Πίνακες: Είδη, ιδιότητες και πράξεις

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

20 Οκτωβρίου 2023

Περιεχόμενα

Εισαγωγή στην έννοια των πινάκων: Πίνακες και γραμμικά συστήματα

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων α' βαθμού με δύο αγνώστους, π.χ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{cases}$$

χαρακτηρίζεται από τους έξι αριθμούς: 2, 3, 1, 3, -1, και 7. Ο καθένας έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή *συντελεστής του x* ή *συντελεστής του y* ή *σταθερός όρος*, και
- ανήκει ή στην *πρώτη* ή στη *δεύτερη εξίσωση*.

Το σύστημα θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

Εισαγωγή στην έννοια των πινάκων: Πίνακες και γραμμικά συστήματα (2)

Συντελεστής x	Συντελεστής y	Σταθερός όρος		
↓	↓	↓		
2	**3**	**1**	←	Της α΄ εξίσωσης
3	**-1**	**7**	←	Της β΄ εξίσωσης

- Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται <u>πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών</u> ή απλά <u>πίνακας 2×3</u>.
- Γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{Vmatrix}$$

Πίνακες σε εφαρμογές

1) Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και κατά τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα 2×3. Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ τάξης είναι 57, κτλ.

A	B	Γ	
125	82	60	Αγόρια
101	85	57	Κορίτσια

Πίνακες σε εφαρμογές (2)

2) Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. 3×5:

$$\begin{bmatrix} 128 & 205 & 316 & 107 & 156 \\ 250 & 318 & 354 & 285 & 204 \\ 400 & 389 & 425 & 376 & 158 \end{bmatrix}$$

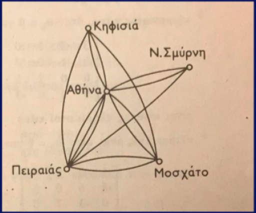
που μας πληροφορεί ότι

στο 4^{o} τμήμα της $2^{ης}$ κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες,

στο 3^{o} τμήμα της $3^{ης}$ κατηγορίας 425 εργάτες κ.τ.λ.

Πίνακες σε εφαρμογές (3)

3) Στο επόμενο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας:



Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να δοθούν και στην μορφή του επόμενου πίνακα. Σε κάθε κουτάκι σημειώνεται το πλήθος των συγκοινωνιακών συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων περιοχών της πρωτεύουσας:

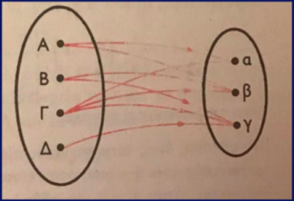
	ΑΘΗΝΑ	ΠΕΙΡΑΙΑΣ	ΜΟΣΧΑΤΟ	Ν. ΣΜΥΡΝΗ	ΚΗΦΙΣΙΑ
ΑΘΗΝΑ	0	3	2	2	2
ΠΕΙΡΑΙΑΣ	3	0	2	1	1
ΜΟΣΧΑΤΟ	2	2	0	0	1
Ν. ΣΜΥΡΝΗ	2	1	0	0	0
ΚΗΦΙΣΙΑ	2	1	1	0	0

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 5×5: $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Πίνακες σε εφαρμογές (4)

4) Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δύο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0, για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.

Π.χ. η διμελής σχέση που δίνεται με το βελοδιάγραμμα



Μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα

	α	β	γ
A	1	1	0
B	0	1	1
Γ	1	1	1
Δ	0	0	1

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 4×3 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η έννοια του πίνακα

- Γενικά κάθε ορθογώνια διάταξη μxν αριθμών ($\mu, \nu \in N^*$) σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας μxν** (matrix) και συμβολίζεται

$$A = [a_{ij}], 1 \leq i \leq \mu\,, 1 \leq j \leq \nu.$$

- Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα

λέγονται **στοιχεία** του πίνακα (elements of a matrix) .

