Διπλό Ολοκλήρωμα

Ανάλυση Συναρτλησεων Πολλών Μεταβλητών

Α΄ Μάχιμων – Α΄ Μηχανικών

Διδάσκοντες: Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα

Ιστορικό Σημείωμα

Στον ίδιο τον Αρχιμήδη (225 π.Χ.) οφείλουμε την καλύτερη προσέγγιση του σύγχρονου ολοκληρώματος, ανάμεσα στους Έλληνες. Η πρώτη αξιοσημείωτη προόδος του σε αυτήν την κατεύθυνση είχε να κάνει με την απόδειξη που έδωσε για το ότι το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου είναι τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου με την ίδια βάση και κορυφή ή τα $\frac{2}{3}$ του περιγεγραμμένου παραλληλογράμμου.

D.E. Smith. History of mathematics

Εισαγωγή

- Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε την ολοκλήρωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Τα λεγόμενα διπλά ολοκληρώματα.
- Το διπλό ολοκλήρωμα επιδέχεται μια βασική γεωμετρική ερμηνεία σαν όγκος, και μπορεί να οριστεί αυστηρά σαν το όριο κατάλληλων προσεγγιστικών αθροισμάτων.
- Θα παρουσιάσουμε διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό διπλών ολοκληρωμάτων και θα εξετάσουμε κάποιες εφαρμογές.

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία

Ο ορισμός του διπλού ολοκληρώματος αποτελεί γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

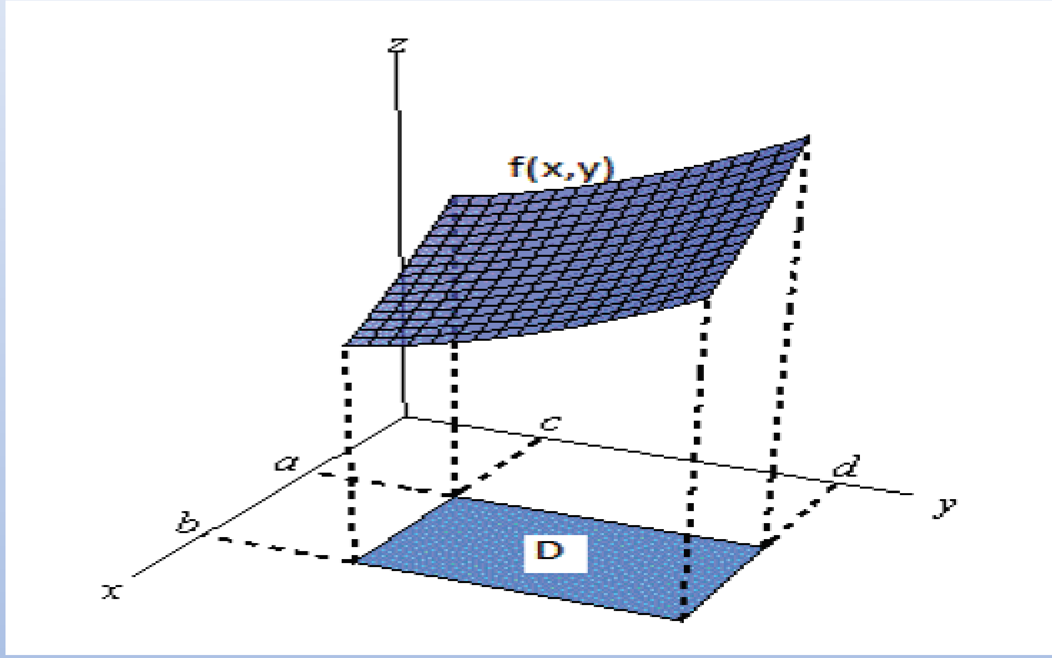
Ορισμός:

Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $D = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$

που είναι συνεχής και (για ευκολία) παίρνει μη αρνητικές τιμές στο D.

(**Σχήμα 1**)

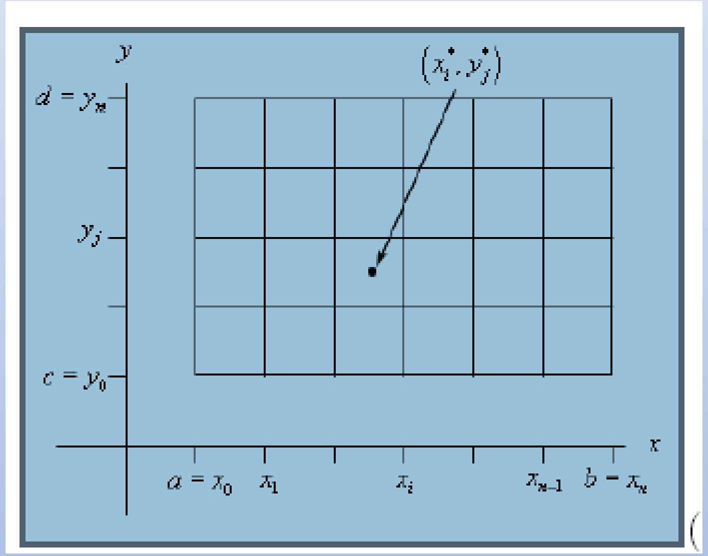
Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία



Σχήμα 1:

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία

Όπως και στην περίπτωση του ολοκληρώματος συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Το διάστημα $[a,b]$ υποδιαιρείται σε n υποδιαστήματα πλάτους Δx από τα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ και το διάστημα $[c,d]$ υποδιαιρείται σε m υποδιαστήματα πλάτους Δy από τα σημεία $y_1, y_2, \dots, y_m$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία

Το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy$$

θα ισούται με τον όγκο V του στερεού, που έχει βάσεις το $[a,b]\times[c,d]$ και την επιφάνεια S του γραφήματος της συνάρτησης $f(x,y)$, ενώ οι ακμές του είναι παράλληλες προς τον z-άξονα (**Σχήμα 1**).

