Ορίζουσες

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

16 Νοεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Εισαγωγή στην έννοια της ορίζουσας

Η έννοια της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα

Η ορίζουσα (determinant) ενός τετραγωνικού πίνακα είναι μία απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό $n \times n$ πίνακα A έναν πραγματικό αριθμό που θα συμβολίζουμε

$$|A| \qquad \text{ή} \qquad \det(A).$$

Δηλαδή,

$$A \in \Pi_n \longrightarrow |A| \in \mathbb{R}.$$

- Οι εφαρμογές της ορίζουσας στα μαθηματικά (αναλυτική γεωμετρία, μαθηματική ανάλυση, βελτιστοποίηση κλπ.) είναι ανεξάντλητες.
- Η έννοια της ορίζουσας βρίσκει ωστόσο την βασική της εφαρμογή στην εξακρίβωση της αντιστρεψιμότητας κάποιου τετραγωνικού πίνακα A.
- Μάλιστα, όπως θα δούμε, η ορίζουσα έχει οριστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να λαμβάνει μηδενική τιμή ακριβώς όταν ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται:

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \text{ Ο πίνακας } A \in \Pi_n \text{ δεν είναι αντιστρέψιμος.}$$

- Συνεπώς, αποτελεί κριτήριο αντιστρεψιμότητας ενός πίνακα και εφαρμόζεται συχνότατα στην μελέτη τετραγωνικών συστημάτων, προκειμένου να εξακριβωθεί κατά πόσον τα συστήματα αυτά έχουν μοναδική λύση ή όχι.

Αξιώματα ορίζουσας

- Υπάρχουν δύο τρόποι να προσεγγίσει κανείς το αντικείμενο της ορίζουσας.
- 1ος τρόπος: Θα μπορούσε κανείς να ορίσει την ορίζουσα με τον υπολογιστικό της τύπο (σε σχέση με τα στοιχεία του εν λόγω πίνακα). Ωστόσο, ο τύπος αυτός έχει μία ιδιαίτερη πολυπλοκότητα και δεν επιτρέπει σε κάποιον να αντιληφθεί γιατί η ορίζουσα έχει ακριβώς την επιθυμητή ιδιότητα:

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \text{ Ο πίνακας } A \in \Pi_n \text{ δεν είναι αντιστρέψιμος.}$$

- Επιπλέον, από μίαν άλλη σκοπία, ο τύπος αυτός είναι περιορισμένης χρησιμότητας, καθώς ουδέποτε χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό μίας ορίζουσας στην πράξη(!).
- 2ος τρόπος: Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι να ξεκινήσει κανείς ορίζοντας την έννοια της ορίζουσας μέσω κάποιων αξιωμάτων (απαιτήσεων) που χρησιμοποιούν την έννοια των γραμμοπράξεων, βάσει των οποίων αποδεικνύονται 10 συνολικά βασικές ιδιότητες που πρέπει να πληρεί η ορίζουσα.
- Οι ιδιότητες αυτές δείχνουν στην ουσία ότι ο υπολογισμός μίας ορίζουσας $|A|$ ανάγεται στην αναγωγή του πίνακα A σε κάποιαν αντίστοιχη κλιμακωτή μορφή (ακριβέστερα, άνω τριγωνική, εφόσον αναφερόμαστε σε τετραγωνικό πίνακα). Όπως θα δούμε, ο υπολογισμός μίας ορίζουσας εκφυλίζεται στον υπολογισμό του γινομένου των αντίστοιχων pivots (θυμηθείτε ότι σε κάποιον μη αντιστρέψιμο πίνακα, η αντίστοιχη αναγωγή Gauss θα οδηγήσει σε μηδενική γραμμή, οπότε το αντίστοιχο γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων μίας κλιμακωτής μορφής θα είναι κατ'ανάγκην μηδενικό).
- Αυτός είναι και ο τρόπος υπολογισμού ορίζουσας που υλοποιείται από οποιοδήποτε σχετικό υπολογιστικό λογισμικό στην πράξη...

