# Μιγαδικοί α ριθμοί

Α' Μηχανικών 2025 - 2026

# Α. Ορισμός - Βασικές Έννοιες

1. $\boxed{\text{Μιγαδικός αριθμός}}$ $z = x + iy$ ή $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, με $\sqrt{-1} = i$, εξ ορισμού είναι ο αριθμός

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = x + iy$$

- $x$ : πραγματικό μέρος του $z$
- $y$ : φανταστικό μέρος του $z$
- $\mathbb{C}$ : σύνολο μιγαδικών αριθμών

| |
|---|
| Πραγματικό μέρος του $z$, $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$ |
| Φανταστικό μέρος του $z$, $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$ |

π.χ $z = 3 - i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 3$ και $\operatorname{Im} z = -1$, όπου Re z είναι Real z και Im z, Imaginary z.

## 2. Ιδιότητες μιγαδικών αριθμών

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$

- **Ισότητα**

Δυο μιγαδικοί αριθμοί $z_1$ και $z_2$ είναι ίσοι

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \boxed{\text{και}}$$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$ αν $z_1 = x - 2yi$ και $z_2 = 3 + 4i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

- **Πρόσθεση**

Άθροισμα των $z_1$ και $z_2$, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$, δηλαδή ένας νέος μιγαδικός αριθμός

## Παράδειγμα

$z_1 = 1-3i$
$z_2 = 4+5i$

$\Rightarrow z_1+z_2 = (1+4)+(-3+5)i$
$\Rightarrow z_1+z_2 = 5+2i$

$z_1-z_2 = (1-4)+(-3-5)i \Rightarrow z_1-z_2 = -3-8i$

$z_1 = 3i = 0+3i$
$z_2 = -2+4i$

$\Rightarrow z_1-z_2 = [0-(-2)]+(3-4)i$
$= 2-i$

## Ιδιότητες πρόσθεσης

- Αντιμεταθετική : $z_1+z_2 = z_2+z_1$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- Προσεταιριστική: $z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$
  $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
- αν $z_1+\cancel{z} = z_2+\cancel{z} \Leftrightarrow z_1 = z_2$, $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

νόμος διαγραφής στο σύνολο $\mathbb{C}$

- Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός $z^* = 0+0i$, έτσι ώστε $z+z^* = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$
  Ο μιγαδικός αριθμός $0+0i$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης
- Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός $z' = (-x)+(-y)i$, έτσι ώστε αν $z = x+iy$, τότε $z+z' = 0$, ο $z'$ ονομάζεται αντίθετος του $z \in \mathbb{C}$

π.χ. $z = -3+2i \Rightarrow z' = [-(-3)] + (-2)i = 3-2i$

οπότε όπως καταλαβαίνουμε η ύπαρξη του αντιθέτου μιγαδικού αριθμού μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης, ως εξής:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, προσθέτουμε στον $z_1 \in \mathbb{C}$, τον αντίθετο του $z_2 \in \mathbb{C}$

- Πολλαπλασιασμός

$z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Θυμόμαστε $\boxed{i^2 = -1}$

π.χ. $z_1 = -3+2i$, $z_2 = 5-3i$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3+2i)\cdot(5-3i) = -15 + 9i + 10i + 6 = -9 + 19i$$

$$2i \cdot (-3i) = -6i^2 = -6(-1) = 6$$

**Ιδιότητες πολλαπλασιασμού**

- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ αντιμεταθετική
- $(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ προσεταιριστική

• επιμεριστική $z_1(z_2+z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

• Νόμος διαγραφής πολλαπλασιασμού

$z_1 \cdot z = z_2 \cdot z \Leftrightarrow z_1 = z_2$, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0+0i\}$

Μηδέν για το σύνολο $\mathbb{C}$ είναι ο μιγαδικός αριθμός με μηδενικό πραγματικό και φανταστικό μέρος $z = 0 = 0+0i$

αν $z = 0 + iy$, $y \neq 0 \Rightarrow z \neq 0$
αν $z = x + 0i$, $x \neq 0 \Rightarrow z \neq 0$

• Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού $z^* = 1+0i$

έτσι ώστε $z \cdot z^* = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$

Αν $z^* = 0 + 1i$, τότε $z = 1 + 2i$

$z \cdot z^* = 1i\,(1+2i) = 1i - 2 = -2 + i \neq z$

• Αντίστροφος μιγαδικού αριθμού

Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε, αν $z \in \mathbb{C} \setminus \{0+0i\}$ είναι $\frac{1}{z}$ και συμβολίζεται με $z^{-1} = \frac{1}{z}$. Ο αριθμός $z^{-1}$ ονομάζεται αντίστροφος του $z$

π.χ. $z = 1 - i \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{1-i}$

• Εφ' όσον για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z$ υπάρχει ο αντίστροφός του, μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της $\boxed{\text{διαίρεσης}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad \forall\, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

**Παράδειγμα**

$z_1 = 2+3i$ , $z_2 = 5-6i$, τότε

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

$$z_2 = 5-6i \Rightarrow z_2^{-1} = \frac{1}{5-6i} = \frac{(5+6i)}{(5-6i)(5+6i)} \quad *$$

## Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Με την ευκαιρία αυτή ορίζουμε τον συζυγή μιγαδικού αριθμού $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ο οποίος συμβολίζεται με $\bar{z} = x - iy$

π.χ $z = 2-3i \Rightarrow \bar{z} = 2+3i$, οπότε

$z_2 = 5-6i \Rightarrow \bar{z}_2 = 5+6i$

* Σε συνέχεια του παραδείγματος έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$, όπου $z_2 = 5-6i$ και $z_2^{-1} = \frac{1}{5-6i}$

$$z_2^{-1} = \frac{5+6i}{(5-6i)(5+6i)} = \frac{5+6i}{25+30i-30i+36} = \frac{5+6i}{61}$$

$$= \frac{5}{61} + \frac{6}{61}i$$, άρα

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (2+3i)\left(\frac{5}{61} + \frac{6}{61}i\right) = \frac{10}{61} + \frac{12}{61}i + \frac{15}{61}i - \frac{18}{61}$$

$$= -\frac{8}{61} + \frac{27}{61}i$$

## 3. Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών

### Ορισμός

Δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη ορίζονται για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς, δηλαδή:

