Εφαπτόμενο Επίπεδο
Διαφορικό Συνάρτησης

Διδάσκοντες: Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα

- **Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου**

Ορισμός (εφαπτόμενο επίπεδο):

Έστω συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$. Το επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

λέγεται το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο (x_0, y_0).

Βασικές Προτάσεις (Υπενθύμιση):

Πρόταση 1: Αν η συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(x_0, y_0) \in D$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Πρόταση 2: Έστω η συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι συνεχής σε μια περιοχή ενός σημείου $(x_0, y_0) \in D$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

Παρατήρηση: Υπάρχουν μη διαφορίσιμες συναρτήσεις που έχουν μερικές παραγώγους.

Παραδείγματα:

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και να βρείτε τη εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην f στο σημείο $A(1, 0, 2)$

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}$$

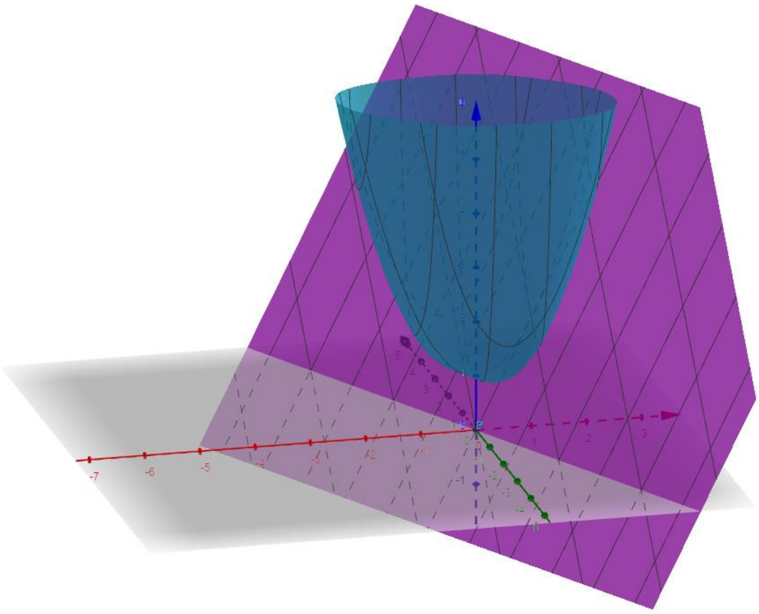
Εφόσον για κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0),σύμφωνα με την **πρόταση 2** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

Το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από την εξίσωση:

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

Άρα $z = 2 + 2(x-1) + y$ ή $z = 2x + y$ η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην f στο σημείο $A(1,0,2)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ Να βρείτε τη εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην f στο σημείο $(x_0,y_0) = (-4,3)$.

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{8}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{9}$$

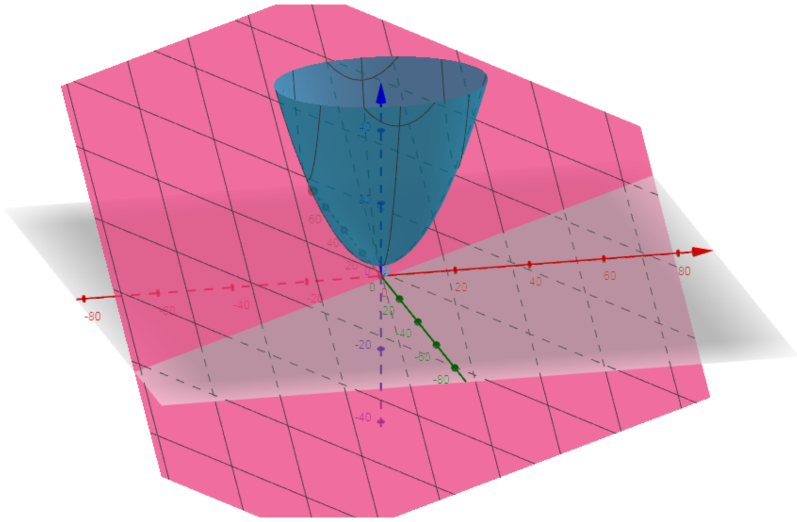
Το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο (x_0,y_0) δίνεται από την εξίσωση:

$$z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-4,3) = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-4,3) = \frac{2}{3}$$

Άρα $z = 5 - \frac{1}{2}(x+4) + \frac{2}{3}(y-3)$ ή

$z = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y$ η εξίσωση του επιπέδου που εφάπτεται στην f στο σημείο $A(1,0,2)$.



