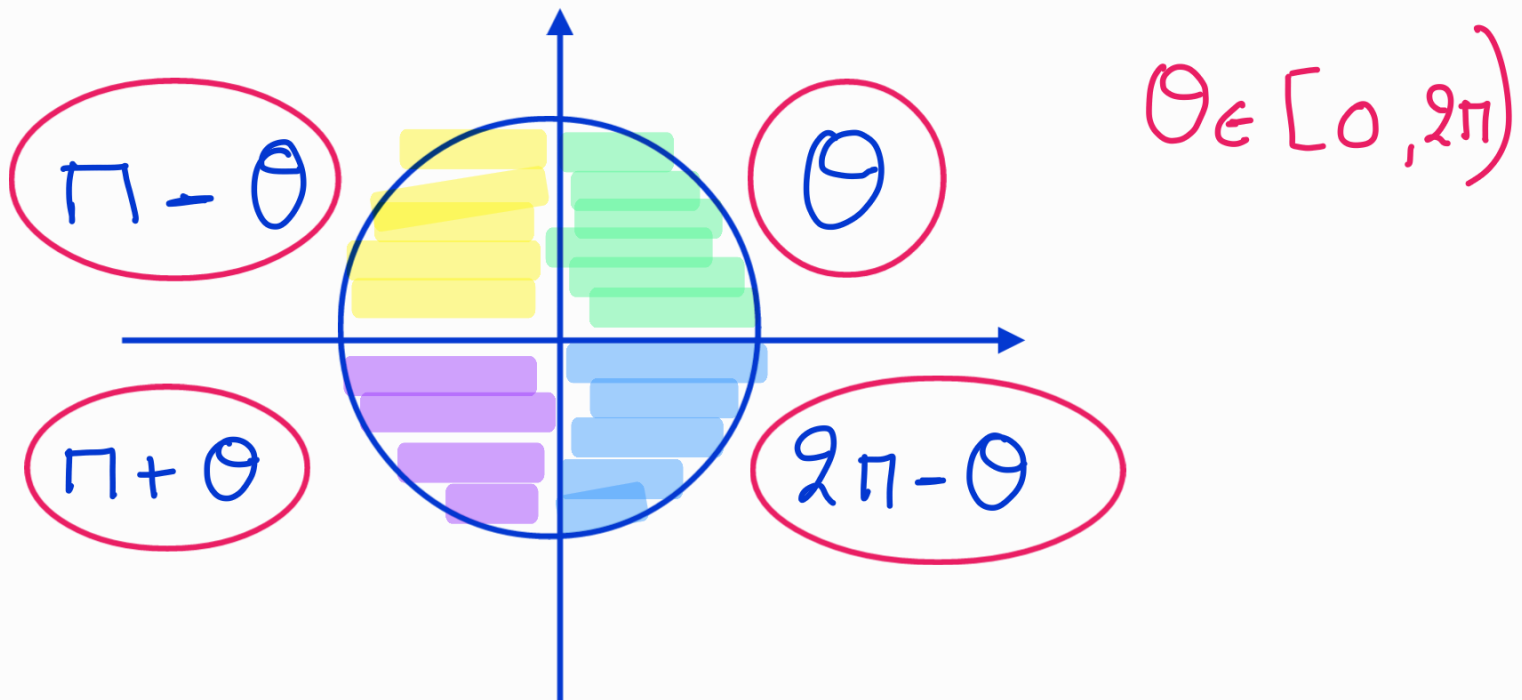
- $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

$$\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \end{array} \right.$$

$$\sin \theta = \frac{-1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$Z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right), \text{ τριγων. μορφή}$$

- $Z = 2 e^{\frac{7\pi}{6} i}$, εκθετική μορφή



Διόζητες εκθετικής μορφής

$$Z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1}$$

$$Z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2}$$

- $Z_1 = Z_2 \iff |z_1| = |z_2|, \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$
 $k \in \mathbb{Z}$

- $Z_1 \cdot Z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

- $z_1^v = |z_1|^v \cdot e^{(v\theta_1)i}$

- $z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1|} \cdot e^{-i\theta_1}$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

- $e^{i\pi} = -1$ Απόδειξη
 $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$
 $e^{i\pi} = -1$

Γεωμετρία
 Διαγωνίσματα 14/03!

