Γραμμικα συστηματα

Επιλυση γραμμικων συστηματων με μεθοδο απαλοιφης του Gauss

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 2\\
3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1\\
x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

ηγετικο στοιχειο της 1ης γραμμης

$$
\underbrace{[\,A \mid B\,]}_{1} = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
2 & -1 & 3 & 0 & 4 & 2\\
3 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1\\
\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1\\
\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1
\end{array}
$$

επαυξημενος πινακας του συστηματος

> ηγετικο στοιχειο μιας γραμμης ειναι το πρωτο μη μηδενικο στοιχειο της γραμμης που ειναι δεξιοτερα απο το ηγετικο στοιχειο της προηγουμενης γραμμης

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0\\
0 & 1 & -1 & 4 & -2 & -2\\
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2\\
\\
\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2
\end{array}
$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \frac{1}{2}\Gamma_3 \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{κλιμακωτή μορφή}$$

5 αγνώστους − 3 εξισώσεις = 2 παράμετροι

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0$$

$$-2x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -2$$

$$\boxed{x_3 = 1 + x_4 - 2x_5}$$

$$\boxed{x_2 = -1 - 3x_4}$$

$$x_1 + 1 + 3x_4 + 1 + x_4 - 2x_5 - x_4 + x_5 = 1$$

$$\boxed{x_1 = -1 - 3x_4 + x_5}$$

Επομένως, το σύστημα έχει διπαραμετρική οικογένεια λύσεων που είναι της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1-3t+k, -1-3t, 1+t-2k, t, k)$$

$$t, k \in \mathbb{R}$$

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Άσκηση Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου k

$$x_1 + x_2 + k x_3 = 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = k$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1 \\ \sim \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 1 & -1-2k & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 0 & \boxed{-3+k} & 3-k \end{array}\right] \end{array}$$

Περίπτωση 1η $-3+k \neq 0 \Rightarrow \boxed{k \neq 3}$

· Το αντίστοιχο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + k x_3 = 2 \\ x_2 + (2-3k)x_3 = k-6 \\ (-3+k)x_3 = 3-k \Rightarrow x_3 = -1 \\ x_2 = -2k-4 = -2(k+2) \\ x_1 = 3k+6 = 3(k+2) \end{cases}$$

Επομενως, για $k \neq 3$ το συστημα έχει μοναδικη λύση:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3(k+2) \\ x_2 &= -2(k+2) \\ x_3 &= -1 \end{aligned}}$$

Περιπτωση 2η $\quad -3+k=0 \Rightarrow \boxed{k=3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3 - αγνωστοι - 2 εξισωσεις = 1 παραμετρος

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 7x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = -3 + 7x_3 \\ x_1 = 5 - 10x_3 \end{cases}$$

Επομένως, για $k=3$ το σύστημα έχει παραμετρική οικογένεια λύσεων:

$$(x_1, x_2, x_3) = (5-10t, -3+7t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Άσκηση: Να διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + \lambda y - z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 5\lambda + 1 \\ x - y + 3z &= 4\lambda + 2 \\ x - 2\lambda y + 7z &= 10\lambda - 1 \end{aligned}$$

$$[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5\lambda+1 \\ 1 & -1 & 3 & 4\lambda+2 \\ 1 & -2\lambda & 7 & 10\lambda-1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & \lambda & -1 & 1 \\
0 & 1-2\lambda & 4 & 5\lambda-1 \\
0 & -1-\lambda & 4 & 4\lambda+1 \\
0 & -3\lambda & 8 & 10\lambda-2
\end{array}\right]
\end{array}
\quad \Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3 \quad \sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & \lambda & 1 \\
0 & 4 & 1-2\lambda & 5\lambda-1 \\
0 & 4 & -1-\lambda & 4\lambda+1 \\
0 & 8 & -3\lambda & 10\lambda-2
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \\
\sim \\
\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & \lambda & 1 \\
0 & 4 & 1-2\lambda & 5\lambda-1 \\
0 & 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \\
0 & 0 & \lambda-2 & 0
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3 \\
\sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & \lambda & 1 \\
0 & 4 & 1-2\lambda & 5\lambda-1 \\
0 & 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \\
0 & 0 & 0 & \lambda-2
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Περιπτωση 1^{η} Αν $\lambda-2 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 2$

το συστημα ειναι αδυνατο

Περιπτωση 2η Αν $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$$
\begin{array}{ccc}
x & z & y
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 2 & 1 \\
0 & 4 & -3 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

3 αγνωστοι − 2 εξισωσεις = 1 παραμετρος

$$
\begin{cases}
x - z + 2y = 1 \\
4z - 3y = 9 \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{9-4z}{-3}}
\end{cases}
$$

$$x = 1 + z - 2\,\frac{9-4z}{-3}$$

$$\boxed{x = 7 - \frac{5z}{3}}$$

Επομενως, η μονοπαραμετρικη οικογενεια λυσεων ειναι $(x, y, z) = \left(7 - \dfrac{5t}{3}, \dfrac{4t-9}{3}, t\right)$ $t \in \mathbb{R}$