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία

Έστω $\Delta A = \Delta x \Delta y$ το εμβαδόν του στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλογράμμου της παραπάνω διαμέρισης του $[a, b] \times [c, d]$ και $f(x_i^*, y_i^*)$ το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που προκύπτει από τα ενδιάμεσα σημεία (x_i^*, y_i^*) και αντιστοιχεί στα επιμέρους ορθογώνια (**Σχήμα 3**).

Τότε ο όγκος V προσεγγίζεται ως εξής:

$$V \backsimeq f(x_1^*, y_1^*)\Delta A + \cdots + f(x_1^*, y_m^*)\Delta A + f(x_2^*, y_1^*)\Delta A + \cdots + f(x_2^*, y_m^*)\Delta A \\ + \cdots + f(x_n^*, y_1^*)\Delta A + \ldots + f(x_n^*, y_m^*)\Delta A$$

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Ορθογώνια Χωρία

Ορισμός (Διπλού Ολοκληρώματος)

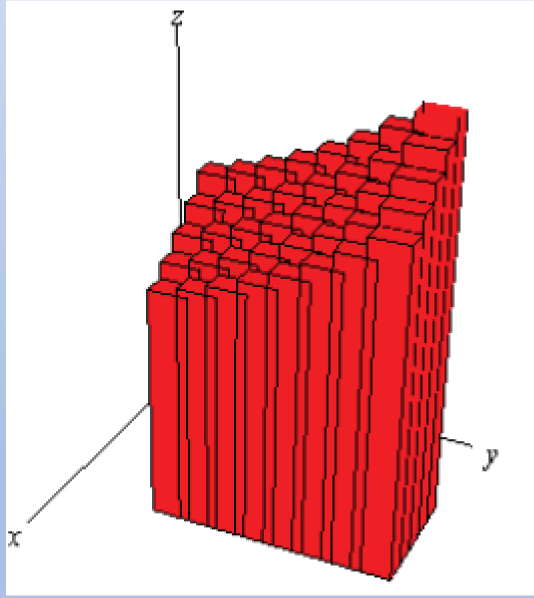
Ορίζεται ως **διπλό ολοκλήρωμα (double integral)**

της συνάρτησης $f(x, y)$ στο ορθογώνιο χωρίο $D = [a, b] \times [c, d]$

η οριακή τιμή

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{D}} f(x, y) dx dy = \lim_{n,m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_i^*) \Delta \mathrm{A}$$

εφόσον αυτή υπάρχει.



Σχήμα 3

Ιδιότητες Διπλών Ολοκληρωμάτων

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο D και $k \in \mathbb{R}$ τότε:

1. **(Σταθερό πολλαπλάσιο)**

$$\iint_{\mathrm{D}} kf(x,y)dxdy = k\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy$$

2. (Άθροισμα)

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} \big(f(x,y) + g(x,y)\big)\, dxdy = \iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\mathrm{D}} g(x,y)dxdy$$

3. (Διαφορά)

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} \big(f(x,y) - g(x,y)\big)\, dxdy = \iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{\mathrm{D}} g(x,y)dxdy$$

Ιδιότητες Διπλών Ολοκληρωμάτων

4. $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy \geq 0$ αν $f(x,y) \geq 0$ στο D.

5. $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy \geq \iint_{\mathrm{D}} g(x,y)dxdy$ αν $f(x,y) \geq g(x,y)$ στο D.

6. $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathrm{D}_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\mathrm{D}_2} f(x,y)dxdy$

όπου $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ είναι μια διαμέριση του D.

Το Θεώρημα Fubini (πρώτη μορφή)

Θεώρημα Fubini (πρώτη μορφή):

Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο χωρίο $D = [a, b] \times [c, d]$, τότε

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \int_c^d (f(x,y)dy)\, dx$$

Το Θεώρημα Fubini (πρώτη μορφή)

- Το Θεώρημα του Fubini μας λέει ότι τα διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε ορθογώνια χωρία μπορούν να υπολογιστούν με διαδοχική ολοκλήρωση ως προς τις εκάστοτες μεταβλητές.
- Επίσης, το Θεώρημα Fubini μας λέει ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία εκτελούμε την ολοκλήρωση.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy$ για την συνάρτηση $f(x,y) = 1 - 6x^2y$ και το χωρίο $D = [0,2] \times [-1,1]$

Παραδείγματα

<u>Λύση:</u>

Βάση του Θεωρήματος Fubini

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{2}\overbrace{(1-6x^2y)}^{y\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}dx\right)dy$$

$$= \int_{-1}^{1}[x-2x^3y]_{x=0}^{2}dy = \int_{-1}^{1}(2-16y)dy = [2y-8y^2]_{y=-1}^{1} = 4$$