$z^1 = z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$

$\boxed{z^{\nu} = z^{\nu-1} \cdot z}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $\nu = 2, 3, 4 \ldots$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$

Επίσης ορίζεται ότι $z^{-\nu} = \frac{1}{z^{\nu}}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, με $z \neq 0$

Ισχύει επίσης $z^0 = 1$, $z \neq 0$

- Δεν έχει έννοια στο σύνολο $\mathbb{C}$ η παράσταση $0^0$

- Δεν έχει έννοια η διάταξη μεταξύ μιγαδικών αριθμών, δηλαδή δεν ορίζεται $z_1 \gtrless z_2$, δηλαδή δεν υπάρχει η έννοια της ανισότητας στο $\mathbb{C}$

## Ιδιότητες δυνάμεων

Ισχύουν όλες οι γνωστές από τους πραγματικούς αριθμούς ιδιότητες των δυνάμεων, δηλαδή

$i^0 = 1$ , $(1-2i)^0 = 1$

$i^1 = i$ , $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ , $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1$,

Γενικά ισχύει

$$\boxed{\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \quad , \forall k \in \mathbb{Z} \\ i^{4k+2} &= -1 \end{aligned}}$$

## Παράδειγμα

$z = 2-3i$

$z^2 = (2-3i)^2 = 2^2 - 12i + (-3i)^2 = -5-12i$

$z^3 = (2-3i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 (3i) + 3 \cdot 2 \cdot (3i)^2 - (3i)^3$

$= 8 - 36i - 54 - 27i^3 = -46 - 9i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ , $27i^3 = -27i$

## 4. Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί και ιδιότητες

Όπως έχει οριστεί αν $z \in \mathbb{C}$: $z + iy$, τότε ο συζυγής του είναι $\bar{z} = x - iy$ και ισχύουν

- $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$, δηλαδή $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$,

- $z + \bar{z} = (x+iy) + (x-iy) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $x \neq 0$, άρα $\boxed{Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}}$

- $z - \bar{z} = (x+iy) + (-x+iy) = 2iy \Rightarrow$
$y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $y \neq 0$, άρα $\boxed{Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}}$

Επομένως για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x+iy$ ισχύουν $x = Re z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ και $y = Im z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
- $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

- $\overline{(z^{\nu})} = (\bar{z})^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

- $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

## 5. Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$. Τότε ορίζεται σαν μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z$, συμβολίζεται με $|z|$ ο μη αρνητικός αριθμός

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0}$$

είναι όμως $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, οπότε $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

### Παραδείγματα

1. $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

2. Να βρεθεί το $\left|\frac{1+i}{2-3i}\right|$

$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{-1+5i}{2^2+3^2} = -\frac{1}{13}+\frac{5}{13}i$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+i}{2-3i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{26}$$

3. $\left|(1+2i)^3\right|$

$$(1+2i)^3 = 1^3 + 3.1^2.2i + 3.1.(2i)^2 + (2i)^3$$

$$= 1 + 6i - 12 - 8i$$

$$= -11 - 2i$$

$$\left|(1+2i)^3\right| = \left|-11-2i\right| = \sqrt{(-11)^2+(-2)^2} = \sqrt{125}$$

# Μορφές μιγαδικών αριθμών

# 6. Μορφές μιγαδικού αριθμού

## 1. Καρτεσιανή μορφή

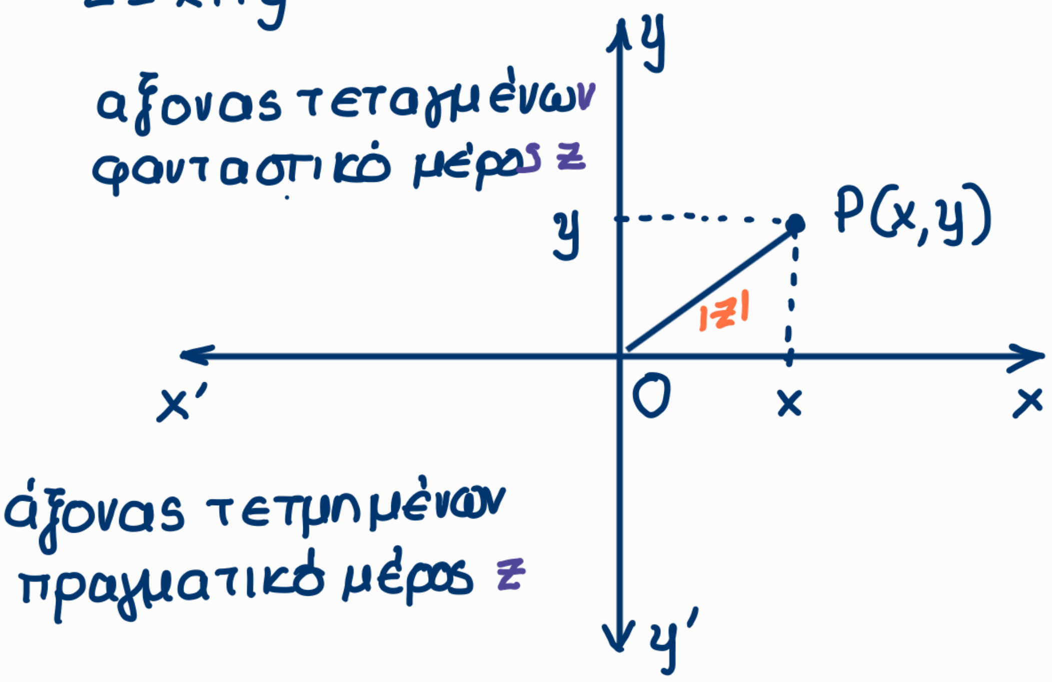
Έστω $z \in \mathbb{C}$, όπου $z = x + iy$ , $x, y \in \mathbb{R}$

