# Διπλό Ολοκλήρωμα
# Αλλαγή Μετάβλητών

**Ανάλυση Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών**

**Α΄ Μάχιμων – Α΄ Μηχανικών**

**Διδασκοντες:  Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα**

# Το Θεώρημα της Αλλαγής Μεταβλητών

Δίνονται δύο χωρία $D$ και $D^*$ στον $\mathbb{R}^2$ , μία διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathrm{T}$ στο $D^*$ με εικόνα $D$ , δηλαδή $\mathrm{T}(D^*) = \mathrm{D}$ , και μία ολοκληρώσιμη πραγματική συνάρτηση $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Θέλουμε να εκφράσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dA$ σαν ένα ολοκλήρωμα πάνω στο $D^*$ της σύνθετης συνάρτησης $f \circ T$.

Στις παρακάτω διαφάνειες θα δούμε με ποιον τρόπο γίνεται αυτό.

# Ιακωβιανή Ορίζουσα

**<u>Ορισμός</u>**

Έστω $\mathrm{T}: D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ένας μετασχηματισμός που δίνεται από τις σχέσεις $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$. Η Ιακωβιανή του $\mathrm{T}$ που συμβολίζουμε $\frac{\eth(x,y)}{\eth(u,v)}$ είναι η ορίζουσα του πίνακα-παραγώγου $DT(x, y)$ του $\mathrm{T}$:

$$\frac{\eth(x,y)}{\eth(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\eth x}{\eth u} & \frac{\eth x}{\eth v} \\ \frac{\eth y}{\eth u} & \frac{\eth y}{\eth v} \end{vmatrix}$$

# Ιακωβιανή Ορίζουσα – Πολικές Συντεταγμένες

**Παράδειγμα 1:**

Η συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$ που μετασχηματίζει τις πολικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις

$$x = x(r,\theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = rsin\theta$$

Και η Ιακωβιανή της είναι η

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = \mathrm{r}cos^2\theta + rsin^2\theta = r$$

# Το Θεώρημα της Αλλαγής Μεταβλητών

**<u>Θεώρημα:</u>**

Έστω $\mathrm{T}: D^* \longrightarrow \mathrm{D}$ ένας μετασχηματισμός που δίνεται από τις σχέσεις $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$. Υποθέτουμε ότι η $\mathrm{T}$ είναι 1-1 στο $D^*$ και ότι $\mathrm{T}(D^*) = \mathrm{D}$ . Τότε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

Έχουμε

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f\big(x(u, v), y(u, v)\big) \left|\frac{\eth(x,y)}{\eth(u,v)}\right| du dv \ (1)$$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί - Γραμμικός Μετασχηματισμός

- **Γραμμικός Μετασχηματισμός:**

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός γενικά έχει την μορφή

$$L_T: x = au + bv, \qquad y = cu + dv$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

<u>**Παράδειγμα 2:**</u>

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$

Όταν $D$ είναι το τρίγωνο που σχηματίζουν οι άξονες $x'x$, $y'y$ και η ευθεία $x + y - 2 = 0$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί - Γραμμικός Μετασχηματισμός

**Λύση:**

Έστω $u = y - x, v = y + x$

Δηλαδή $x = x(u, v) = \frac{v-u}{2}, y = y(u, v) = \frac{v+u}{2}$

$\frac{\eth(x,y)}{\eth(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\eth x}{\eth u} & \frac{\eth x}{\eth v} \\ \frac{\eth y}{\eth u} & \frac{\eth y}{\eth v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

Το τρίγωνο έχει για πλευρές τις ευθείες με εξισώσεις

$$y = 0, x = 0, \qquad x + y - 2 = 0$$

Ευθεία $y = 0$: $\frac{v+u}{2} = 0 \Rightarrow u = -v$

Ευθεία $x = 0$: $\frac{v-u}{2} = 0 \Rightarrow u = v$

Ευθεία $x + y - 2 = 0$ : $\frac{v-u}{2} + \frac{v+u}{2} - 2 = 0 \Rightarrow v = 2$