Παρατήρηση: Αντιστρέφοντας την σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy$ για την συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y$ όπου το χωρίο D είναι το τετράγωνο $\mathrm{D} = [0,1] \times [0,1]$

Λύση:

Βάση του Θεωρήματος Fubini

$$\iint\limits_{\mathrm{D}} f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \overbrace{(x^2+y)}^{x\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x \right]_{x=0}^1 = \frac{5}{6}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \int_3^4 (e^y + xy)dydx$

Λύση:

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini .

$$\int_1^2 \int_3^4 (e^y + xy)dydx = \int_3^4 \int_1^2 (e^y + xy)dxdy = \int_3^4 \left(\int_1^2 (e^y + xy)dx\right) dy =$$

$$= \int_3^4 \left[e^y x + \frac{x^2}{2} y\right]_{x=1}^2 dy = \int_0^1 \left(e^y + \frac{3}{2} y\right) dy = \left[e^y + \frac{3y^2}{4}\right]_{y=3}^4 = \frac{21}{4} + e^4 - e^3$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_{-1}^2 (xe^{xy})dxdy$

Λύση:

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini . Εδώ παρατηρούμε ότι είναι πιο εύκολο να ολοκληρώσουμε την συνάρτηση $f(x,y) = xe^{xy}$ ως προς y (Αν θέλουμε να ολοκληρώσουμε ως προς x πρέπει να εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση). Έχουμε,

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 (xe^{xy})dxdy = \int_{-1}^2 \left(\int_0^1 (xe^{xy})dy\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 [e^{xy}]_{y=0}^1 dx = \int_{-1}^2 (e^x - 1)dx = [e^x - x]_{x=-1}^2 = e^2 - e^{-1} - 3$$

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 5</u>

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{(2x+3y)^2}\,dydx$

<u>Λύση:</u>

$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{1}{(2x+3y)^2}\,dydx = \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{1}{(2x+3y)^2}\,dy\right) d\chi =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{2x+3y}\right]_{y=1}^2 dy = -\frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+6} - \frac{1}{2x+3}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{2}{2x+6} - \frac{2}{2x+3}\right) dx = -\frac{1}{6}\left[ln(2x+6) - ln(2x+3)\right]_{x=0}^1 =$$

$$= -\frac{1}{6}(ln8 - ln5 - ln2).$$

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Φραγμένα μη Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini (Ισχυρή μορφή):

Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο χωρίο R

- Αν $\mathrm{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$, όπου g_1, g_2 συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ τότε

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Φραγμένα μη Ορθογώνια Χωρία

Θεώρημα του Fubini (Ισχυρή μορφή):

Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής στο χωρίο R

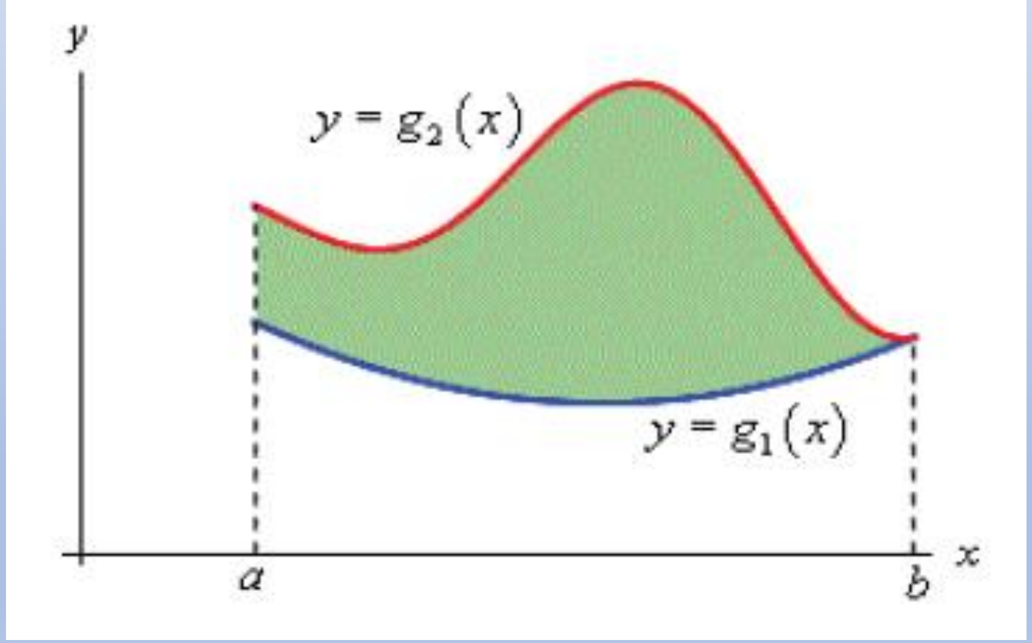
- Αν $\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, όπου h_1, h_2 συνεχείς συναρτήσεις στο $[c, d]$ τότε

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Διπλά Ολοκληρώματα Ορισμένα σε Φραγμένα μη Ορθογώνια Χωρία