- Το στοιχείο που ανήκει στην i -γραμμή $(1 \leq i \leq \mu)$

και j -στήλη $(1 \leq j \leq \nu)$ συμβολίζεται συνήθως a_{ij}.

- Οι θετικοί ακέραιοι μ, ν ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα.

- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\mu \times \nu$ συμβολίζεται με $\Pi_{\mu\times\nu}$.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\nu \times \nu$ συμβολίζεται με Π_{ν}.

Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Το στοιχείο α_{32} του πίνακα A είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην 3η γραμμή και τη 2η στήλη, δηλαδή ο αριθμός 8.

Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα 100×50 το στοιχείο $\alpha_{84,3}$ ανήκει στην 84η γραμμή και την 3η στήλη ενώ το $\alpha_{8,43}$ ανήκει στην 8η γραμμή και την 43η στήλη.

Η έννοια της ισότητας στο σύνολο $\Pi_{\mu\times\nu}$

Δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ ίδιου τύπου $\mu \times \nu$ είναι **ίσοι** (equal) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu, a_{ij} = \beta_{ij}}.$$

Για κάθε (∀), για όλες τις τιμές του i και για όλες τις τιμές του j τα στοιχεία του πίνακα A να είναι ίσα με τα <u>αντίστοιχα</u> στοιχεία του B.

Είδη πινάκων

- Πίνακας-**γραμμή**, όταν μ=1, (τύπου $1 \times \nu$)

  π.χ. $A = [3 \;\; -6 \;\; 7] \in \Pi_{1\times3}, B = [0 \;\; 1] \in \Pi_{1\times2}$.

- Πίνακας-**στήλη** , όταν ν=1 , (τύπου $\mu \times 1$)

  π.χ. $\Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{2\times1}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times1}$.

- Πίνακας-**στοιχείο** , όταν μ=ν=1, (τύπου 1×1)

  π.χ. *E=[-5], Z=[7], H=[0].*

Είδη πινάκων (2)

- **Τετραγωνικός (square matrix)** , όταν μ=ν , π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

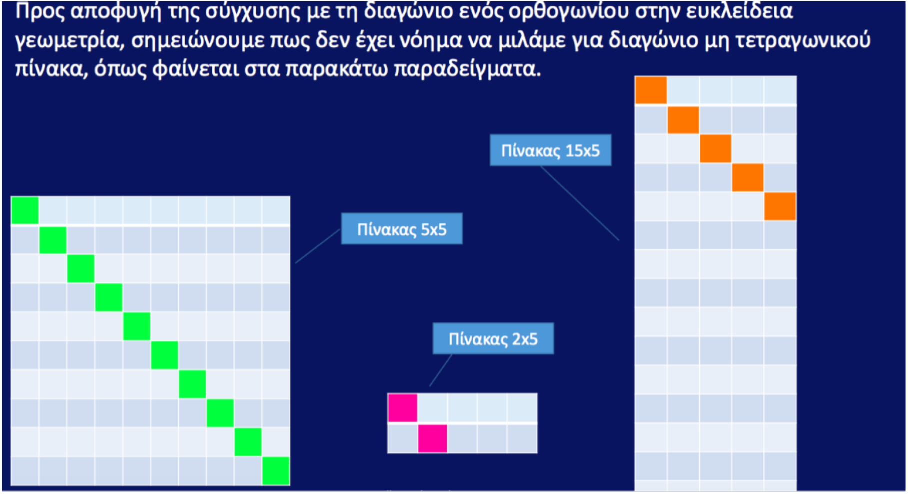
Γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

- Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται στοιχεία της **κύριας ή πρωτεύουσας διαγωνίου**
- Τα στοιχεία $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2(\nu-1)}, \ldots, \alpha_{\nu 1}$ λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου**
- Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του πίνακα A

$$\boxed{trA = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\nu\nu}}$$

Διαγώνιος πίνακα



Είδη πινάκων (3)