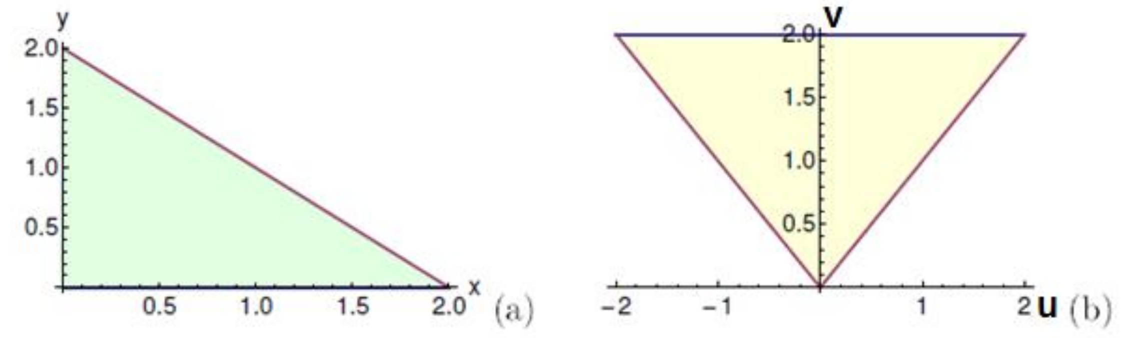
# Βασικοί Μετασχηματισμοί - Γραμμικός Μετασχηματισμός

Το πεδίο ορισμού

$$\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$$

Μετασχηματίζεται στο

$$\breve{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\}$$




(a) Το τρίγωνο του τόπου $D$ και (b) το αντίστοιχο τρίγωνο μετά τον γραμμικό μετασχηματισμό.

# Βασικοί Μετασχηματισμοί - Γραμμικός Μετασχηματισμός

Άρα από τον τύπο (1) του θεωρήματος έχουμε:

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \iint_{\breve{D}} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left[ve^{\frac{u}{v}}\right]_{u=-v}^{v} dv = \frac{1}{2}\int_0^2 v(e - e^{-1})dv = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \int_0^2 vdv =$$

$$= e - \frac{1}{e}$$

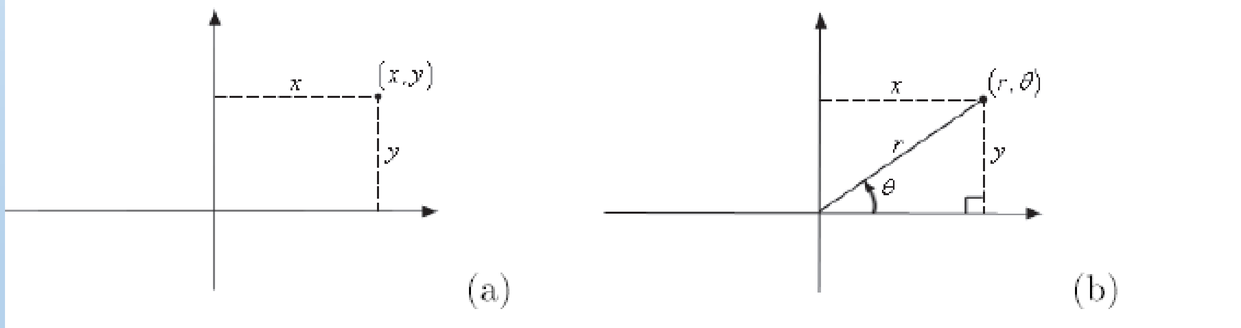
# Βασικοί Μετασχηματισμοί - Πολικές Συντεταγμένες

- **Πολικές Συντεταγμένες**

Όπως ήδη αναφέραμε η συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$ που μετασχηματίζει τις πολικές συντεταγμένες σε Καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις

$$x = x(r,\theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = rsin\theta$$

Και η Ιακωβιανή της είναι η $\frac{\eth(x,y)}{\eth(r,\theta)} = r$



(a) Καρτεσιανές και (b) πολικές συντεταγμένες.

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

Σύμφωνα με τα παραπάνω το ολοκληρωμα γράφεται

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) r dr d\theta$$

**<u>Παράδειγμα 3:</u>**

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

Όταν ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

**Λύση:**

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$x = x(r,\theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = rsin\theta$$

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)\left|\frac{\eth(x,y)}{\eth(r,\theta)}\right| drd\theta$$

$f(x,y)$= $\sqrt{1-x^2-y^2}$= $\sqrt{1-r^2} = \mathrm{F}(r,\theta)$

Άφου ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, είναι $0 < r < 1, 0 < \theta < \pi$.

Άρα είναι $\iint_{\mathrm{D}} \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}rdrd\theta =$

$$= \int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^1 d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

**Παράδειγμα 4:**

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} 2xydxdy$

Όταν ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $O(0,0)$ και ακτινών 2 και 5 αντίστοιχα.