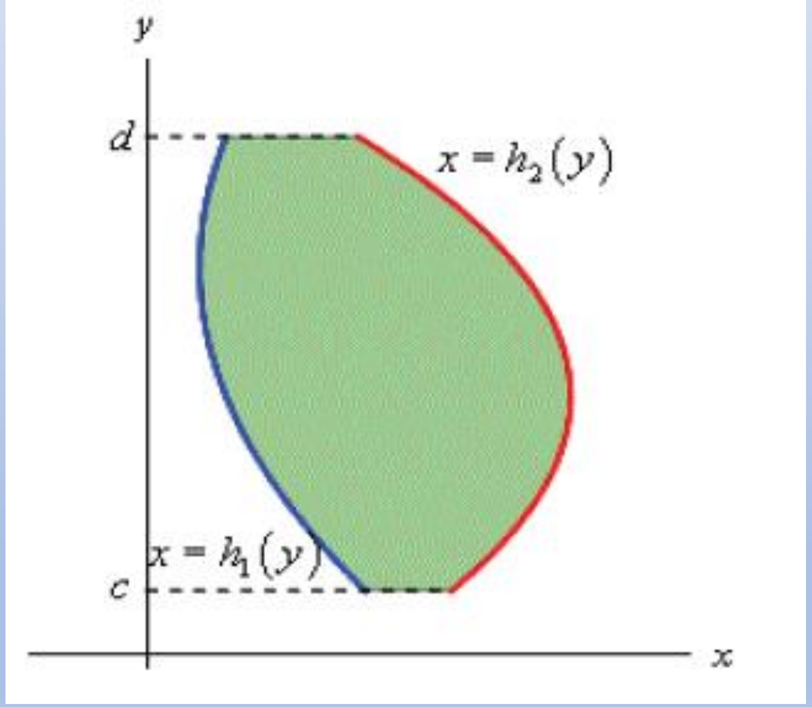
Περίπτωση 1

$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$



Περίπτωση 2

$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq \boldsymbol{x} \leq h_2(y)\}$

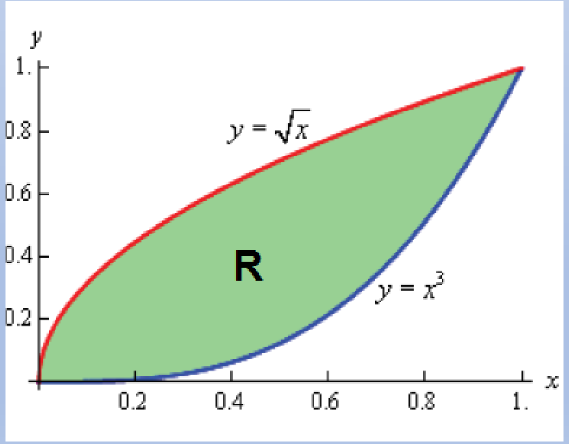


Διαδικασία Εύρεσης Ορίων Ολοκλήρωσης

- Για τον υπολογισμό του $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)d\mathrm{A}$ σε χωρίο R πρώτα ως προς y και κατόπιν ως προς x ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1: (Σχήμα).

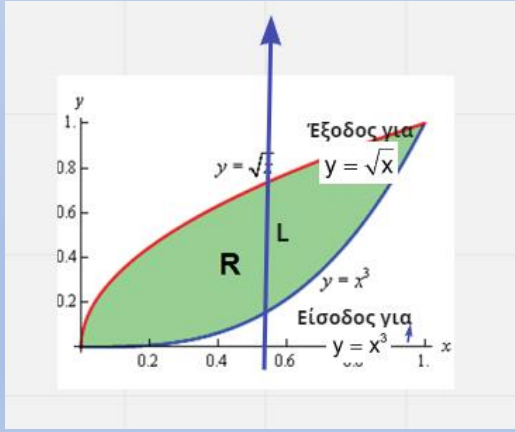
Σχεδιάζουμε το χωρίο προς ολοκλήρωση και ονομάζουμε τις καμπύλες που το περικλείουν. Π.χ



Διαδικασία Εύρεσης Ορίων Ολοκλήρωσης

Βήμα 2: (Όρια ολοκλήρωσης στον άξονα $y'y$)

Θεωρούμε κατακόρυφη ευθεία L που τέμνει το χωρίο R στην κατεύθυνση αύξησης του y. Σημειώνουμε τις τιμές y που αντιστοιχούν στα τυπικά σημεία εισόδου και εξόδου της L από το χωρίο. Οι τιμές αυτές είναι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς y και συνήθως είναι συνάρτηση του x. Π.χ



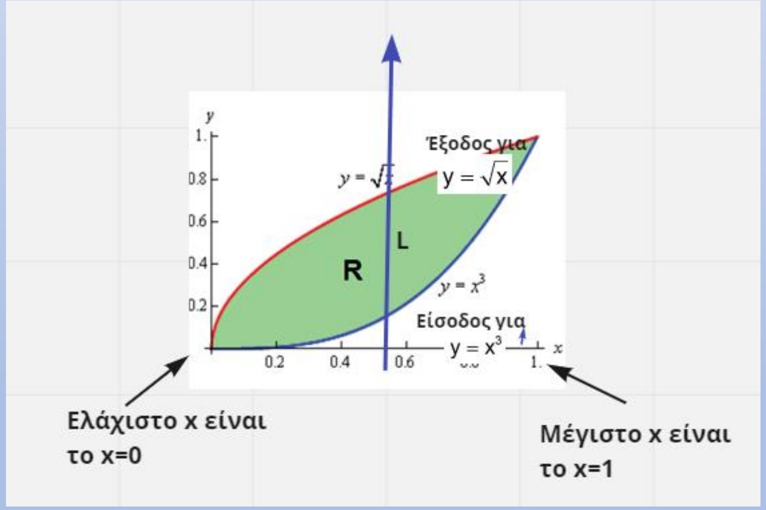
Διαδικασία Εύρεσης Ορίων Ολοκλήρωσης

<u>Βήμα 3:</u> (Όρια ολοκλήρωσης στον άξονα $x'x$)