x: πραγματικό μέρος — Real του $x = Re\,z$

y : φανταστικό μέρος — Imaginary του z, $y = Im\,z$

## 2. Γεωμετρική μορφή

$z = x + iy$




Ισχύει

$(OP)^2 = x^2 + y^2$

$(OP) = \sqrt{x^2 + y^2}$

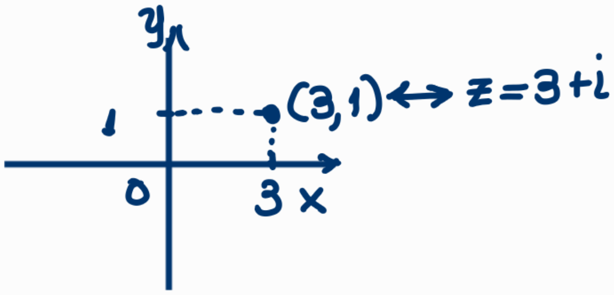
$(OP) = |z|$

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου $P(x, y)$, δηλαδή $z = x + iy \longleftrightarrow (x, y)$

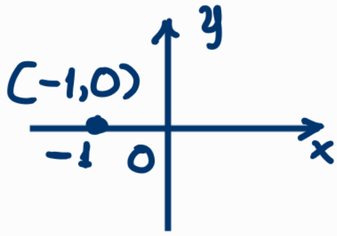
Το επίπεδο, στο οποίο παριστάνουμε γεωμετρικά όλους τους μιγαδικούς αριθμούς ονομάζεται μιγαδικό επίπεδο ή επίπεδο Gauss

## Παραδείγματα

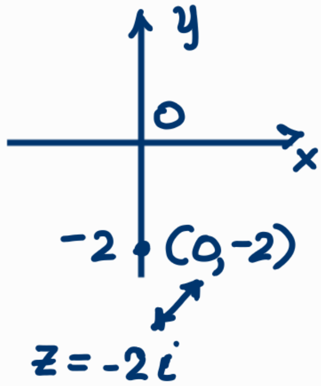
1. $z = 3+i$




2. $z=-1$

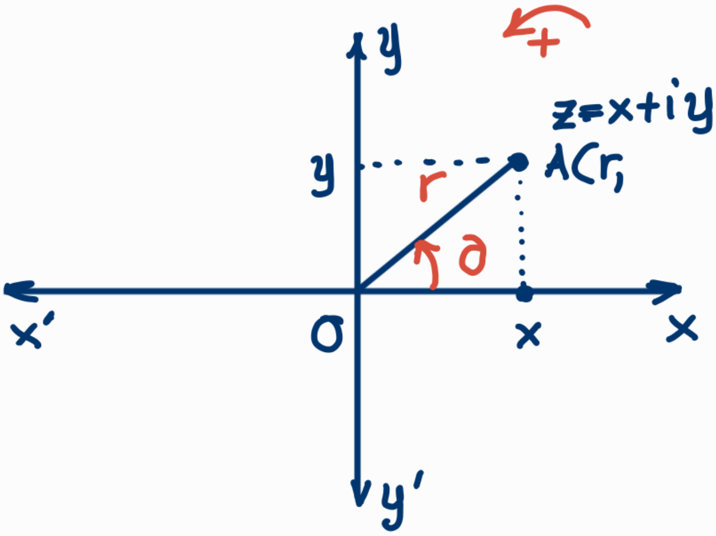



3. $z=-2i$




## 3. Τριγωνομετρική ή πολική μορφή

Έστω μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$




1. $\theta\in[0,2\pi)$
2. $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$
3. $\cos\theta=\dfrac{x}{|z|}$, $\sin\theta=\dfrac{y}{|z|}$

   $x,y\neq 0$

Επομένως για τον μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$ ισχύει

$$\left.\begin{aligned} z&=x+iy\\ x&=|z|\cos\theta\\ y&=|z|\sin\theta\end{aligned}\right| \Rightarrow z=|z|\cos\theta+i\,|z|\sin\theta$$

$$\Rightarrow z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$\boxed{\text{Τριγωνομετρική μορφή } z=|z|\,(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

Το επίπεδο που παριστάνονται οι μιγαδικοί αριθμοί με τριγωνομετρική μορφή ονομάζεται επίπεδο Argand.

- Οπότε για $z=x+iy$

$$\Downarrow$$

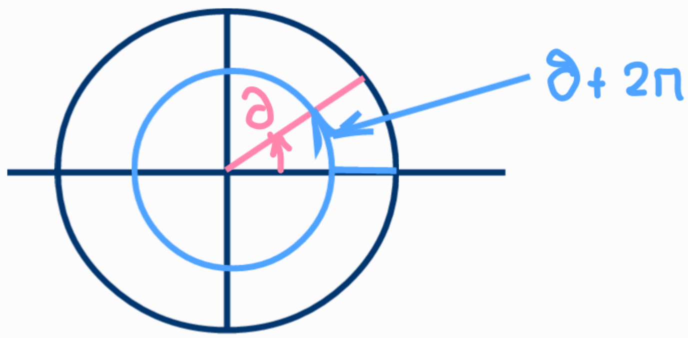
$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$\theta\in[0,2\pi)$, δηλαδή $0\leq\theta<2\pi$

- Αν η γωνία $\theta\in[0,2\pi)$, τότε ονομάζεται πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z$ και συμβολίζεται με $Argz=\theta$

- Γενικά μια οποιαδήποτε γωνία $\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ είναι ένα οποιοδήποτε όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z$ και ισχύει $arg=Argz+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

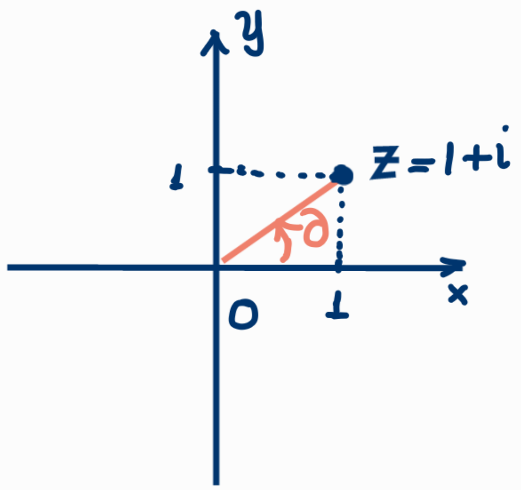
Διότι ισχύουν
$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta&=\cos(\theta+2k\pi)\\ \sin\theta&=\sin(\theta+2k\pi)\end{aligned}}$$




Παράδειγμα

Έστω $z=1+i$, να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του, το $Argz$ και $argz$.