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

**Λύση:**

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$x = x(r,\theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = rsin\theta$$

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)\left|\frac{\eth(x,y)}{\eth(r,\theta)}\right| drd\theta$$

$f(x,y)$= $2xy$= $2r^2 sin\theta cos\theta = r^2 sin2\theta = \mathrm{F}(r,\theta)$

Άφου ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι ο κυκλικός τομέας του 1ου τεταρτημορίου μεταξύ των κύκλων κέντρου $O(0,0)$ και ακτινών 2 και 5 αντίστοιχα, είναι $2 < r < 5, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Άρα είναι $\iint_{\mathrm{D}} 2xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^5 r^2 sin2\theta rdrd\theta =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=2}^5 d\theta = \frac{609}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta d\theta = \frac{609}{4}$$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

**Παράδειγμα 5:**

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} e^{x^2+y^2} dxdy$

Όταν ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1.

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Πολικές Συντεταγμένες

**Λύση:**

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$x = x(r,\theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = rsin\theta$$

$$\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)\left|\frac{\eth(x,y)}{\eth(r,\theta)}\right| drd\theta$$

$f(x,y)$= $e^{x^2+y^2}$ =$e^{r^2}$ $= \mathrm{F}(r,\theta)$

Άφου ο τόπος $\mathrm{D}$ είναι είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1, είναι $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$.

Άρα είναι $\iint_{\mathrm{D}} e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^2}rdrd\theta =$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^1 d\theta = \frac{e-1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi(e-1)$$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Γενικό Παράδειγμα

- Άλλου είδους Μετασχηματισμοί

__**Παράδειγμα 6:**__

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} \frac{y^2\sqrt{xy}}{(y^2+xy-1)^2}\,dxdy$

Όταν $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Γενικό Παράδειγμα

**Λύση:**

Έστω $u = xy, v = y^2$ Δηλαδή $x = x(u,v) = \frac{u}{\sqrt{v}}, y = y(u,v) = \sqrt{v}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{v}} & -\frac{u}{2v\sqrt{v}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Ο τόπος D έχει για πλευρές τις καμπύλες με εξισώσεις

x$y = 1, xy = 2, \ y = 1, y = 2$

$$xy = 1: u = 1$$
$$xy = 2: \ u = 2$$
$$y = 1: \ v = 1$$
$$y = 2: \ v = 4$$

# Βασικοί Μετασχηματισμοί – Γενικό Παράδειγμα

Άρα από τον τύπο (1) του θεωρήματος έχουμε:

$$\iint_{D} \frac{y^2\sqrt{xy}}{(y^2+xy-1)^2}\,dxdy = \iint_{\breve{D}} \frac{v\sqrt{u}}{(u+v-1)^2}\left|\frac{\eth(x,y)}{\eth(u,v)}\right| dudv = \int_1^2\int_1^4 \frac{v\sqrt{u}}{(u+v-1)^2}\frac{1}{2v}\,dvdu = \int_1^2\int_1^4 \frac{\sqrt{u}}{2(u+v-1)^2}\,dvdu =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left[-\frac{\sqrt{u}}{u+v-1}\right]_{v=1}^{4} du = -\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{\sqrt{u}}{3+u}-\frac{\sqrt{u}}{u}\right)du \overset{set\ w=\sqrt{u}}{\cong}$$

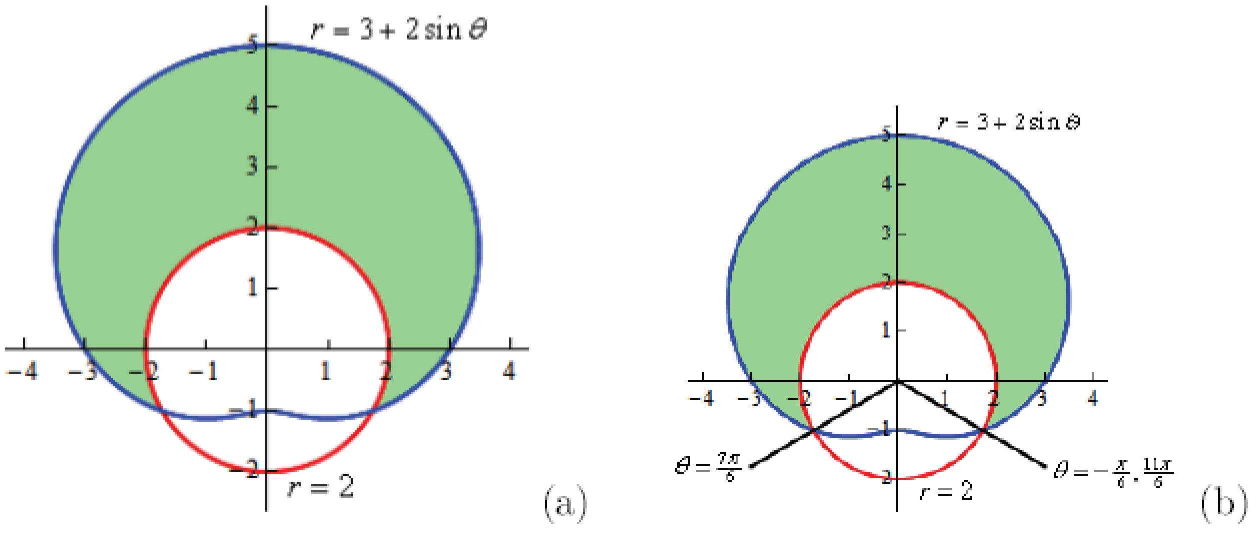
$$= -\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{w}{3+w^2}-\frac{1}{w}\right)wdw = -\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{3}{3+w^2}-1\right)dw =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{3+w^2}\right)dw = 3\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{w}{\sqrt{3}}\right)\right]_{v=1}^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right)$$