Επιλέγουμε όρια ολοκλήρωσης στον άξονα x που περιέχουνε όλες τις κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από το χωρίο R. Π.χ

στο παράδειγμα μας το ολοκλήρωμα είναι

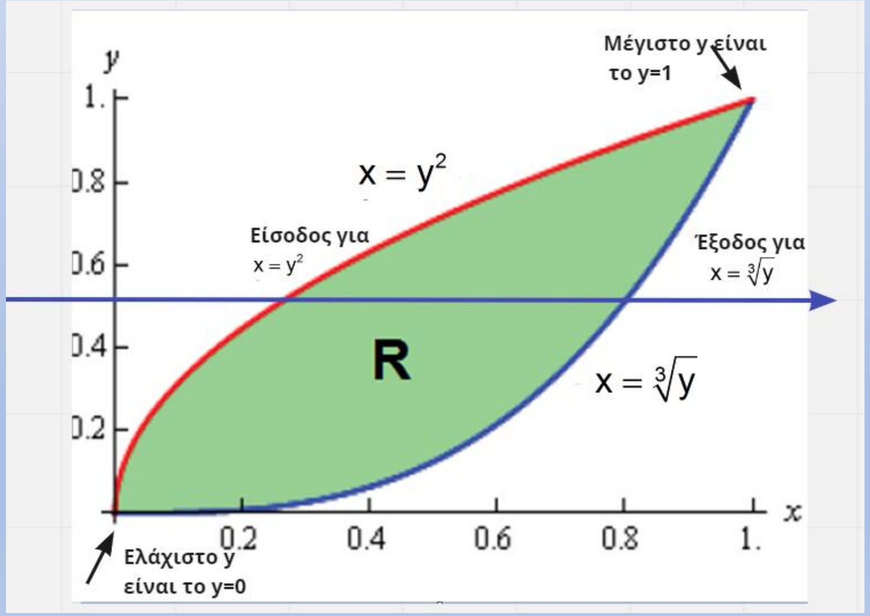
$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$



Διαδικασία Εύρεσης Ορίων Ολοκλήρωσης

- Για τον υπολογισμό του $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)d\mathrm{A}$ σε χωρίο R πρώτα ως προς x και κατόπιν ως προς y χρησιμοποιούμε οριζόντιες ευθείες αντί κατακόρυφες.

Π.χ.



Στο ίδιο παράδειγμα το ολοκλήρωμα είναι

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dA = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y^2}^{x=\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy$ για την συνάρτηση $f(x,y)=4xy-y^3$ και το χωρίο

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leq x\leq 1, x^3\leq y\leq \sqrt{x}\}$$

Λύση:

Βάση του Θεωρήματος Fubini

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\overbrace{(4xy-y^3)}^{x\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left[2y^2x-\frac{y^4}{4}\right]_{y=x^3}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\left(2x^2-\frac{x^2}{4}-2x^7+\frac{x^{12}}{4}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{7x^2}{4}-2x^7+\frac{x^{12}}{4}\right)dx=$$

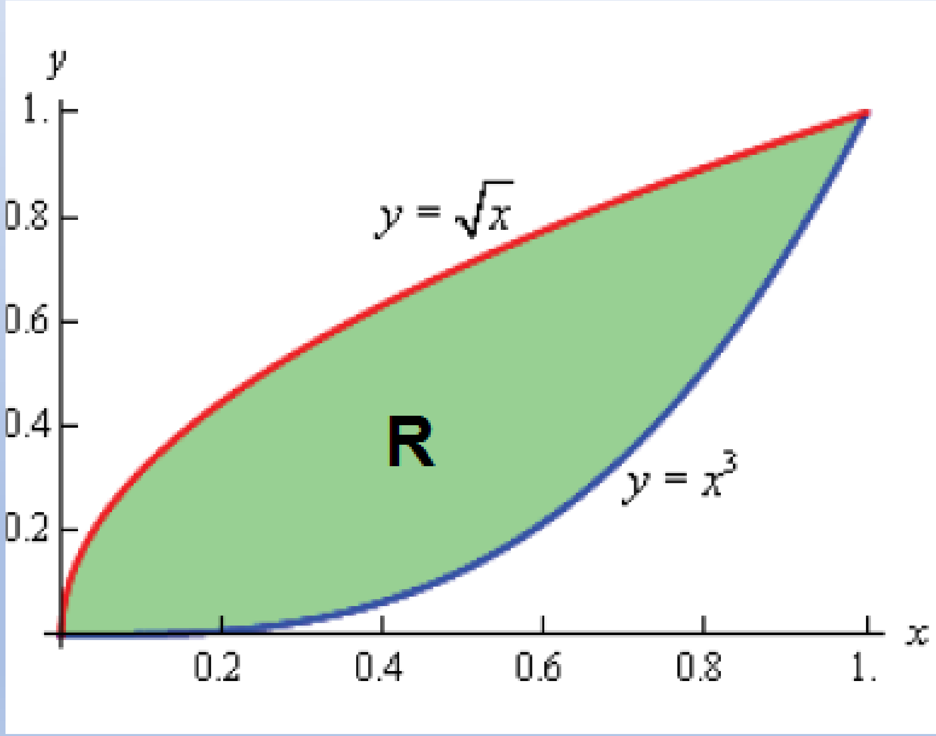
$$=\left[\frac{7x^3}{12}-\frac{x^8}{4}+\frac{x^{13}}{52}\right]_{z=0}^{1}=\frac{55}{156}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 6