- **Τριγωνικός κάτω** όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και <u>όλα</u> τα στοιχεία που βρίσκονται <u>πάνω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i < j\,, \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

- **Τριγωνικός άνω** όταν είναι <u>τετραγωνικός</u> $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και <u>όλα</u> τα στοιχεία που βρίσκονται <u>κάτω</u> από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\boxed{\forall i > j\,, \alpha_{ij} = 0}$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$

Μπορεί να έχει 0 σε άλλες θέσεις, δεν είναι απαγορευτικό

Κύρια διαγώνιος

Είδη πινάκων (4)

- **Διαγώνιος** (diagonal matrix), όταν είναι τετραγωνικός $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ και ισχύει

$$\boxed{\forall\, i \neq j, 1 \leq i, j \leq \nu, \alpha_{ij} = 0}$$

Δηλαδή τετραγωνικός όπου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι όλα μηδέν.

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Συμβολίζεται:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \text{ ή } \Delta = diag(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu})$$

Σχέση διαγωνίων και τριγωνικών πινάκων

- **Παρατήρηση:**

Αν ένας πίνακας $[\alpha_{ij}]$ τύπου $\nu \times \nu$ είναι ταυτόχρονα τριγωνικός άνω και τριγωνικός κάτω, τότε θα είναι διαγώνιος πίνακας και αντίστροφα.

Ανάστροφος πίνακας

Ορισμός. Ανάστροφος (transpose) πίνακας του $A \in \Pi_{\nu\times\mu}$ (συμβ. $A^T \in \Pi_{\mu\times\nu}$) καλείται ο πίνακας που προκύπτει από τον A, αν κάνουμε τις γραμμές του στήλες και τις στήλες του γραμμές.

Παραδείγματα.

- $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \\ -11 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -11 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί πίνακες

Ορισμός. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_\nu$ καλείται συμμετρικός πίνακας, όταν $A = A^T$. Δηλαδή, ο πίνακας $A = \left[a_{ij}\right]$ είναι συμμετρικός όταν $a_{ij} = a_{ji}$.
Ορισμός. Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_\nu$ καλείται αντισυμμετρικός πίνακας, όταν $A = -A^T$. Δηλαδή, ο πίνακας $A = \left[a_{ij}\right]$ είναι αντισυμμετρικός όταν $a_{ij} = -a_{ji}$.

Δώστε παραδείγματα 3×3 συμμετρικών και αντισυμμετρικών πινάκων.

Πράξεις πινάκων: Πρόσθεση πινάκων

- Μία βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διέθετε σε ένα μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18	35	21	Στην Αθήνα
13	29	22	Στη Θεσσαλονίκη

- Και τον επόμενο μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
22	19	12	Στην Αθήνα
25	18	31	Στη Θεσσαλονίκη

- Τότε τους δύο αυτούς μήνες η βιομηχανία διέθεσε συνολικά:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18+22	35+19	21+12	Στην Αθήνα
13+25	29+18	22+31	Στη Θεσσαλονίκη

Πράξεις πινάκων: Πρόσθεση πινάκων (2)

- Η κίνηση της βιομηχανίας κάθε μήνα αλλά και συνολικά περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 21 \\ 13 & 29 & 22 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον } 1^{ο} \text{ μήνα}$$

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 12 \\ 25 & 18 & 31 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον } 2^{ο} \text{ μήνα}$$

Η κίνηση της βιομηχανίας συνολικά τους δύο μήνες:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 18+22 & 35+19 & 21+12 \\ 13+25 & 29+18 & 22+31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 54 & 33 \\ 38 & 47 & 53 \end{bmatrix} = A + B$$

- Ο πίνακας Γ λέγεται **άθροισμα των πινάκων** A και B. Γενικά ορίζουμε:

Πράξεις πινάκων: Πρόσθεση πινάκων (3)

