Μιγαδικοι αριθμοι

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

Ορισμος

$$i^2=-1$$

φανταστικος αριθμος είναι καθε αριθμός της μορφης $z=a\cdot i$, $a\in\mathbb{R}$

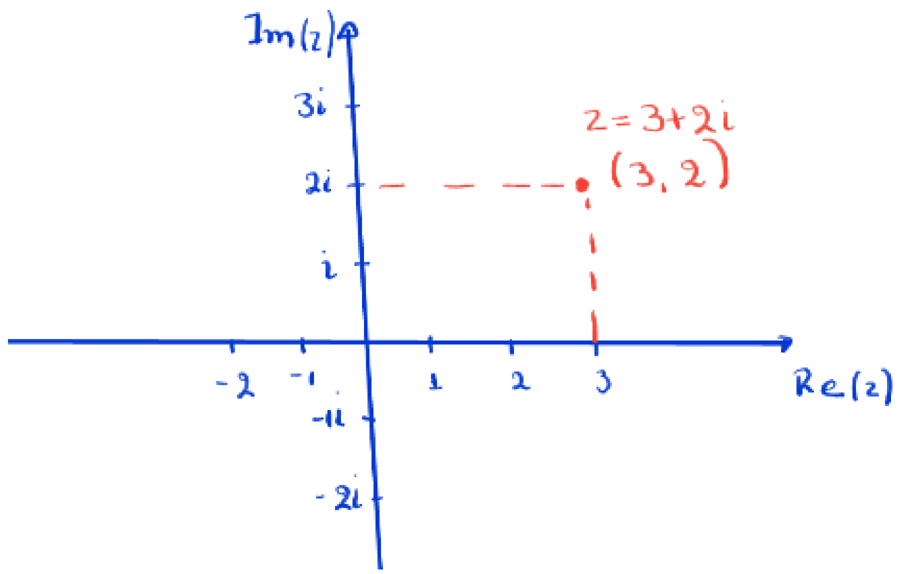
Π.χ. $2i$, $-\frac{1}{2}i$, $\sqrt{3}\,i$

μιγαδικος αριθμος είναι καθε αριθμος της μορφης

$$z=x+yi \qquad x,y\in\mathbb{R}$$

$$z=(x,y)$$

Γεωμετρικη αναπαρασταση των μιγαδικων



Ο $z=x+yi$ έχουμε $Re\,z=x$, $Im=y$

Ισοτητα

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1 + y_1 i \\ z_2 = x_2 + y_2 i \end{array}\right\} \quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \;,\; y_1 = y_2$$

Πρόσθεση μιγαδικών

$z_1 = x_1 + y_1 i \quad , \quad z_2 = x_2 + y_2 i \quad$ τότε

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

Ιδιότητες

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $z = 0 + 0i$
- υπάρχει ο αντίθετος του $z = x + yi$ και είναι $-z = -x - yi$

Πολλαπλασιασμός

$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 \cdot y_2 i^2 \quad = -1 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \end{aligned}$$

π.χ. $(2 - 3i) \cdot (4 + 2i) = 8 - 12i + 4i - 6i^2$

$$= 14 - 8i$$

Ιδιότητες

- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

- $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
- $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$
- υπαρξη της μοναδας, $z = 1 + 0i$
- υπαρξη του αντιστροφου $z^{-1} = \frac{1}{z}$, $z \neq 0 + 0i$

Διαιρεση

$z_1 = x_1 + y_1 i \qquad z_2 = x_2 + y_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)}$$

όπου $\bar{z}_2 = x_2 - y_2 i$ είναι ο συζυγης του z_2

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Πχ

$$\frac{3 - 2i}{4 + 2i} = \frac{(3 - 2i)(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{12 - 6i - 8i - 4}{4^2 + 2^2}$$