Χωρίο R

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$



Παραδείγματα

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy$ για την συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{1+x^4}$ και το χωρίο

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 2, 0\le y\le x^3\}$$

Λύση:

Βάση του Θεωρήματος Fubini

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{x^3}\overbrace{\left(\sqrt{1+x^4}\right)}^{x\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}dy\right)dx=$$

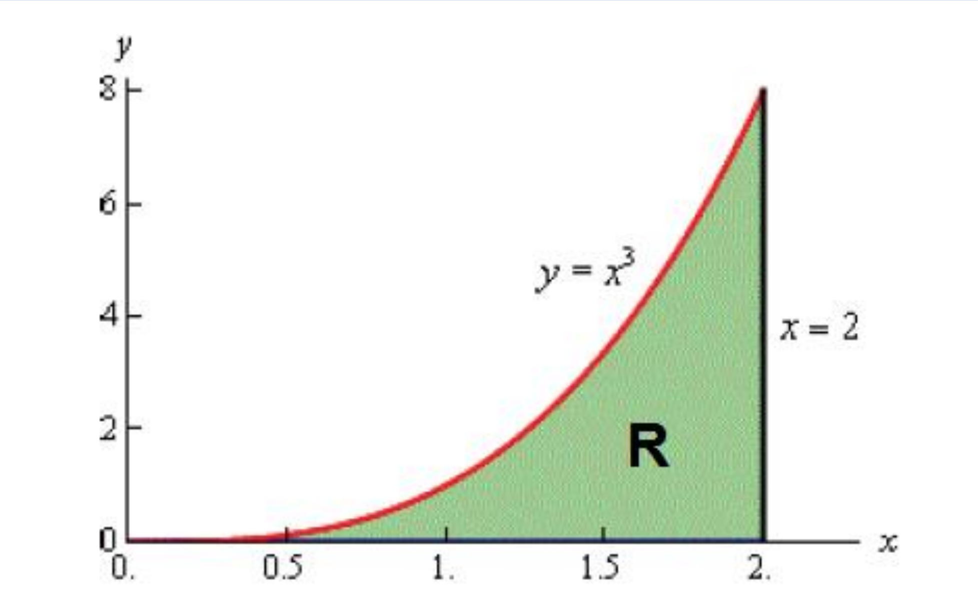
$$=\int_0^2\left[y\sqrt{1+x^4}\right]_{y=0}^{x^3}dx=\int_0^2\left(x^3\sqrt{1+x^4}\right)dx=\left[\frac{1}{6}\sqrt{1+x^4}^{\,3}\right]_{x=0}^{2}=\frac{\left(\sqrt{17}^{\,3}-1\right)}{6}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 7

Χωρίο R

$$\mathrm{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^3\}$$



Παραδείγματα

Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy$ για την συνάρτηση $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ και το χωρίο

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\le y\le 2, y\le x\le y^3\}$$

Λύση:

Βάση του Θεωρήματος Fubini

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dA=\int_1^2\left(\int_y^{y^3}\overbrace{\left(e^{\frac{x}{y}}\right)}^{y\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}dx\right)dy=\int_1^2\left(\int_y^{y^3} y\frac{1}{y}\overbrace{\left(e^{\frac{x}{y}}\right)}^{y\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}dx\right)dy=$$

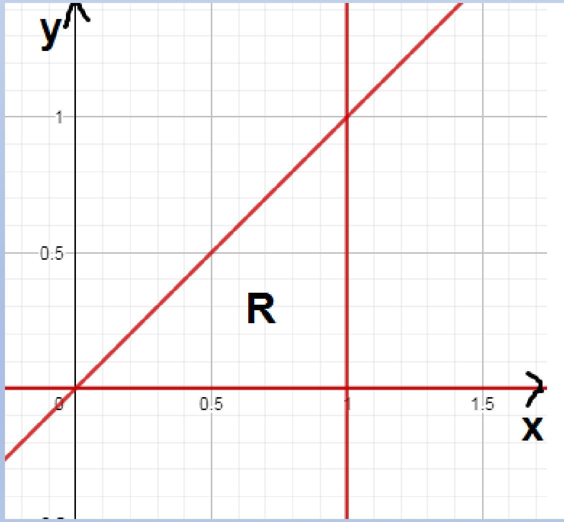
$$=\int_1^2\left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{y^3}dy=\int_1^2\left(ye^{y^2}-ye\right)dy=\left[\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{ey^2}{2}\right]_{x=1}^{2}=\frac{e^4}{2}-2e$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 9