  Ακολούθως, θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τις ιδιότητες αυτές, προκειμένου να προσδιορίσει τον περίπλοκο εκείνον τύπο που ικανοποιεί η ορίζουσα (προηγούμενη προσέγγιση).
- Στις σημειώσεις αυτές, πρόκειται να ακολουθήσουμε την δεύτερη πορεία.
- Επίσης, σε πολλές εφαρμογές με το χέρι, αλλά και για θεωρητικούς σκοπούς, παρουσιάζουμε μία έκφραση που συνδέει την ορίζουσα ενός πίνακα με εκείνες υποπινάκων χαμηλότερης διάστασης (ανάπτυγμα ορίζουσας κατά Laplace).

Ορισμός ορίζουσας με χρήση αξιωμάτων και ιδιότητες

Αξιώματα ορίζουσας

Ορισμός.
Ορίζουσα καλείται μία απεικόνιση $\det : \Pi_n \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. $\det(I_n) = 1$, για κάθε διάσταση $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Μετάθεση δύο γραμμών ενός πίνακα $(\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j) \longrightarrow$ Αλλαγή προσήμου ορίζουσας.
3. Η ορίζουσα συμπεριφέρεται ως γραμμική συνάρτηση κάθε γραμμής του πίνακα ξεχωριστά:

3α. Ομογενής. $\begin{vmatrix} t \cdot \mathbf{a_{11}} & \cdot & t \cdot \mathbf{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \cdot & \mathbf{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$

3β. Προσθετική. $\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} + b_1 & \cdot & \mathbf{a_{1n}} + b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \cdot & \mathbf{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & \cdot & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!!!

Αξιώματα ορίζουσας

Ορισμός.
Ορίζουσα καλείται μία απεικόνιση $\det : \Pi_n \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. $\det(I_n) = 1$, για κάθε διάσταση $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Μετάθεση δύο γραμμών ενός πίνακα ($\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$) $\longrightarrow$ Αλλαγή προσήμου ορίζουσας.
3. Η ορίζουσα συμπεριφέρεται ως γραμμική συνάρτηση κάθε γραμμής του πίνακα ξεχωριστά:

3α. Ομογενής. $\begin{vmatrix} t\cdot a_{11} & \cdot & t\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$

3β. Προσθετική. $\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & \cdot & a_{1n}+b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & \cdot & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$!!!

Παραδείγματα: Προς το παρόν, μπορεί να μη γνωρίζουμε να υπολογίζουμε μία ορίζουσα, αλλά γνωρίζουμε π.χ., ότι:

$$\text{Ιδιότητα 2: } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\det(I_2) = -1.$$

$$\text{Ιδιότητα 2: } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{=} - \left(- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \det(I_3) = 1.$$

Παρατήρηση: Δηλαδή, ήδη γνωρίζουμε τις ορίζουσες όλων των λεγόμενων πινάκων μετάθεσης (προκύπτουν από αντίστοιχη μετάθεση των γραμμών (στηλών) του μοναδιαίου πίνακα αντίστοιχης διάστασης). Παρατηρείστε πώς οι πίνακες αυτοί επενεργούν επί κάποιου διανύσματος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z & x \end{bmatrix}$$

Ορισμός.
Ορίζουσα καλείται μία απεικόνιση $\det : \Pi_n \longrightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

1. $\det(I_n) = 1$, για κάθε διάσταση $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Μετάθεση δύο γραμμών ενός πίνακα $(\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j) \longrightarrow$ Αλλαγή προσήμου ορίζουσας.
3. Η ορίζουσα συμπεριφέρεται ως γραμμική συνάρτηση κάθε γραμμής του πίνακα ξεχωριστά:

3α. Ομογενής. $$\begin{vmatrix} t \cdot a_{11} & \cdot & t \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3β. Προσθετική. $$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & \cdot & a_{1n} + b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & \cdot & b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdot & \cdot a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!!!

Παραδείγματα: Προς το παρόν, μπορεί να μη γνωρίζουμε να υπολογίζουμε μία ορίζουσα, αλλά γνωρίζουμε π.χ., ότι:

Ιδιότητα 2: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2}{=} - \left(- \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητα 3α: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ιδιότητα 3β: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 + 8 & 2 + 6 & 0 + 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Quiz: Αν $A \in \Pi_n$, τότε $\det(-A) = ?$, $\det(2A) = ?$.