Λύση:




$z=1+i$

$z=1+i$

- $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

- $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\operatorname{Arg}z=\frac{\pi}{4}$ , $\arg z=2k\pi+\frac{\pi}{4}$

Γενικά ισχύουν

1. Αν ο μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$, έχει

$x, y>0 \longrightarrow$ 1ο τεταρτημόριο $\Rightarrow \theta=\operatorname{Arg}z \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Αν $x<0$ και $y>0$ 2ο τεταρτημόριο

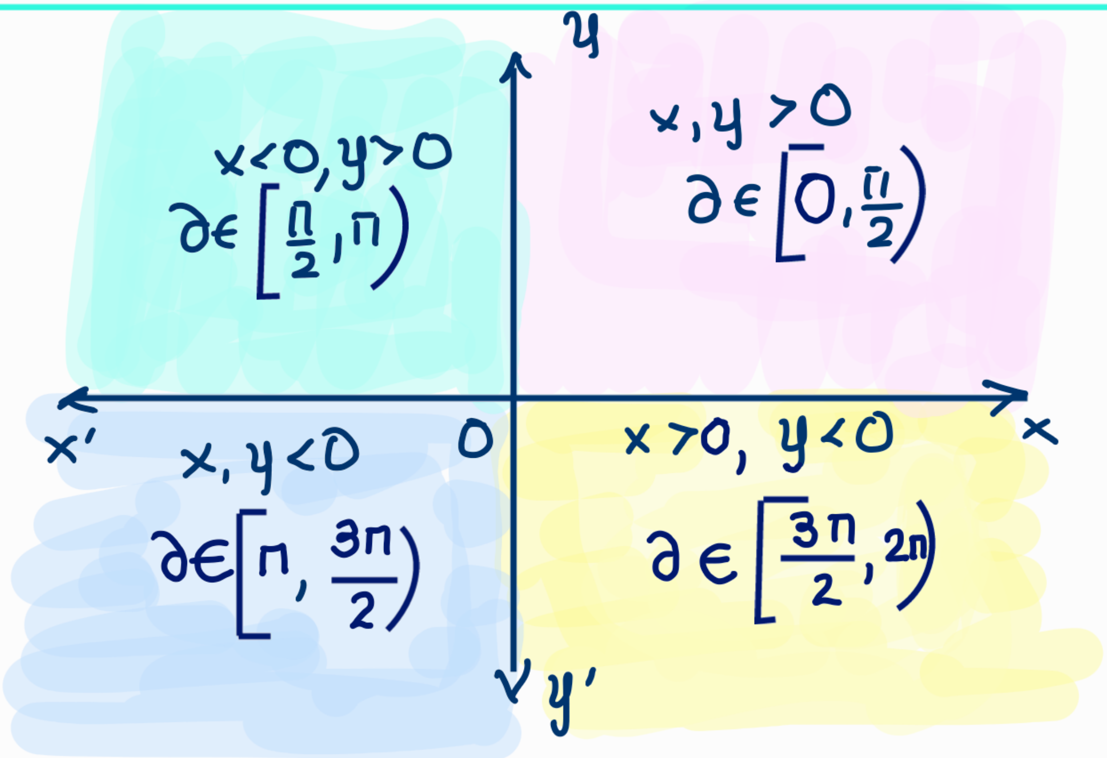
$\Rightarrow \theta=\operatorname{Arg}z \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

3. Αν $x, y < 0 \longrightarrow$ 3ο τεταρτημόριο $\Longrightarrow$

$$\theta = \operatorname{Arg} z \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

4. Αν $x > 0, y < 0 \longrightarrow$ 4ο τεταρτημόριο $\Longrightarrow$

$$\theta = \operatorname{Arg} z \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$




## 4. Εκθετική μορφή

Από την ταυτότητα του Leonhard Euler (1707 - 1783) έχουμε

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

**Απόδειξη**

$z = \cos\theta + i\sin\theta$, οπότε $|z| = |e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta|$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i^2\sin\theta + i\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = iz \rightarrow \frac{dz}{z} = i\,d\theta \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int i\,d\theta$$

$$\Rightarrow \ln z = i\theta + c \Rightarrow z = e^{i\theta + c} \; * \Rightarrow$$

Αν $z=1$, τότε $\theta=0$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = \cos 0 + i\sin 0$$

$$* \; 1 = e^{i0+c} \Rightarrow c = 0, \text{ επομένως}$$

$$\left.\begin{array}{l} z = e^{i\theta} \\ z = \cos\theta + i\sin\theta \end{array}\right| \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ξαναγυρίζοντας στην ταυτότητα του Euler πολλαπλασιάζουμε και τα μέλη με $|z|$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \xrightarrow{\cdot|z|} |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι έστω ο $z \in \mathbb{C}$:

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$, με $|z| \neq 0 \Rightarrow$ ή $x \neq 0$ ή $y \neq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Τότε κάθε μιγαδικός αριθμός $z=x+iy$ μπορεί να γραφεί σε τρεις μορφές

$z=x+iy$ καρτεσιανή

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ τριγωνομετρική

$z=|z|\cdot e^{i\theta}$ εκθετική

- Οι τρεις διαφορετικές μορφές είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

- $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, αν θέσουμε $\theta=\pi$, προκύπτει:

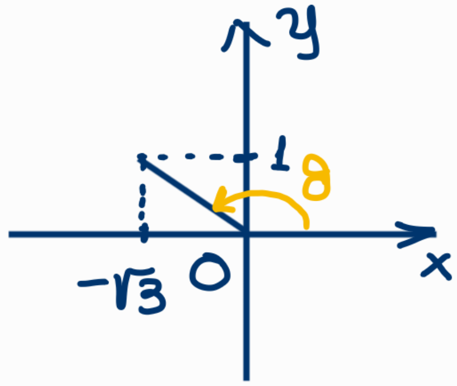
$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi \Rightarrow e^{i\pi}=-1+0 \Rightarrow$

$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$, η σχέση συνδέει τους κυριότερους αριθμούς μεταξύ τους, e, i, π, 1, 0.