Να υπολογίσετε το $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dA$ όπου

$f(x,y) = \dfrac{sinx}{x}$ και R είναι το τρίγωνο του επιπέδου xy που φράσεται από τον άξονα $x'x$ την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $x = 1$ (βλ. Σχήμα)



Παραδείγματα

Λύση:

Το χωρίο ολοκλήρωσης φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x, βρίσκουμε

$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{sinx}{x} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{sinx}{x} y \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 (sinx) dx = [-\mathrm{cosx}]_{x=0}^{1} = -cos1 + 1$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 10

Να υπολογίσετε το $\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)dA$ όπου $f(x,y)=\frac{x}{y}$ και R είναι το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσεται από τις ευθείες $y=x$, $y=2x$, $x=1$ και $x=2$

Παραδείγματα

Λύση:

Έχουμε:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dA = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \frac{x}{y} dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 [xlny]_{y=x}^{2x} dx = \int_1^2 (xln(2x) - xlnx)dx = \int_0^1 (xln2)dx$$

$$[\frac{x^2}{2} ln2]_{x=1}^{2} = \frac{3}{2} ln2$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 11

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{siny}{y}dydx$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αν πρώτα ολοκληρώσουμε ως προς x.

Έχουμε

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x\leq y\leq\pi,0\leq x\leq\pi\}$$

Ή ισοδύναμα

$$\mathrm{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq y,0\leq y\leq\pi\}$$

Παραδείγματα

<u>Λύση:</u>

Άρα

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{siny}{y} dydx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{siny}{y} dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{siny}{y} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{siny}{y} x \right]_{x=0}^y dy = \int_0^\pi (siny) dy = [-cosy]_{y=0}^\pi = -cos\pi + cos0$$

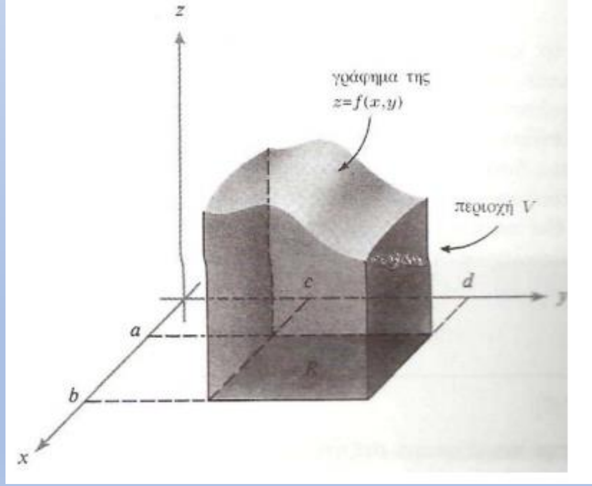
$$= 2$$

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Α. Εύρεση Όγκου

Για θετική συνάρτηση $f(x,y)$, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της f ορισμένο στο ορθογώνιο χωρίο R ως τον όγκο στερεού πρίσματος που είναι κάτω φραγμένο από το R και άνω φραγμένο από την επιφάνεια $z = f(x,y)$ (βλέπε σχήμα).

Ορίζουμε το όγκο αυτόν ως

$$V = \iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)dA$$



Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Α. Εύρεση Όγκου

Παράδειγμα 12

Να βρείτε τον όγκο του πρίσματος του οποίου η βάση είναι το τριγωνικό χωρίο στο επίπεδο xy που φράσεται από τον άξονα x και από τις ευθείες $y = x$ και $x = 1$ και του οποίου η άνω πλευρά ανήκει στο επίπεδο

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

Λύση

Για κάθε x μεταξύ 0 και 1 , το y μπορεί να μεταβάλλεται από $y = 0$

έως $y = x$. Έτσι,

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^x \overset{x\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}{(3 - x - y)} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^1 = 1cm^3$$

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Α. Εύρεση Όγκου

Παράδειγμα 12

2ος Τρόπος Λύσης:

Αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης , τότε για κάθε y μεταξύ του 0 και του 1 , το x φράσεται μεταξύ του y και του 1.

Άρα

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \overset{y\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha}{(3 - x - y)} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - yx \right]_{x=y}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3y^2}{2} \right) dx =$$

$$[\frac{5}{2} y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \ \ ]_{x=0}^1 = 1cm^3$$

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Α. Εύρεση Όγκου

Παράδειγμα 13

Βρείτε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ και έχει βάση το χωρίο D που ορίζεται από την ευθεία $y = 2x$ και την παραβολή $y = x^2$.

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Α. Εύρεση Όγκου

<u>Λύση:</u> Το χωρίο D (στο επίπεδο $0xy$) είναι το

$\mathrm{D} = \{(x, y)\ 0 \leq \mathrm{x} \leq 2, \mathrm{x}^2 \leq \mathrm{y} \leq 2\mathrm{x}\}$. Οπότε ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^2 \left(\overbrace{\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy}^{x\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} + yx^2 \right]_{y=x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(\frac{8x^3}{3} + 2x^3 - \frac{x^6}{3} - x^4 \right) dx =$$

$$\left[\frac{8x^4}{12} + \frac{2x^3}{4} - \frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{2} = \frac{216}{35} cm^3$$

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Β. Εμβαδά Φραγμένων Χωρίων στο Επίπεδο