<u>Άθροισμα</u> των $\mu \times \nu$ πινάκων $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $\Gamma = A + B = [\gamma_{ij}]$, διάστασης $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B, δηλαδή:

$$\forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

<u>Παράδειγμα</u>:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \tau ό \tau \varepsilon \ \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο $\mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}$ η πρόσθεση είναι μια εσωτερική πράξη που ορίζεται ως εξής:

$$+ : \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \times \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu} \to \mathbf{\Pi}_{\mu\times\nu}, (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \to \mathbf{A} + \mathbf{B} \coloneqq [\boldsymbol{\alpha}_{ij} + \boldsymbol{\beta}_{ij}]$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

Αντιμεταθετική: $\forall A, B \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + B = B + A$

Προσεταιριστική: $\forall A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu\times\nu}, (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

Ουδέτερο στοιχείο: $\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists\, \boldsymbol{O} \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + A = A$

Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση είναι ο μηδενικός πίνακας **O**$=(0)_{\mu\times\nu}$, που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0.

Αντίθετος Πίνακας (opposite):

$$\forall A \in \Pi_{\mu\times\nu}, \exists -A \in \Pi_{\mu\times\nu}, A + (-A) = (-A) + A = \boldsymbol{O}.$$

Ο αντίθετος πίνακας είναι ο $-A = \left(-\alpha_{ij}\right)$, που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο $-\alpha_{ij}$.

Παράδειγμα αντίθετου πίνακα

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$
- $-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
- $A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}_{2\times 3}$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Αν ο πίνακας $A = [\alpha_{ij}]$ είναι τύπου $\mu \times \nu$, ονομάζουμε **βαθμωτό γινόμενο του πραγματικού (ή μιγαδικού) αριθμού λ με τον πίνακα A ή πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα** τον πίνακα τύπου $\mu \times \nu$ τον οποίο λαμβάνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με λ. Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\lambda \cdot A$ και ισχύει ότι:

$$\boxed{\lambda \cdot A = \lambda \cdot [\alpha_{ij}] = [\lambda \cdot \alpha_{ij}]}$$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } \; 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες βαθμωτού πολλαπλασιασμού

Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$ ισχύουν:

- $\lambda \left(A + B \right) = \lambda A + \lambda B$,
- $\left(\lambda + \mu \right) A = \lambda A + \mu A$,
- $\lambda \left(\mu A \right) = \left(\lambda \mu \right) A$
- $1 \cdot A = A$,
- $0 \cdot A = \mathbb{O}_{\mu \times \nu}$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

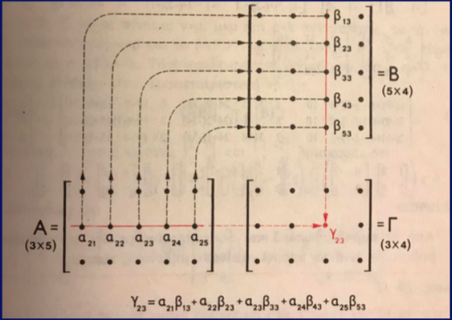
Παράδειγμα πινάκων $\underbrace{[3 \times 5] \cdot [5 \times 4]}$

Το γινόμενο

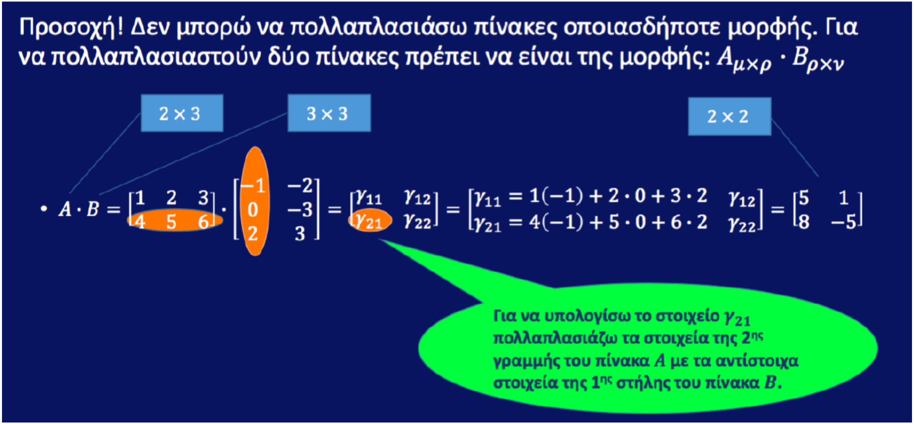
ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ τύπου 3×5