Ορισμός.

1. $\det(I_n) = 1$, για κάθε διάσταση $n \in \mathbb{N}_+$.
2. Μετάθεση δύο γραμμών ενός πίνακα ($\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$) $\longrightarrow$ Αλλαγή προσήμου ορίζουσας.
3. Η ορίζουσα συμπεριφέρεται ως γραμμική συνάρτηση κάθε γραμμής του πίνακα ξεχωριστά.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 1-3 του ορισμού της ορίζουσας, μπορούμε να αποδείξουμε τις ακόλουθες ιδιότητες που υποδεικνύουν τελικά μία μέθοδο για τον υπολογισμό της ορίζουσας (ως γινόμενο των αντίστοιχων οδηγών στοιχείων):

4. Πίνακας A με δύο ταυτιζόμενες γραμμές $\longrightarrow$ $\det(A) = 0$.
5. Γραμμοπράξη $\Gamma_i \to \Gamma_i + \ell \cdot \Gamma_j$ (πρόσθεση σε μία γραμμή κάποιου πολλαπλασίου κάποιας άλλης γραμμής) $\longrightarrow$ Δεν μεταβάλλει την ορίζουσα.
6. Πίνακας A με μηδενική γραμμή $\longrightarrow$ $\det(A) = 0$.
7. Αν $A = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ & d_2 & * & \cdots & * \\ & & d_3 & \cdots & * \\ & & & \ddots & * \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$ (άνω τριγωνικός-κλιμακωτή μορφή) $\longrightarrow$ $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$.
8. $|A| = 0 \Leftrightarrow$ Ο πίνακας $A \in \Pi_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος.
9. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
10. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

4. Πίνακας A με δύο ταυτιζόμενες γραμμές $\longrightarrow \det(A) = 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα

4. Πίνακας A με δύο ταυτιζόμενες γραμμές $\longrightarrow \det(A) = 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Σκιαγράφηση απόδειξης:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (2)

5. Γραμμοπράξη $\Gamma_i \to \Gamma_i + \ell \cdot \Gamma_j$ (πρόσθεση σε μία γραμμή κάποιου πολλαπλασίου κάποιας άλλης γραμμής) $\longrightarrow$ Δεν μεταβάλλει την ορίζουσα.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 2}}{=} (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 2}}{=} (-2) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=} 0$$

Ήδη μπορούμε και υπολογίζουμε απλές ορίζουσες χωρίς καν τύπο...

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (2)

5. Γραμμοπράξη $\Gamma_i \to \Gamma_i + \ell \cdot \Gamma_j$ (πρόσθεση σε μία γραμμή κάποιου πολλαπλασίου κάποιας άλλης γραμμής) $\longrightarrow$ Δεν μεταβάλλει την ορίζουσα.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 2}}{=} (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 2}}{=} (-2) \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 4}}{=} 0$$

Ήδη μπορούμε και υπολογίζουμε απλές ορίζουσες χωρίς καν τύπο...

Σκιαγράφηση απόδειξης (χρησιμοποιώντας ως υπόδειγμα την πρώτη ισότητα παραπάνω):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 - 2 \cdot 1 & 4 - 2 \cdot 2 & 4 - 2 \cdot 3 & 4 - 2 \cdot 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 3β}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Ιδιότητα 3α} \\ \text{Ιδιότητα 4}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}}_{=0}$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (3)

6. Πίνακας A με μηδενική γραμμή $\longrightarrow \det(A) = 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (3)

6. Πίνακας A με μηδενική γραμμή $\longrightarrow \det(A) = 0$.

Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Σκιαγράφηση απόδειξης: Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (άρα και για $t \neq 1$), έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t \cdot 0 & t \cdot 0 \\ c & d \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow (t-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (4)

7. Αν $A = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ & d_2 & * & \cdots & * \\ & & d_3 & \cdots & * \\ & & & \ddots & * \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$ (άνω τριγωνικός-κλιμακωτή μορφή) $\longrightarrow \det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$.