- **Διαφορικό Συνάρτησης:**

Είναι ήδη γνωστό ότι το διαφορικό 1ης τάξης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f μιας μεταβλητής, συμβολίζεται με $df(x)$ και δίνεται από τον τύπο $df(x) = f'(x)dx$. Η έννοια του διαφορικού 1ης τάξης για την περίπτωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών ανάλογα ορίζεται ως εξής:

<u>Ορισμός (Διαφορικό Συνάρτησης):</u>

Έστω συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, όπου D ανοικτό σύνολο και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ στο D. Τότε το διαφορικό 1ης τάξης της f ορίζεται ως

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$

Αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης και η συνέχεια αυτών, συνεπάγονται πάντα την ύπαρξη του διαφορικού της συνάρτησης.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στο D όλες οι μερικές παράγωγοι της f 2ης και 3ης τάξης, τότε το διαφορικό $d(df)$ λέγεται διαφορικό 2ης τάξης της f και συμβολίζεται με $d^2 f$.

Ισχύει ότι

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Αντίστοιχα το διαφορικό $d\left(d^2f\right)$ λέγεται διαφορικό 3ης τάξης της f και συμβολίζεται με d^3f .

Ισχύει ότι

$$d^3f = f_{xxx}dx^3 + 3f_{xxy}dx^2dy + 3f_{yyx}dxdy^2 + f_{yyy}dy^3 .$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2$. Να βρεθούν τα διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης της f.

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

$$f_x = 2x$$
$$f_y = 2y$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 0$$
$$f_{xx} = 2$$
$$f_{yy} = 2$$

- Το διαφορικό 1ης τάξης της f ορίζεται ως

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$

Άρα,

$$df(x,y) = 2xdx + 2ydy$$

- Το διαφορικό 2ης τάξης της f ορίζεται ως

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Άρα,

$$d^2f = 2dx^2 + 2dy^2$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 \cdot y^3$. Να βρεθούν τα διαφορικά πρώτης , δεύτερης και τρίτης τάξης της f.

<u>Λύση</u>

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy^3 \\ f_y &= 3x^2y^2 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 6xy^2 \\ f_{xx} &= 2y^3 \\ f_{yy} &= 6x^2y \\ f_{xxy} &= 6y^2 \\ f_{yyx} &= 12xy \\ f_{xxx} &= 0 \\ f_{yyy} &= 6x^2 \end{aligned}$$

- Το διαφορικό 1ης τάξης της f ορίζεται ως

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$

Άρα,

$$df(x,y) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

- Το διαφορικό 2ης τάξης της f ορίζεται ως

$$d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

Άρα,

$$d^2f = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2$$

- Το διαφορικό 3ης τάξης της f ορίζεται ως

$$d^3f = f_{xxx}dx^3 + 3f_{xxy}dx^2dy + 3f_{yyx}dxdy^2 + f_{yyy}dy^3$$

Άρα

$$d^3f = 18y^2dx^2dy + 36xydxdy^2 + 6x^2dy^3 .$$

<u>Ασκήσεις:</u>

1. Να βρείτε τη εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω επιφάνειες

(i) $f_1(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ στο σημείο $A_1(1,-1)$

(ii) $f_2(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$ στο σημείο $A_2(1,1)$

(iii) $f_3(x,y) = \dfrac{x^2}{16} + y$ στο σημείο $A_3(4,1)$

2. Να βρεθούν τα διαφορικά πρώτης , δεύτερης και τρίτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

(i) $f_1(x,y) = x^3 + y^3 - xy$

(ii) $f_2(x,y) = \ln(x+y)$

(iii) $f_3(x,y) = \sin(x-y)$

(iv) $f_4(x,y) = xe^{x-y}$

<u>Βιβλιογραφία:</u>

1. Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002
2. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
3. Διανυσματικός Λογισμός Jerold E. Mardsen & Antony J. Tromba (2017) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
4. Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Βαγγέλης Σπανδάγος (1993) Εκδόσεις Αίθρα.
5. Σημειώσεις Σχολής Ναυτικών Δοκίμων Open e-class.