Ρίζες μιγαδικού αριθμού

Ορισμός:

Ονομάζουμε n -οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού a , κάθε

μικαδικό αριθμό z :

$$z^v = a$$

Οι v -οστές ρίζες ενός μικαδικού a

είναι:

$$\forall a = |a| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

τότε

$$z_k = \sqrt[v]{|a|} \cdot \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{v} \right) \right)$$

$$\mu\epsilon \quad k = 0, \dots, v-1$$

Π.Χ.

1. Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1+i$

Βήμα 1^ο Γράφουμε σε τριγωνομετρική

μορφή $a=1+i$

- $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$

- $$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως, $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Βήμα 2^ο Εφαρμόζουμε τον τύπο της $\sqrt[n]{}$ -οστής ρίζας

$$Z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)$$
$$k = 0, \dots, n-1$$

Αρα για να βρούμε $\sqrt[3]{1+i}$ έχουμε

- $k=0 \quad Z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}}{3} \right)$

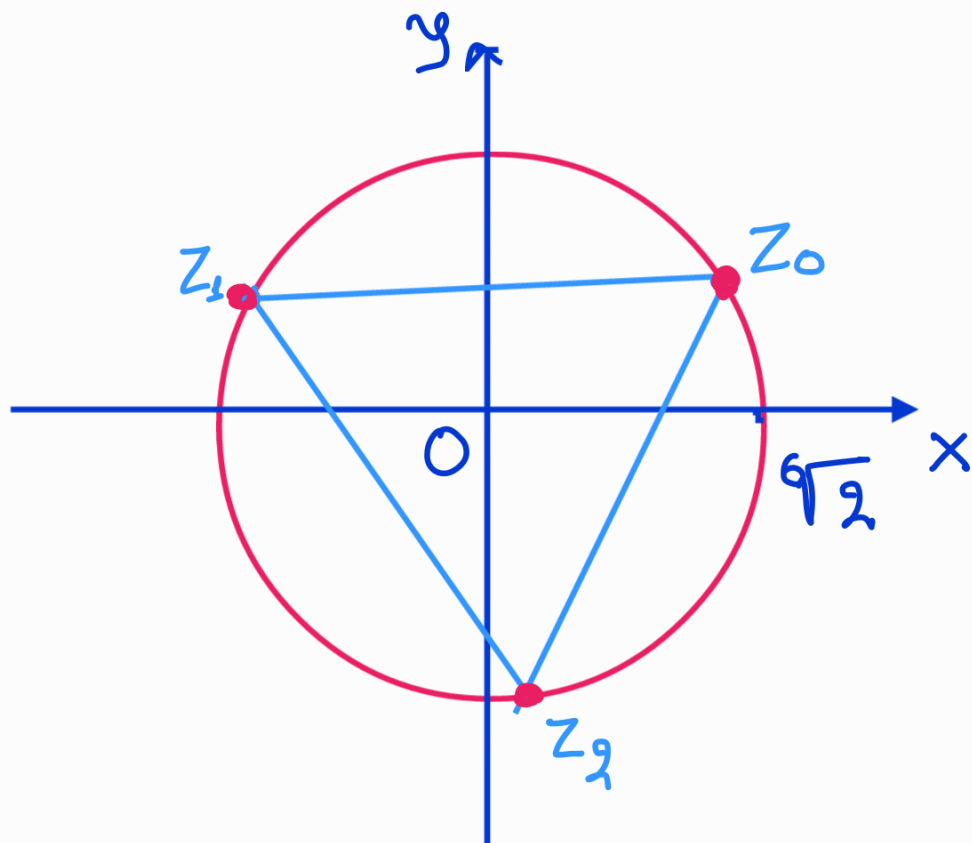
$$Z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

• $k=1$, $Z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right)$

$$Z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

• $k=2$, $Z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right)$

$$Z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$



2. Na $\lambda \nu \theta z i$ n $Z^2 = -1 + \sqrt{3} i$

$$1^{\circ} \quad a = -1 + \sqrt{3}i = \boxed{|a|} (\cos \boxed{\theta} + i \sin \boxed{\theta})$$

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{|a|} = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \theta &\in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \theta &= \pi - \frac{\pi}{3} \\ \theta &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

2^ο Εφαρμόζουμε τον τύπο :

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

$$\bullet \quad k=0, \quad z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$Z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

'Apa, $Z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$

• $k=1, Z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} \right)$
 $= \sqrt{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$
 $= \sqrt{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right)$

Apa, $Z_1 = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$

$$Z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2}$$