# Εφαρμογές – Εμβαδόν Χωρίου

**<u>Παράδειγμα 7:</u>**

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της πειροχής D που βρίσκεται στο εσωτερικό της περιοχής με εξίσωση $r = 3 + 2sin\theta$ και στο εξωτερικό του κύκλου με κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r = 2$.




(a) η περιοχή $D$ και (b) τα κοινά σημεία.

# Εφαρμογές – Εμβαδόν Χωρίου

**Λύση:**

Υπολογίζουμε τα κοινά σημεία των δύο περιοχών

$$3+2sin\theta=2 \Leftrightarrow sin\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6} \text{ ή } \theta=\frac{7\pi}{6}$$

Επομένως

$$\mathrm{E}=\iint_{\mathrm{D}} dxdy=\iint_{D^*} rdrd\theta \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\int_{2}^{3+2sin\theta} rdrd\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}[(3+2sin\theta)^2-4]\ d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}(5+12sin\theta+4sin^2\theta)\,d\theta=$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\left(\frac{5}{2}+6sin\theta+2\,\frac{1-cos2\theta}{2}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\left(\frac{7}{2}+6sin\theta-cos2\theta\right)d\theta=\frac{28\pi+33\sqrt{3}}{6}$$

# Εφαρμογές – Εμβαδόν Χωρίου

**<u>Παράδειγμα 8:</u>**

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που αποκόπτει από το πρώτο τεταρτημόριο η καμπύλη $r = 2\sqrt{2 - sin(2\theta)}$.

**<u>Λύση:</u>**

$$\mathrm{D}^* = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 2\sqrt{2 - sin(2\theta)}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\mathrm{E} = \iint_{\mathrm{D}} dxdy = \iint_{D^*} rdrd\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sqrt{2-sin(2\theta)}} rdrd\theta =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2 - sin(2\theta)]d\theta = 2\left[2\theta + \frac{cos(2\theta)}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2(\pi - 1)$$

# Υπολογισμός Όγκων

- **<u>Ορισμός 1:</u>**

Ο όγκος V του στερεού που ορίζεται από την επιφάνεια S με εξίσωση $z = \mathrm{f}(x, y)$ , όταν $\mathrm{f}(x, y) \geq 0$ , για κάθε $(x, y) \in \mathrm{D}$ , το επίπεδο $\mathrm{O}xy$

Και από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο του D και γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα z δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint_{\mathrm{D}} f(x, y) dx dy$$