Παράδειγμα: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3) = 6.$

Στρατηγική: Τροπή πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και πολλαπλασιασμός διαγώνιων στοιχείων για υπολογισμό ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{=}{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{=}{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_4 - 3\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \underset{=}{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_4 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{=}{\text{Ιδιότητα 7}} \; 1 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 0 = 0.$$

Ήδη έχουμε αναπτύξει μία πολύ δυνατή μέθοδο για τον υπολογισμό οποιασδήποτε ορίζουσας!
Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται και στην πράξη από τα διάφορα λογισμικά.

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (5)

7. Αν $A = \begin{bmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ & d_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & d_n \end{bmatrix}$ (άνω τριγωνικός-κλιμακωτή μορφή) $\longrightarrow \det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$.

- Σκιαγράφηση απόδειξης: Υποθέτοντας ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μη μηδενικά (άρα, οδηγά στοιχεία), μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Jordan για να τρέψουμε (με γραμμοπράξεις) τον άνω τριγωνικό πίνακα A σε διαγώνιο (καθιστώντας κάθε διαγώνιο στοιχείο μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει):

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ & d_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & d_n \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 5}}{=} \begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 3α}}{=} d_1 \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ιδιότητα 3α}}{=} d_1 \cdot d_2 \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδιότητα 3α}}{=} d_1 \cdots d_n \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= d_1 \cdots d_n \cdot \det(I_n) \overset{\text{Ιδιότητα 1}}{=} d_1 \cdots d_n \cdot 1 = d_1 \cdots d_n.$$

- Από την άλλη, αν κάποιο διαγώνιο στοιχείο=0, η μέθοδος της απαλοιφής, θα οδηγήσει σε μηδενισμό ολόκληρης της γραμμής, οπότε η ορίζουσα είναι μηδενική από την Ιδιότητα 6 (μηδενική γραμμή). Και στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να πούμε ότι η ορίζουσα δίνεται από $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n = 0$.

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (6)

8. $|A| = 0 \Leftrightarrow$ Ο πίνακας $A \in \Pi_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: A μη αντιστρέψιμος $\rightarrow$ Γραμμοπράξεις (Ιδιότητα 5) $\rightarrow$ Μηδενική γραμμή (Ιδιότητα 4).

A αντιστρεψιμος $\rightarrow$ Γραμμοπράξεις (Ιδιότητα 5) $\rightarrow$ U (Ιδιότητα 4) $\rightarrow$ D (Ιδιότητα 7) $det(A) = \pm d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$.

Περίπτωση 2×2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{a \neq 0}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} b \end{vmatrix} = a\left(d - \frac{c}{a} b\right) = ad - bc.$$

Αν $a = 0 \rightarrow$ Μετάθεση γραμμών

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \overset{c \neq 0}{=} -\begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{a}{c} d \end{vmatrix} = -c\left(b - \frac{a}{c} d\right) = ad - bc.$$

Αν επιπλέον $c = 0 \rightarrow$ Μηδενική στήλη $\rightarrow$ A μη αντιστρέψιμος $\rightarrow$ $det(A) = 0$.

Παρατηρείστε ότι ήδη έχουμε αποδείξει έναν τύπο για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα 2×2 κατευθείαν με χρήση των στοιχείων του πίνακα.

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (7)

9. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Άνευ σχολίων περί απόδειξης...

Σχόλια/Παρατηρήσεις:

- $\det(A^{-1}) = ?$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (7)

9. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Άνευ σχολίων περί απόδειξης...

Σχόλια/Παρατηρήσεις:

- $\det(A^{-1}) = ?$
  Προφανώς, από Ιδιότητα 8, αφού A αντιστρέψιμος, έχουμε $\det(A) \neq 0$ και
  $$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow 1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$
  $$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$$
- Η ιδιότητα αυτή είναι ήδη γνωστή για διαγώνιους πίνακες. Π.χ.:
  $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
  με $\det(A) = 2 \cdot (-3) = -6$ και $\det(A^{-1}) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$.