## Παραδείγματα

Να βρεθούν όλες οι μορφές του μιγαδικού αριθμού $z=-\sqrt{3}+i$

1. Σχήμα $\quad z=-\sqrt{3}+i \quad , \; x=-\sqrt{3}, \; y=1$




2. $|z|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$$\cos\theta=\frac{x}{|z|}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{5\pi}{6}$$

Άρα $\mathrm{Arg}z=\frac{5\pi}{6}$, $\arg z=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

• Τριγωνομετρική μορφή $z=-\sqrt{3}+i=$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

• Εκθετική μορφή $z=|z|e^{i\theta}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left[\cos\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\ldots\ldots$$

$$= 2\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right], k\in\mathbb{Z}$$

$z(\arg z) \longrightarrow$ πλειονότιμη συνάρτηση

$z(\mathrm{Arg} z) \longrightarrow$ μονότιμη συνάρτηση

$\boxed{\text{Ιδιότητες της εκθετικής μορφής}}$

- Έχουμε ότι $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1), αν θέσουμε όπου $\theta$, το $-\theta$, παίρνουμε

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \Longrightarrow$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Longrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$$

$$(1)-(2) \Longrightarrow e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

- $\boxed{\text{Ισότητα}}$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} |z_1| = |z_2| \\ \\ \theta_1 = 2k\pi + \theta_2 \,,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

- $\boxed{\text{Γινόμενο}}$

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

Απόδειξη

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \\ z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \end{array} \right| \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

Γενικεύοντας, για ν το πλήθος μιγαδικούς $z_1, z_2 \ldots z_\nu$ έχουμε

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_\nu| \left[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu)\right]$$

Αν $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

τότε

$$\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdots |z|}_{\nu} \left[\cos(\underbrace{\theta+\theta+\cdots+\theta}_{\nu}) + i\sin(\underbrace{\theta+\theta+\cdots+\theta}_{\nu})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z^\nu = |z| \left[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)\right]}$$

Ταυτότητα de Moivre

- $z = z(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 0 \neq 0 + 0i$

$$\Rightarrow z^{-1} = z^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \Rightarrow$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

- Απόδειξη από την ταυτότητα του Euler

- $\boxed{\text{Πηλίκο}}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$z_2 \neq 0$

Απόδειξη:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = |z_1| e^{i\theta_1} \;*$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = |z_2| e^{i\theta_2} \;*, \quad z_2 \neq 0$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\theta_1} / e^{i\theta_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

## Παρατηρήσεις στον τύπο $e^{i\pi} = -1$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$ από ταυτότητα του Euler.

Ο μιγαδικός αριθμός $z = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow$

$z = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow z = -1 + i0$

$z = \cos\pi + i\sin\pi = |1|(\cos\pi + i\sin\pi)$, αν $z = 1 \Rightarrow$

$1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i \in \mathbb{R}$.

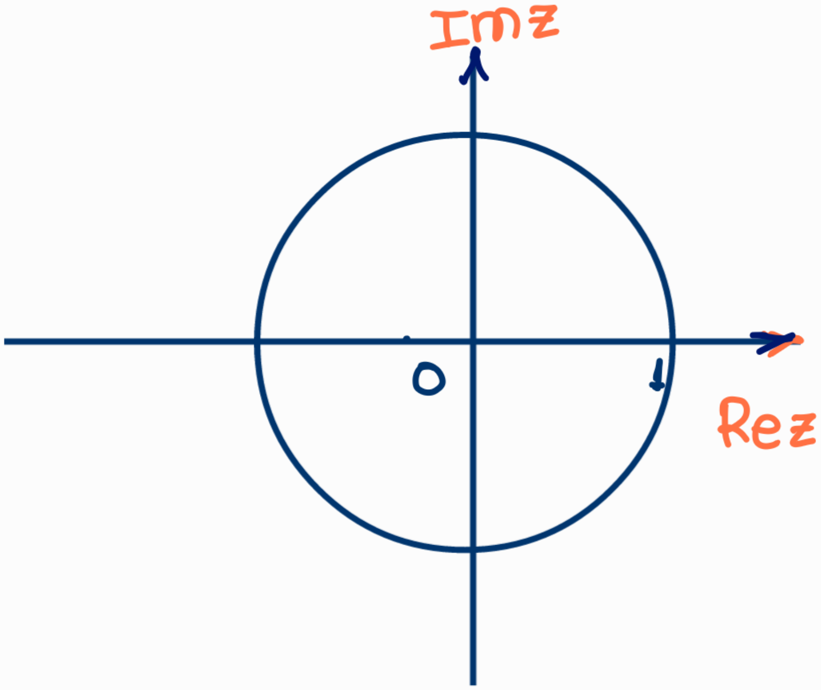
Ταυτότητα Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta = 0 \Rightarrow e^{0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$\theta = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

**Παρατηρήσεις**

- Αν $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ τότε επειδή $\theta = 2k\pi$, έχουμε $\cos 2k\pi = 1$ και $\sin\theta =$ $\sin 2k\pi = 0 \Rightarrow z = |z| \in \mathbb{R}$, άρα πραγματικός αριθμός και επιπλέον θετικός
- Αν $\theta = (2k+1)\pi \Rightarrow \cos(2k\pi + \pi) = \cos\pi = -1$ και $\sin(2k\pi + \pi) = 0$, τότε ο $z$ είναι πραγματικός και αρνητικός




$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Downarrow$

περιφέρεια κύκλου με $(0, 1)$, διότι

$\cos\theta + i\sin\theta =$

$|1|$ $\cos\theta + i\sin\theta$

$f(\theta) = e^{i\theta}$

- Επίσης, αν $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, τότε $\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow z = i\,|z|$, δηλαδή καθαρά φανταστικός με θετικό φανταστικό μέρος
- Αν $\theta = (2k\pi + 1)\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, ο $z = -i\,|z|$ οπότε καθαρά φανταστικός, με αρνητικό φαντα-

# Ρίζες μιγαδικών αριθμών

σπικό μέρος.