με τον πίνακα $B = [\beta_{jk}]$ τύπου 5×4

είναι ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ik}]$ τύπου 3×4



Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πινάκων



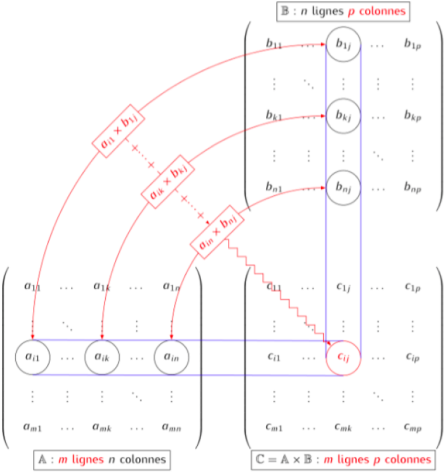
Πολλαπλασιασμός πινάκων: τυπικός ορισμός

Γινόμενο του πίνακα $A = [\alpha_{ik}]$ τύπου $\mu \times \rho$
με τον πίνακα $B = [\beta_{kj}]$ τύπου $\rho \times \nu$
λέγεται ο πίνακας $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ ο οποίος είναι τύπου $\mu \times \nu$ και
κάθε στοιχείο του είναι το άθροισμα των γινομένων των ρ στοιχείων της i-γραμμής του A με τα αντίστοιχα ρ στοιχεία της j -στήλης του B.
Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\boxed{\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{i\rho}\beta_{\rho j} = \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_{ik}\beta_{kj}}$$

Άθροισμα για k από 1 έως ρ

Αναπαράσταση σχηματισμού τυχαίου στοιχείου γινομένου πινάκων



Παρατηρήσεις στον πολλαπλασιασμό πινάκων

1) Αν ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ δεν ορίζεται αναγκαστικά το γινόμενο $B \cdot A$.

Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, το αποτέλεσμα $A \cdot B$ είναι διάστασης 1×2,

ενώ το γινόμενο $B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ δεν πραγματοποιείται!

2) Ακόμη κι αν ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ τότε δεν ισχύει πάντα $A \cdot B = B \cdot A$. Π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,

τότε $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$, διάστασης 1×1

ενώ $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 = 4 & 4 \cdot 4 = 16 \\ 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 4 = 4 \end{bmatrix}$, διάστασης 2×2!

Άρα γενικά (ακόμα κι αν οι πίνακες είναι τετραγωνικοί της ίδιας διάστασης) ισχύει $A \cdot B \neq B \cdot A$

Παρατηρήσεις στον πολλαπλασιασμό πινάκων (2)

- Στη θεωρία των πινάκων δεν αληθεύει πάντα η συνεπαγωγή

$$\text{Αν } A \cdot B = O, \text{ τότε } A = O \text{ ή } B = O.$$

- Δηλαδή, μπορεί να αληθεύει η ιδιότητα

$$A \cdot B = O \text{ με } A \neq O \text{ και } B \neq O$$

Παραδείγμα: Για $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$ ισχύει ότι

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Άρα $A \cdot B = O$.

Εξάσκηση...