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (8)

9. $\mathbf{det}\,(AB) = \mathbf{det}\,(A)\,\mathbf{det}\,(B)$.

Σχόλια/Παρατηρήσεις:

- $\det(A^{\mathbf{2}}) = ?$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα (8)

9. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Σχόλια/Παρατηρήσεις:

- $\det(A^2) = ?$

  Προφανώς, από Ιδιότητα 9, $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2$.

- ΠΡΟΣΟΧΗ (υπενθύμιση): $\det(2A) = 2^n \det(A)$!!!!

- $\det(A^n) = \det(A)^n$.

  Απόδειξη με επαγωγή στο n.

  Έχουμε ήδη δείξει την βάση της επαγωγής $n = 2$.

  Υποθέτουμε ότι η δοσμένη ισχύει για $n = k$, δηλαδή: $\det(A^k) = \det(A)^k$.

  Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή: $\det(A^{k+1}) = \det(A)^{k+1}$.

$$\det(A^{k+1}) = \det(A \cdot A^k) = \det(A) \cdot \det(A^k) \overset{\text{Επαγωγική υπόθεση}}{=} \det(A) \cdot \det(A)^k = \det(A)^{k+1}.$$

- Παράδειγμα:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{100}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^{100} = 1^{100} = 1.$$

Ιδιότητες ορίζουσας: Σχόλια, αποδείξεις και παραδείγματα

10. $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.

Σχόλια/Παρατηρήσεις:

- Σημαντική συνέπεια: Όλες οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν και για ΣΤΗΛΕΣ!!! Ενδεικτικά,

$$\text{Περίπτωση } 2\times 2: \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\text{Μηδενική στήλη:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{Κάτω τριγωνικός:} \quad \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ -5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 10\cdot 5\cdot 9 = 450,$$

$$\text{Ομογενής ως προς στήλες και ταυτιζόμενες στήλες:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{“Στηλο”-πράξεις:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - 2\cdot\Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 4-2\cdot 1 & -5 \\ 3 & 1-2\cdot 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \end{vmatrix} \underset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 2\beta & 2\gamma & 2\delta \\ 0 & 0 & 2\gamma & 2\delta \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \cdot 2\beta \cdot 2\gamma \cdot (-2\delta)$$

$$= -8\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 2. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda+\beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda+\gamma \end{vmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 2. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda+\beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda+\gamma \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \lambda+\beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \lambda+\gamma \end{vmatrix} \overset{\substack{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_3 \\ \Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ -\lambda & -\lambda & \lambda+\gamma \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & -\lambda & \lambda+\gamma+\alpha \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda+\gamma+\alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda+\gamma+\alpha+\beta) = \lambda^2(\lambda+\gamma+\alpha+\beta).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 3. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 3. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y-x & z \\ yz & zx-yz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0(x-y) & 1 \\ x & (-1)(x-y) & z \\ yz & z(x-y) & xy \end{vmatrix} =$$

$$= (x-y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & -1 & z \\ yz & z & xy \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1}{=} (x-y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & z-x \\ yz & z & xy-yz \end{vmatrix} =$$

$$= (x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 \\ yz & z & -y \end{vmatrix} \overset{\Sigma_3 \to \Sigma_3 + \Sigma_2}{=} (x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ yz & z & z-y \end{vmatrix} =$$