## 7. Ρίζες μιγαδικών αριθμών

**Ορισμός** Έστω μιγαδικός αριθμός $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ονομάζουμε ν-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού $a$, την οποία και συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{a}$ ή $a^{\frac{1}{\nu}}$, κάθε αριθμό $z \in \mathbb{C}$:

$z^\nu = a$

π.χ. $a = 1+i \Rightarrow \sqrt[3]{a} = z : \Rightarrow z^3 = 1+i$

Έστω $z = |z|e^{i\varphi}$ και $a = |a|e^{i\theta}$, τότε δεδομένου ότι $z^\nu = a \Rightarrow$

$$\left(|z|e^{i\varphi}\right)^\nu = |a|e^{i\theta} \Rightarrow |z|^\nu e^{i\nu\varphi} = |a|e^{i\theta} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |z|^\nu = |a| \\ \nu\varphi = 2k\pi + \theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |z| &= \sqrt[\nu]{|a|} \\ \varphi &= \frac{2k\pi+\theta}{\nu} \end{aligned}}$$

Οπότε εφ' όσον $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow z = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{\nu} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{\nu}\right), k \in \mathbb{Z}$$

επομένως $k = 0, 1, \ldots \nu-1$, και έχουμε

$\nu$ το πλήθος διαφορετικές ρίζες του $a \in \mathbb{C}$.

Άρα έχουμε

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right),\ k=0,1\ldots\nu-1}$$

## Ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση $z^3 = 1+i$.

**Λύση**

Ουσιαστικά θέλουμε να βρούμε τις $\sqrt[3]{1+i}$

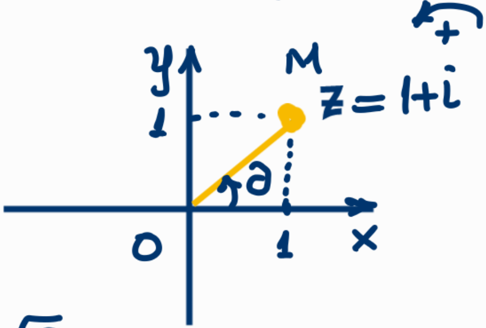
$a = 1+i$

## Μεθοδολογία

- $a = 1+i$, βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του.

$|a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$x=1,\ y=1$




$\cos\theta = \frac{x}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$a=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Άρα $z_k=\sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{\nu}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right)$,

$k=0,1,\dots \nu-1$

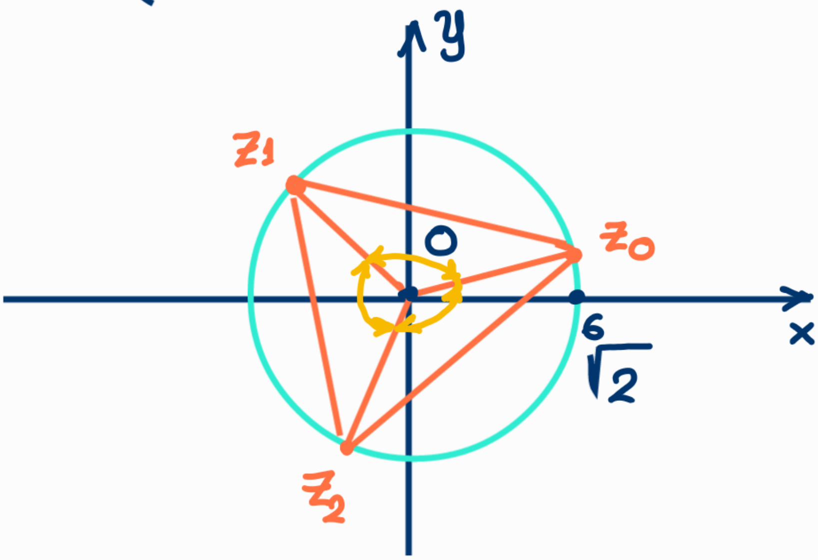
Εδώ $\nu=3 \Rightarrow k=0,1,2$. Επομένως

$\boxed{\text{για } k=0,}$ $z_0=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+0}{3}\right)$

$$\Rightarrow z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$\boxed{k=1,}$ $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)\rightarrow\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}$

$\boxed{k=2,}$ $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)\rightarrow\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}$



Οι τρεις ρίζες $z_0, z_1, z_2$ ορίζουν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Γενικά οι ν-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου $(O, \sqrt[\nu]{|a|})$ και είναι κορυφές ν-πλευρού κανονικού πολυγώνου, δηλαδή πολύγωνο που έχει τις πλευρές ίσες και τις κεντρικές γωνίες ίσες με $\dfrac{2\pi}{\nu}$

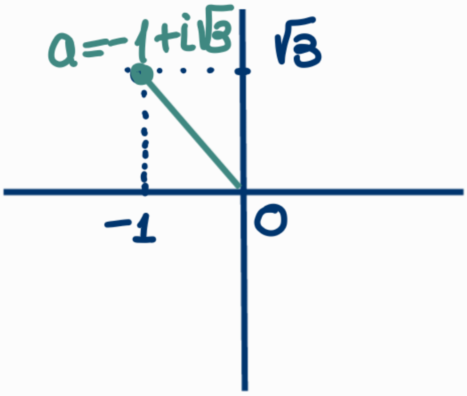
2. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$

Λύση

$a = -1 + i\sqrt{3}$

- Τριγωνομετρική

$$|a| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$




$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{y}{|a|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{|a|} = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Επομένως $a = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$|a| = 2$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