- Να υπολογίσετε το γινόμενο των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Πρακτική σημασία πολλαπλασιασμού πινάκων

Για την κατασκευή **δύο ειδών γλυκισμάτων Γ_1 και Γ_2** χρειαζόμαστε τα **υλικά σε kg** που φαίνονται στον παρακάτω 2 x 3 πίνακα:

$$A=\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{Αλεύρι} & \text{Ζάχαρη} & \text{Βούτυρο} \\ \left[\begin{matrix} 1{,}2 \\ 1{,}4 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \Gamma_1 \ \text{γλύκισμα} \\ \Gamma_2 \ \text{γλύκισμα} \end{array}$$

Το **κόστος** σε δρχ. των υλικών αυτών ανά κιλό, για τα έτη 1992 και 1993, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω 3 x 2 πίνακας:

$$B=\begin{array}{cc} 1992 & 1993 \\ \left[\begin{matrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 180 \\ 200 \\ 1200 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{αλεύρι} \\ \text{ζάχαρη} \\ \text{βούτυρο} \end{array}$$

Για να βρούμε **το κόστος σε δραχμές των υλικών του γλυκίσματος Γ_1**, πολλαπλασιάζουμε τις ποσότητες των υλικών με τις αντίστοιχες τιμές και προσθέτουμε τα γινόμενα αυτά. Δηλαδή, το κόστος του Γ_1 το 1992 ήταν $1{,}2 \cdot 160 + 0{,}6 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 900 = 564$

Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται με τη **βοήθεια των πινάκων** ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 160 \\ 170 \\ 900 \end{bmatrix} = [1{,}2 \cdot 160 + 0{,}6 \cdot 170 + 0{,}3 \cdot 900] = [564].$$

Ο πίνακας 1x1 [564] λέγεται γινόμενο της πρώτης γραμμής του A επί την πρώτη στήλη του B.

Πρακτική σημασία πολλαπλασιασμού πινάκων (2)

Ανάλογα, το κόστος του $Γ_1$ το 1993 ήταν $1{,}2 \cdot 180 + 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}3 \cdot 1200 = 696$

Δηλαδή παριστάνεται με το γινόμενο της πρώτης γραμμής του Α επί την δεύτερη στήλη του Β

$$[1{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}3]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix} = [696].$$

Ομοίως, το κόστος του $Γ_2$ το 1992 ήταν: $1{,}4 \cdot 160 + 0{,}8 \cdot 170 + 0{,}4 \cdot 900 = 720$
ή σε μορφή πινάκων

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}160\\170\\900\end{bmatrix} = [720].$$

ενώ το 1993 ήταν: $1{,}4 \cdot 180 + 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 1200 = 892$ ή

$$[1{,}4 \quad 0{,}8 \quad 0{,}4]\begin{bmatrix}180\\200\\1200\end{bmatrix} = [892].$$

Πρακτική σημασία πολλαπλασιασμού πινάκων (3)

Άρα, τελικά ο πίνακας Γ δείχνει **το κόστος των δύο γλυκισμάτων κατά τα έτη 1992 και 1993**

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας Γ που προκύπτει με τον πιο πάνω τρόπο λέγεται **γινόμενο του πίνακα Α με τον πίνακα Β** και συμβολίζεται με **Α • Β** ή **ΑΒ** , δηλαδή

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 160 & 180 \\ 170 & 200 \\ 900 & 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 564 & 696 \\ 720 & 892 \end{bmatrix}.$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

- **Προσεταιριστική ιδιότητα:**

  $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$, για πίνακες $A \in \Pi_{\mu\times\rho}, B \in \Pi_{\rho\times\nu}, \Gamma \in \Pi_{\nu\times\kappa}$

- **Επιμεριστική ιδιότητα:**
- Για πίνακες κατάλληλου τύπου ισχύει

$$A \cdot (B + \Gamma) = A \cdot B + A \cdot \Gamma$$

και $(A + B) \cdot \Gamma = A \cdot \Gamma + B \cdot \Gamma$

- **Αντιμεταθετική:** Γενικά δεν ισχύει!