$$= (x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ yz & z & z-y \end{vmatrix} = (x-y)(z-x)\left[1 \cdot (-1) \cdot (z-y)\right] = (x-y)(z-x)(z-y).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 4. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 4. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1+\beta^2 & \beta & 1 \\ 1+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma-\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ \gamma+\alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{=} -(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} \gamma+\alpha & 1 & 0 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{=} (\alpha-\beta)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} \gamma-\beta & 0 & 0 \\ \beta+\alpha & 1 & 0 \\ 1+\alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 5. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 5. Με τη χρήση των ιδιοτήτων των οριζουσών, να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4}{=} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}}{=} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)(x-1)^3$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 6. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 6. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 10+x & 2 & 3 & 4 \\ 10+x & 2+x & 3 & 4 \\ 10+x & 2 & 3+x & 4 \\ 10+x & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(10+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0 \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\Leftrightarrow} (10+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(10+x)x^3 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \text{ ή } x = 0.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Να εξεταστεί πότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2(a+b+c) & 2(a^2+b^2+c^2) \\ a+b+c & a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) & a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\ a^3+b^3+c^3 & a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) & a^3(b^2+c^2)+b^3(a^2+c^2)+c^3(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Να εξεταστεί πότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2(a+b+c) & 2(a^2+b^2+c^2) \\ a+b+c & a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) & a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\ a^3+b^3+c^3 & a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) & a^3(b^2+c^2)+b^3(a^2+c^2)+c^3(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & a+c & a^2+c^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{bmatrix} = A_1 \cdot A_2$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Να εξεταστεί πότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2(a+b+c) & 2(a^2+b^2+c^2) \\ a+b+c & a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) & a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\ a^3+b^3+c^3 & a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) & a^3(b^2+c^2)+b^3(a^2+c^2)+c^3(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & a+c & a^2+c^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{bmatrix} = A_1 \cdot A_2$$

Έχουμε

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & a+c & a^2+c^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & a-c & a^2-c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(c-b).$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Να εξεταστεί πότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2(a+b+c) & 2(a^2+b^2+c^2) \\ a+b+c & a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) & a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\ a^3+b^3+c^3 & a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) & a^3(b^2+c^2)+b^3(a^2+c^2)+c^3(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} det(A_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca-b^2-ab \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)[(c^2-b^2)+a(c-b)] \\ &= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c). \end{aligned}$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 7.

Να εξεταστεί πότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2(a+b+c) & 2(a^2+b^2+c^2) \\ a+b+c & a(b+c)+b(a+c)+c(a+b) & a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2) \\ a^3+b^3+c^3 & a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b) & a^3(b^2+c^2)+b^3(a^2+c^2)+c^3(a^2+b^2) \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} det(A_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ca-b^2-ab \end{bmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)[(c^2-b^2)+a(c-b)] \\ &= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c). \end{aligned}$$

Συνεπώς, A αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \neq 0$.

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.

Να εξεταστεί αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+a_1+b+b_1 & ab+a_1b_1 \\ a_1+a_1+b+b_1 & 2(a+b)(a_1+b_1) & ab(a_1+b_1)+a_1b_1(a+b) \\ ab+a_1b_1 & ab(a_1+b_1)+a_1b_1(a+b) & 2aba_1b_1 \end{bmatrix}.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.

Να εξεταστεί αν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+a_1+b+b_1 & ab+a_1b_1 \\ a_1+a_1+b+b_1 & 2(a+b)(a_1+b_1) & ab(a_1+b_1)+a_1b_1(a+b) \\ ab+a_1b_1 & ab(a_1+b_1)+a_1b_1(a+b) & 2aba_1b_1 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να αναλύσουμε τις γραμμές του πίνακα A ως εξής:

$$\Gamma_1 = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & a+b & ab \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1b_1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \mathbf{z}+\mathbf{w} = (a+b)\begin{bmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1b_1 \end{bmatrix} + (a_1+b_1)\begin{bmatrix} 1 & a+b & ab \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3 = \mathbf{h}+\mathbf{k} = (ab)\begin{bmatrix} 1 & a_1+b_1 & a_1b_1 \end{bmatrix} + (a_1b_1)\begin{bmatrix} 1 & a+b & ab \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, $\mathbf{z} = (a+b)\mathbf{y}$, $\mathbf{w} = (a_1+b_1)\mathbf{x}$, $\mathbf{h} = (ab)\mathbf{y}$, $\mathbf{k} = (a_1b_1)\mathbf{x}$, ώστε

$$det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{z}+\mathbf{w} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}+\mathbf{w} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z}+\mathbf{w} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{h}+\mathbf{k} \end{vmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{h} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{k} \end{vmatrix}} = 0.$$

Χρήση ιδιοτήτων για υπολογισμό ορίζουσας: Ένα τελευταίο απλό παράδειγμα...

Παράδειγμα 9.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 3 = -6.$$