- $\nu = 2 \Rightarrow k = 0, 1$

$k=0$, $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$

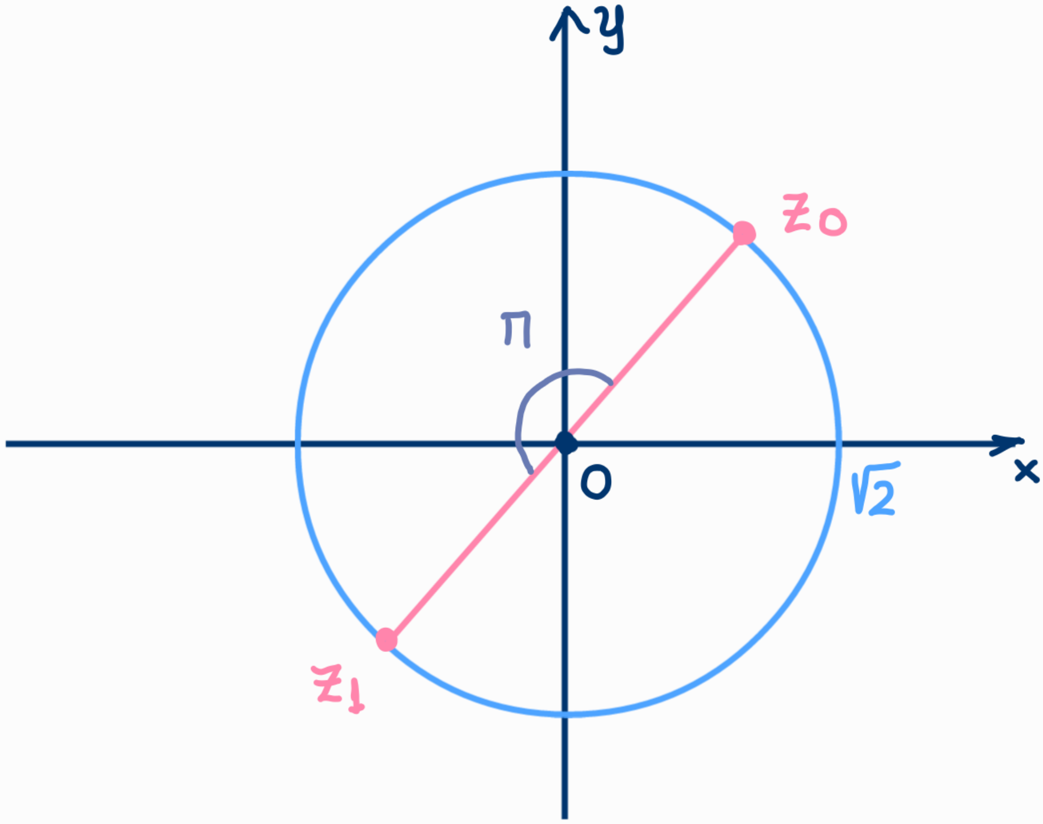
για $k=0 \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

Παρατηρούμε ότι τα ορίσματα των μιγαδικών $z_1, z_2$ που είναι οι δύο ρίζες του $\sqrt{a}$, είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ και διαφέρουν κατά $\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3} = \pi$. Επίσης αν αντικαταστήσουμε τις αντίστοιχες τιμές για τα ημίτονα και συνημίτονα στις $z_0$ και $z_1$ παίρνουμε:

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ και $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$. Τοποθετούμε τις $z_0, z_1$ στο επίπεδο $\mathbb{C}$ και προκύπτει το σχήμα:




Οι δύο ρίζες $z_0$ και $z_1$ βρίσκονται στα άκρα διαμέτρου του κύκλου $(0, \sqrt{2})$

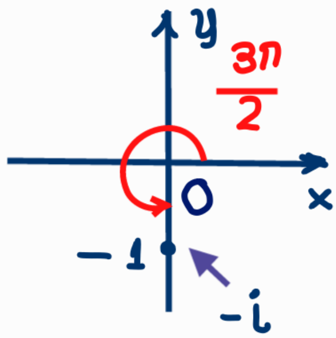
Γενικά όταν έχουμε εξίσωση της μορφής $z^v = a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, βρίσκουμε

- την τριγωνομετρική μορφή του $a \rightarrow |a|, \theta$
- εφαρμόζουμε τον τύπο εύρεσης της $v$-οστής ρίζας για $k = 0, 1, 2 \dots v-1$.

3. Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^5 = -32i$.

Λύση

- 1. Βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του $a = -32i$. Προς διευκόλυνση πράξεων βρίσκουμε την τριγωνομετρική μορφή του $-i$.




$Arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$

$|-i| = 1$ και $|a| = 32$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Άρα $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

Επομένως $a = -32i = 32\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

- 2. Εφαρμόζουμε τον γνωστό τύπο της ρίζας και έχουμε

Εφόσον $\nu = 5 \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{5} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)}$$

$$k=1 \Rightarrow \boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)} \rightarrow \frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{5}$$

$$k=2 \Rightarrow \boxed{z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}\right)}$$

$$k=3 \Rightarrow \boxed{z_3 = 2\left(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}\right)}$$