$$= \frac{8}{20} - \frac{14}{20} i = \frac{2}{5} - \frac{7}{10} i$$

Δυναμη μιγαδικου αριθμου

$z^1 = z \quad , \quad z^0 = 1$

$z^2 = z \cdot z$

$z^3 = z \cdot z^2 \quad , \quad z^{-\nu} = \frac{1}{z^{\nu}} \quad z \neq 0$

$\vdots$

$$z^{\nu} = z \cdot z^{\nu-1}$$

Παρατήρηση

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases}$$

$i^4 = 1$

$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1$

Π.χ

$i^{24} = i^0 = 1$

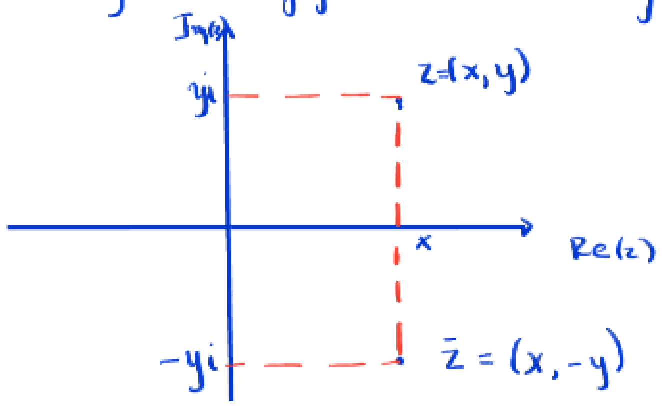
$i^{53} = i^1 = i$

$i^{100} = 1$

$i^{109} = i$

Συζυγής μιγαδικός αριθμός

$z = x + yi$ ορίζεται $\bar{z} = x - yi$ συζυγής του z



Ιδιότητες

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

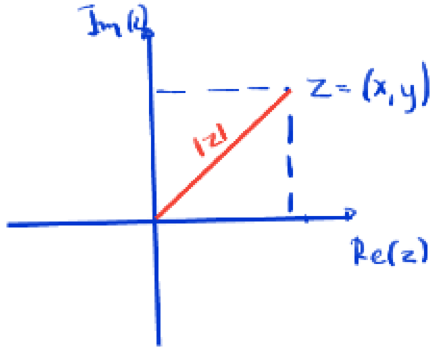
• $\overline{(z^{\nu})} = \bar{z}^{\nu}$

Μέτρο μιγαδικού

$z = x + yi$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

• $z \cdot \bar{z} = |z|^2$



π.χ. $$\left|\frac{3-2i}{7+4i}\right| = \left|\frac{(3-2i)(7-4i)}{(7+4i)(7-4i)}\right| =$$

$$= \left|\frac{13-26i}{7^2+4^2}\right| = \left|\frac{13}{65} - \frac{26}{65}i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{13}{65}\right)^2 + \left(\frac{26}{65}\right)^2} = \frac{\sqrt{845}}{65}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί ο μιγαδικός αριθμός z, όταν $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

• $$|x+yi-1| = |x+yi-2| \Rightarrow$$
$$|(x-1)+yi|^2 = |(x-2)+yi|^2$$
$$(x-1)^2 + \cancel{y^2} = (x-2)^2 + \cancel{y^2}$$
$$\cancel{x^2} - 2x + 1 = \cancel{x^2} - 4x + 4$$
$$2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- $|x+yi-1| = |x+yi-i|$

$$|(x-1)+yi|^2 = |x+(y-1)i|^2$$

$$(x-1)^2+y^2 = x^2+(y-1)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}$$

$$-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = -2y \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

Άρα $z = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

2. Να λυθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εξισώσεις

- $x^2-2x+3=0$

$$\Delta = (-2)^2-4\cdot 3 = -8$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{8i^2}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$= 1\pm\sqrt{2}\,i$$

- $x+\frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow x^2-x+1=0$

$$\Delta = (-1)^2-4 = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2} = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση : $i^\nu + i^{-\nu}$

$$\nu = 4\cdot k+\upsilon \qquad \upsilon = 0,1,2,3$$

- $\upsilon=0$, $\nu = 4k$

$$i^\nu + i^{-\nu} = 2$$

- $\upsilon = 1$, $\nu = 4k+1$

$$i^{\nu} + i^{-\nu} = i^{1} + \frac{1}{i} = \frac{i^{2}+1}{i} = 0$$

- $\upsilon = 2$, $\nu = 4k+2$

$$i^{\nu} + i^{-\nu} = i^{2} + \frac{1}{i^{2}} = -2$$

- $\upsilon = 3$ $\nu = 4k+3$

$$i^{\nu} + i^{-\nu} = i^{3} + \frac{1}{i^{3}} = -i + \frac{1}{-i}$$

$$= -i - \frac{1}{i} = +\frac{1-1}{i} = 0$$

4. Να αποδείξετε ότι $(a+bi)^{10} + (b-ai)^{10} = 0$

$$(a+bi)^{10} + \left(-i\left(a - \frac{b}{i}\right)\right)^{10} =$$

$$(a+bi)^{10} + i^{10}\left(a - (-bi)\right)^{10} =$$

$$(a+bi)^{10} + i^{2}\,(a+bi)^{10} =$$

$$(a+bi)^{10} - (a+bi)^{10} = 0$$