Μοναδιαίος πίνακας $I_\nu \in \Pi_\nu$

$$I_\nu = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ είναι διαγώνιος πίνακας και έχει τις ιδιότητες:

- $A \cdot I_\nu = I_\nu \cdot A = A, \forall A \in \Pi_\nu$
- $A \cdot I_\nu = A, \forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}$
- $I_\nu \cdot A = A, \forall A \in \Pi_{\nu \times \rho}$
- $I_\nu = [\delta_{ij}]_{\nu x \nu}$, όπου $\delta_{ij} = \delta(i,j) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ i = j \\ 0, \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker.

Η έννοια της αντιστρεψιμότητας πίνακα

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_\nu$ ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (non-singular ή invertible) αν υπάρχει πίνακας $B \in \Pi_\nu$ τέτοιος ώστε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$$

και ο B είναι ο **αντίστροφος** πίνακας του A.

Γράφουμε $B = A^{-1}$.

Σημείωση: Μιλάμε για αντίστροφο μόνο τετραγωνικού πίνακα!

Αν ο $B \in \Pi_\nu$ ικανοποιεί τη σχέση $A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$ τότε είναι **μοναδικός**!

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί αντίστροφοι πίνακες του A, ο B και ο Γ τέτοιοι ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$$

και $A \cdot \Gamma = \Gamma \cdot A = I_\nu$.

Τότε

$B \cdot (A \cdot \Gamma) = B \cdot I_\nu = B$ και $(B \cdot A) \cdot \Gamma = I_\nu \cdot \Gamma = \Gamma$.

Λόγω της προσεταιριστικής έχουμε $\boxed{B = \Gamma.}$

Ιδιότητες αντιστρόφου πίνακα

Αν οι $A, B \in \Pi_\nu$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ισχύουν:

α) $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$ β) $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

<u>Απόδειξη:</u>

α) προφανώς από ορισμό

β) $(AB) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) =$
$A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} =$
$A \cdot I_\nu \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_\nu$.

> Ο αντίστροφος του πίνακα AB είναι ο πίνακας $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Άρα ο πίνακας αυτός επί τον αντίστροφό του θα μας δώσει τον μοναδιαίο.

Και ομοίως αποδεικνύεται ότι $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = I_\nu$.

Ιδιότητες αντιστρόφου πίνακα (2)

- Δεν έχουν όλοι οι τετραγωνικοί πίνακες αντίστροφο!
- Ισχύει:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$$

- Αλλά δεν ισχύει και για την πρόσθεση...

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}$$

Ιδιότητες αντιστρόφου πίνακα (3)

- Παρατήρηση. Μπορεί να υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα A και ο αντίστροφος του πίνακα B, αλλά να μην υπάρχει ο αντίστροφος του $A + B$.
- Παράδειγμα.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{αντιστρέψιμος}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{αντιστρέψιμος}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{O}_2 \text{ (μη αντιστρέψιμος)}}$$

Ιδιότητες αναστρόφων πινάκων

Ιδιότητες. Εφόσον οι πίνακες A και B έχουν κατάλληλες διαστάσεις, ώστε να ορίζονται οι εκάστοτε πράξεις, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιοτητες:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $\left(A^T\right)^T = A$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Δυνάμεις τετραγωνικού πίνακα

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A τύπου $\nu \times \nu$ ορίζουμε τις δυνάμεις του A ως εξής:

- $A^0 = I_\nu$,
- $A^1 = A$ και
- $A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A \cdot \dots \cdot A\,, \forall n \in N^*, \mu\varepsilon\; n \geq 2.$
- Αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος ορίζουμε

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \forall n \in N^*$$

Ιδιότητες δυνάμεων τετραγωνικού πίνακα

1) $A^m \cdot A^n = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \cdot A = A^n \cdot A^m = A^{m+n}, \forall m, n \in Z.$