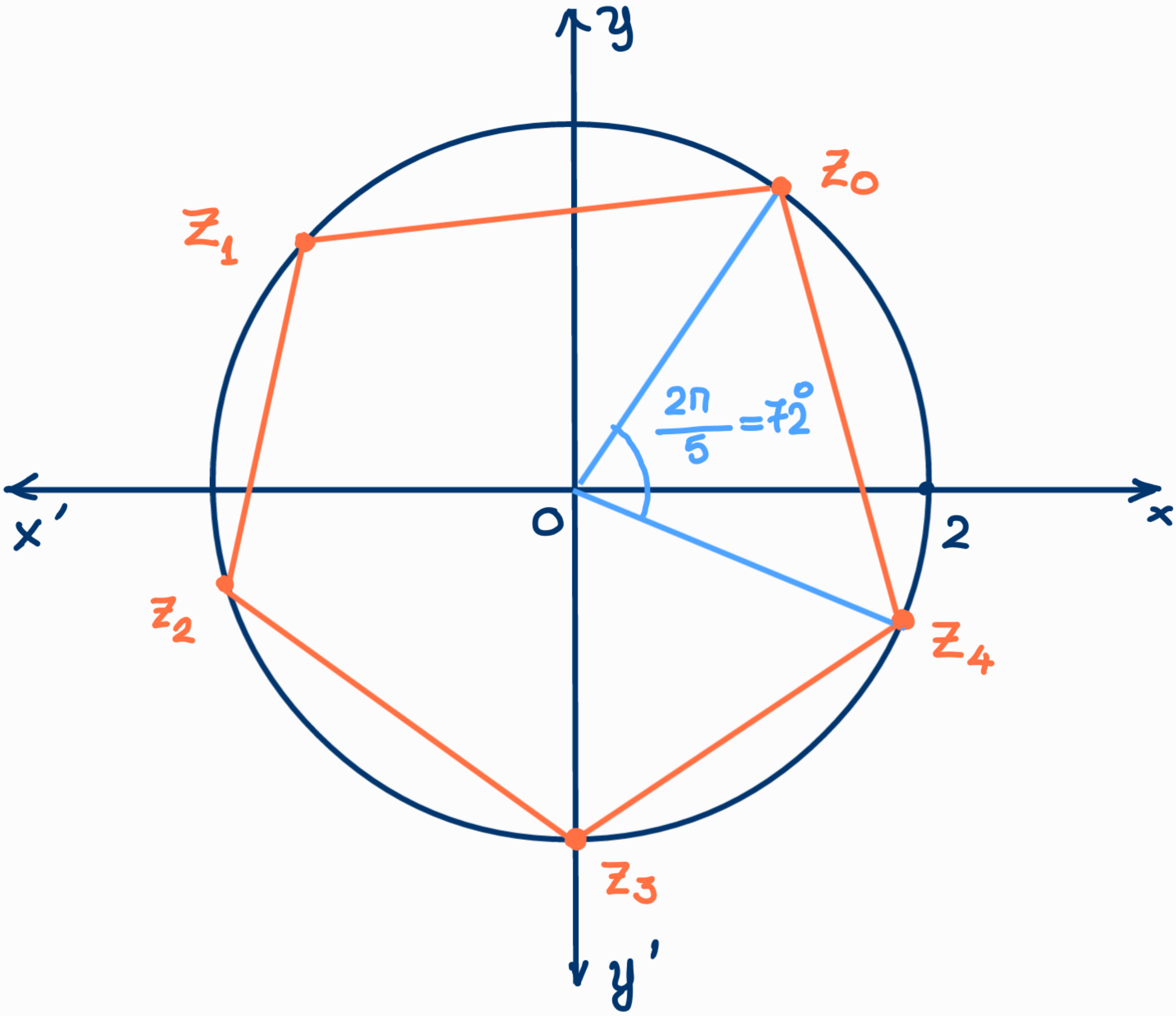
$$k=4 \Rightarrow \boxed{z_4 = 2\left(\cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}\right)}$$

Διαφορά μεταξύ ορισμάτων $\frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5} \rightarrow \frac{2\pi}{\nu}$

Οι 5 ρίζες βρίσκονται στην περιφέρεια κύκλου $(0, 2)$ και αποτελούν κορυφές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο αυτό.

Η κεντρική γωνία είναι $\frac{2\pi}{5} = 72°$

Αν τοποθετήσουμε τις ρίζες $z_0, z_1, z_2, z_3$ και $z_4$ στο μιγαδικό επίπεδο προκύπτει το επόμενο σχήμα.




Παρατηρούμε ότι οι 5 ρίζες του φανταστικού αριθμού $-32i$ είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου.

4. Να λυθεί στο σύνολο $\mathbb{C}$ η εξίσωση

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

Λύση

Αν θεωρήσουμε την εξίσωση 2ου βαθμού

της μορφής $ax^2+bx+c=0$, τότε γνωρίζουμε

ότι οι ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$ είναι της μορφής

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$ οπότε αντικαθιστώντας

$a=1$, $b=2i-3$, $c=5-i$

$$\Delta = b^2-4ac = (2i-3)^2-4(5-i)$$
$$= -4-12i+9-20+4i$$
$$= 15-8i = -16+1-8i = (4i)^2-2\cdot 4i\cdot 1+1^2$$
$$= (1-4i)^2$$

Άρα: $z_1 = \frac{-(2i-3)+(1-4i)}{2} \Rightarrow \boxed{z_1 = 2-3i}$

και αντίστοιχα, $\boxed{z_2 = 1+i}$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την $\sqrt{\Delta} =$

$\sqrt{-15-8i}$ και με τον γνωστό τρόπο, ως εξής

$z^2 = -15 - 8i$

$a = -15 - 8i \Rightarrow |a| = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = 17$

$\cos\theta = \dfrac{x}{|a|} = -\dfrac{15}{17}$ και $\sin\theta = \dfrac{y}{|a|} = -\dfrac{8}{17}$

οπότε να θεωρήσουμε το $Arg(a) = \theta$, με γνωστά

$\cos\theta$ και $\sin\theta$. $\nu = 2 \Rightarrow k = 0, 1$.

Άρα $z_k = \sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{2}\right)$

Για $k=0 \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Για $k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt{17}\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{17}\left(-\cos\dfrac{\theta}{2} - i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

$\rightarrow \boxed{z_1 = -\sqrt{17}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Εφαρμόζοντας τους γνωστούς τύπους

$\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow \cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \pm\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

Όμως επειδή ο αριθμός $a=-15-8i$ ανήκει στο 3ο τεταρτημόριο, η γωνία $\theta$ ανήκει επίσης στο 3ο τεταρτημόριο, δηλαδή $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ η γωνία $\frac{\theta}{2}$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο, άρα έχει αρνητικό συνημίτονο και θετικό ημίτονο. Συνεπώς

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{17} \quad \text{και} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

οπότε με αντικατάσταση στις $z_0$ και $z_1$ παίρνουμε ότι $z_0 = -1+4i$ και $z_1 = 1-4i$