# Εφαρμογές - Υπολογισμός Όγκων

**Ορισμός 2:**

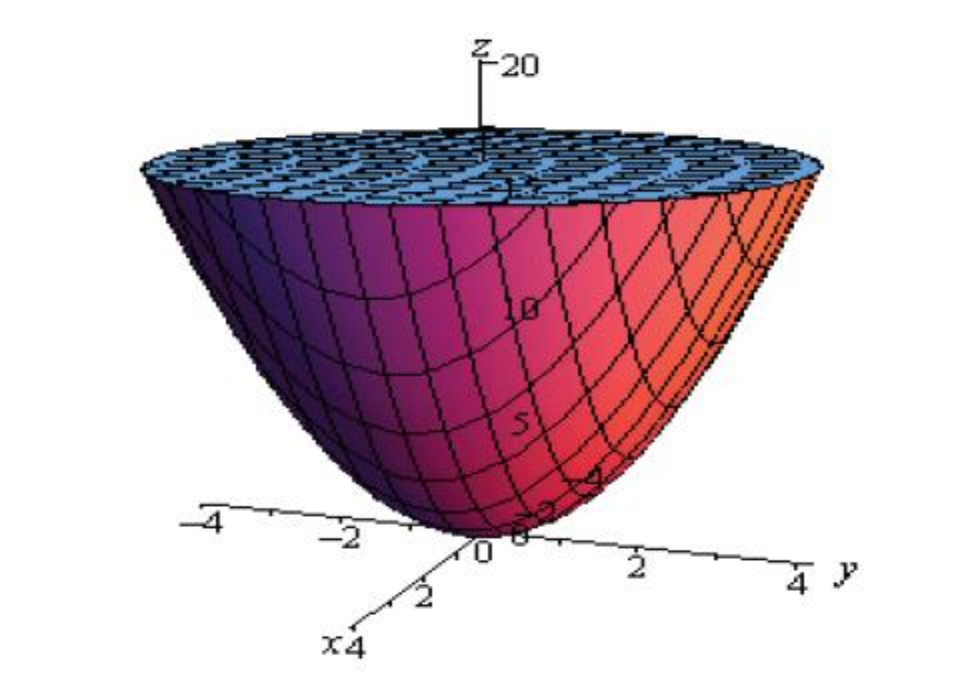
Αν $\mathrm{f}(x, y) - \mathrm{g}\,(x, y) \geq 0$ , για κάθε $(x, y) \in \mathrm{D}$ , τότε ο όγκος V του στερεού που φράσεται από τις επιφάνειες με εξίσωση $z = \mathrm{f}(x, y)$ ,και $w = \mathrm{g}(x, y)$ , από την κυλινδρική επιφάνεια που έχει οδηγό το σύνορο του D και γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα z δίνεται από τον τύπο

$$V = \iint\limits_{\mathrm{D}} \left( f\,(x, y) - \mathrm{g}\,(x, y) \right) dxdy$$

# Εφαρμογές - Υπολογισμός Όγκων

<u>**Παράδειγμα 9:**</u>

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από το στερεό με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 16$.



# Εφαρμογές - Υπολογισμός Όγκων

**Λύση:**

Ό όγκος ισούται με

$$V = \iint_{\mathrm{D}} (16 - x^2 + y^2)\, dxdy$$

Όπου $\mathrm{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -4 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}\right\}$

Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες

$$x = x(r, \theta) = rcos\theta, \qquad y = y(r, \theta) = rsin\theta$$

$\mathrm{g}(x, y)$= $16 - x^2 + y^2$ =$16 - r^2 = \mathrm{F}(r, \theta)$

# Εφαρμογές - Υπολογισμός Όγκων

Άρα είναι

$$V = \iint\limits_{\mathrm{D}} (16 - x^2 - y^2)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} (16 - r^2) r dr d\theta$$

Όπου ο τόπος $D^*$ είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 4, δηλαδή είναι $0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Επομένως

$$V = \iint_{D^*} (16 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (16r - r^3) dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ 8r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^4 d\theta = \int_0^{2\pi} 64 d\theta = 128\pi\ .$$

# Γενικές Ασκήσεις στο Διπλό Ολοκλήρωμα

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} xy(x^2+y^2)dxdy$ όπου το χωρίο $D$ είναι το τετράγωνο $\mathrm{D} = [0,1] \times [0,1]$.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} cos(x+y)dxdy$ όπου το χωρίο $D$ είναι το τετράγωνο $\mathrm{D} = [0,\pi] \times [0,\pi]$.
3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} sin^2xcosydxdy$ όπου $\mathrm{D} = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} \frac{1}{4+y^2}$ όπου $\mathrm{D} = [-1,1] \times [0,\pi]$.

# Ασκήσεις

**5.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} xydxdy$ όπου το χωρίο $D$ είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία

$\mathrm{O}(0,0)$ , $\mathrm{A}(2,0), \mathrm{B}(0,2)$.

**6.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} xydxdy$ όπου το χωρίο $D$ είναι ο κυκλικός τομέας με κέντρο $\tau o$ $\mathrm{O}(0,0)$ άκρα τα σημεία $\mathrm{A}(2,2), \mathrm{B}(-2,2)$ του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathrm{D}} xydxdy$ όπου το χωρίο $D$

είναι ο τόπος που ορίζεται από τον άξονα x και το άνω μέρος του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.

# Βιβλιογραφία


- Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002
- Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Διανυσματικός Λογισμός Jerold E. Mardsen & Antony J. Tromba (2017) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Βαγγέλης Σπανδάγος (1993) Εκδόσεις Αίθρα.
- George B. Thomas, Jr Απειροστικός Λογισμός , Τόμος ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2012