2) $(A^m)^n = A^{m \cdot n}, \forall\, m, n \in Z.$

3) $(\lambda \cdot A)^n = \lambda^n \cdot A^n, \forall\, n \in Z, \lambda \neq 0.$

4) $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n, \forall\, n \in Z.$

5) $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Παράδειγμα υπολογισμού δύναμης πίνακα

- $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

Αντιμεταθετικοί πίνακες

Επειδή γενικά ισχύει ότι $A \cdot B \neq B \cdot A$, εν γένει αληθεύει:

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ και $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$

Άρα αν γνωρίζουμε πως A, B αντιμεταθετικοί $(A \cdot B = B \cdot A)$

τότε ισχύουν:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

$$(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$$

Παράρτημα: Πολλαπλασιασμός πίνακα επί διάνυσμα

Παρατήρηση: Είναι πολλές φορές χρήσιμο να αντιμετωπίζουμε έναν πίνακα διάστασης $m \times n$ ως παράθεση n πλήθους πινάκων - στηλών (στοιχεία του χώρου $\Pi_{m\times 1}$) τοποθετημένοι ο ένας πλάι από τον άλλο. Πράγματι, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 2}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

όπου

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 1} \quad \text{και} \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 1}.$$

Παράρτημα: Πολλαπλασιασμός πίνακα επί διάνυσμα (σε μορφή πίνακα-στήλη)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \in \Pi_{3\times 2} \quad \text{και} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{2\times 1}$$

$$A\mathbf{x} = ?$$

Πρώτος τρόπος:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Δεύτερος τρόπος:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\Sigma_1 + 1\cdot\Sigma_2 = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Συμπέρασμα: Ο πολλαλασιασμός $A\mathbf{x}$ πίνακα με διάνυσμα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A.

Παράρτημα: Πολλαπλασιασμός διανύσματος επί πίνακα

Παρατήρηση: Είναι πολλές φορές χρήσιμο να αντιμετωπίζουμε έναν πίνακα διάστασης $m \times n$ ως παράθεση m πλήθους πινάκων - γραμμών (στοιχεία του χώρου $\Pi_{1\times n}$) τοποθετημένοι ο ένας κάτω από τον άλλο. Πράγματι, ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \in \Pi_{2\times 4}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$B = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix},$$

όπου $\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 4}$ και $\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 4}$.

Παράρτημα: Πολλαπλασιασμός διανύσματος (σε μορφή πίνακα-γραμμή) επί πίνακα

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 2} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 4}$$

$$\mathbf{x}B = ?$$

Πρώτος τρόπος:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}B &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & 3\cdot 5 + (-2)\cdot 7 & 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \in \Pi_{1\times 4} \end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} &= 3\Gamma_1 + (-2)\Gamma_2 \\ &= 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 15 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -14 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Ο πολλαλασιασμός $\mathbf{x}B$ διανύσματος με πίνακα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του B.

Ασκήσεις

1. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.
    i. Να δείξετε ότι $A^2 = -B^2 = I_2$, $A^2 + B^2 = \mathbb{O}_2$.
    ii. Να δείξετε ότι $AB + BA = I_2$.
    iii. Να υπολογιστούν οι ποσότητες $(A+B)^2$ και $A^2 + 2AB + B^2$. Τι παρατηρείτε;
2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x & y \end{bmatrix}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $AB = BA$, να προσδιοριστεί ο πίνακας B.
3. Αν $A^3 + A^2 + A + I = \mathbb{O}$, να βρεθεί ο αντίστροφος του τετραγωνικού A, εφόσον αντιστρέφεται.
4. Αν $A = P\Delta P^{-1}$, όπου A, P, Δ τετραγωνικοί πίνακες, να δειχθεί ότι $A^n = P\Delta^n P^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.
5. Αν $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, να δειχθεί ότι
$$A^2 - (\alpha + \delta) A + (\alpha\delta - \beta\gamma) I = \mathbb{O}.$$