<u>Ορισμός:</u>

Το εμβαδόν ενός κλειστού και φραγμένου χωρίου R στο επίπεδο είναι

$$E = \iint\limits_{\mathrm{R}} dA$$

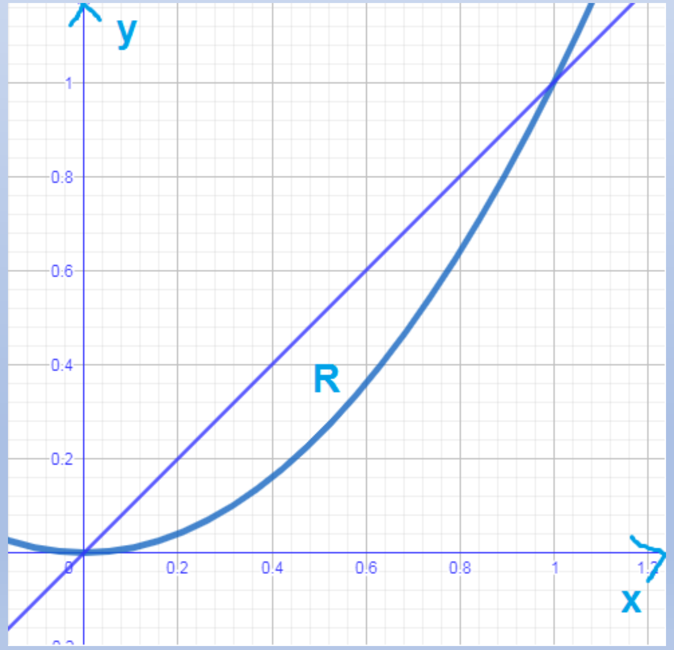
<u>Παρατήρηση:</u>

Ο ορισμός αυτός ισχύει για πολύ μεγαλύτερη ποικιλία χωρίων απ’ ότι ο ορισμός μέσω ολοκληρώματος μίας μεταβλητής. Ωστόσο, στις περιπτώσεις στις οποίες μπορούν να εφαρμοστούν και οι δύο ορισμοί, αυτοί συμφωνούν μεταξύ τους.

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Β. Εμβαδά Φραγμένων Χωρίων στο Επίπεδο

Παράδειγμα 14:

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου R που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο



Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Β. Εμβαδά Φραγμένων Χωρίων στο Επίπεδο

Λύση:

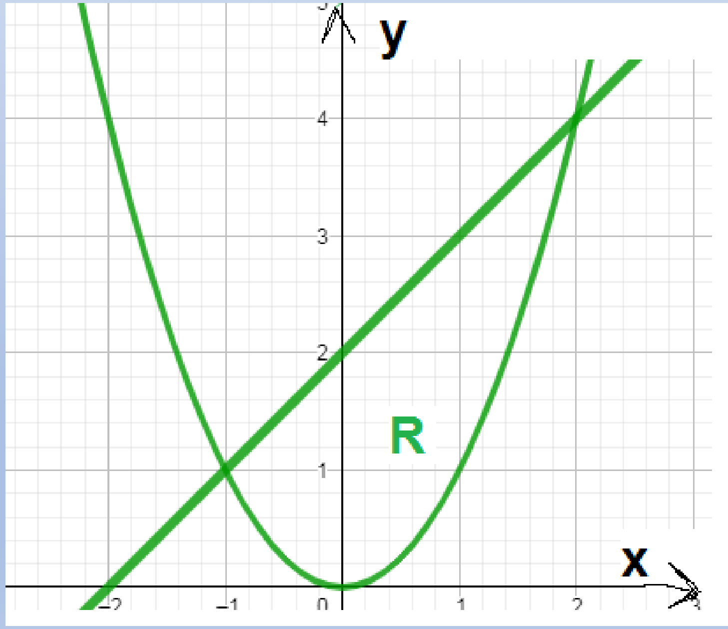
Σχεδιάζουμε το χωρίο (βλ. Παραπάνω σχήμα) και υπολογίζουμε το εμβαδόν ως εξής:

$$E = \iint_{\mathrm{R}} dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{y=x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6} \tau.\mu$$

Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Β. Εμβαδά Φραγμένων Χωρίων στο Επίπεδο

<u>**Παράδειγμα 15:**</u>

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου R που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = x + 2$.



Εφαρμογές Διπλού Ολοκληρώματος
Β. Εμβαδά Φραγμένων Χωρίων στο Επίπεδο

Λύση:

Σχεδιάζουμε το χωρίο (βλ. Παραπάνω σχήμα) και υπολογίζουμε το εμβαδόν ως εξής:

$$E = \iint_{\mathrm{R}} dA = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2}^{x+2} dy\right)dx = \int_{-1}^{2}[y]_{y=x^2}^{x+2}dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \frac{9}{2}\tau.\mu$$

Παρατήρηση:

Με διπλά ολοκληρώματα μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε κέντρα μάζας, ροπές βαρύτητας, ροπές αδράνειας, ακτίνες αδράνειας κ.α

Βιβλιογραφία

- Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002
- Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Διανυσματικός Λογισμός Jerold E. Mardsen & Antony J. Tromba (2017) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Βαγγέλης Σπανδάγος (1993) Εκδόσεις Αίθρα.
- George B. Thomas, Jr Απειροστικός Λογισμός , Τόμος ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2012