Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Σύγκλιση Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Συνέχεια Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Διδάσκοντες: Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα

Πραγματικές Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών:

Ορισμός

Αν A, B είναι δύο σύνολα, τότε ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** των A, B και το συμβολίζουμε με $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, το σύνολο που αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b), όπου $a \in A$ και $b \in B$. Δηλαδή:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) | \mathbf{a} \in \mathbf{A} \text{ και } \mathbf{b} \in \mathbf{B}\}$$

Αν δοθούν τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ για κάποια καθορισμένη τιμή του $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$\boldsymbol{A_1} \times \boldsymbol{A_2} \times \dots \times \boldsymbol{A_n} = \{(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}) | \boldsymbol{\alpha_1} \in \boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{\alpha_2} \in \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n} \in \boldsymbol{A_n}\}$$

<u>Ορισμός:</u> Το σύνολο $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, με

$n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται **Ευκλείδειος χώρος** διάστασης n.

<u>Ορισμός:</u> Κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ με $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

Ειδικά θα ασχοληθούμε με τις πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, οι οποίες αποτελούν έναν κανόνα που αντιστοιχίζει σε κάθε ζεύγος $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ μόνο πραγματικό αριθμό z. Τα x, y λέγονται ανεξάρτητες μεταβλητές και η $z = f(x, y)$ λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Πραγματικές Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

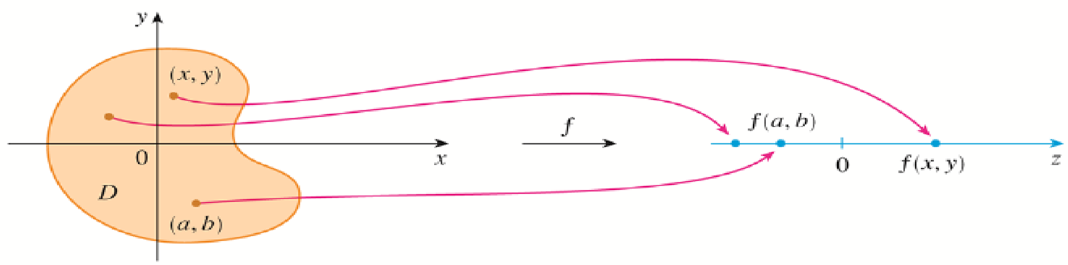
<u>Ορισμός:</u> Έστω $D = \{(x, y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Μια πραγματική συνάρτηση f δύο μεταβλητών ορισμένη στο D είναι μια σχέση της μορφής

$$z = f(x, y) \ \ x, y \epsilon D \ , z \in \mathbb{R}$$

όπου για κάθε ζευγάρι τιμών $(x_0, y_0) \in D$ υπάρχει ένα και μόνο ένα $z_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

Το D ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και το σύνολο που αποτελείται από τις τιμές $z = f(x, y)$ με $(x, y) \in A$ αποτελεί το **πεδίο τιμών** της.



<u>Εναλλακτικός Συμβολισμός:</u> $y = f(x_1, x_2)$

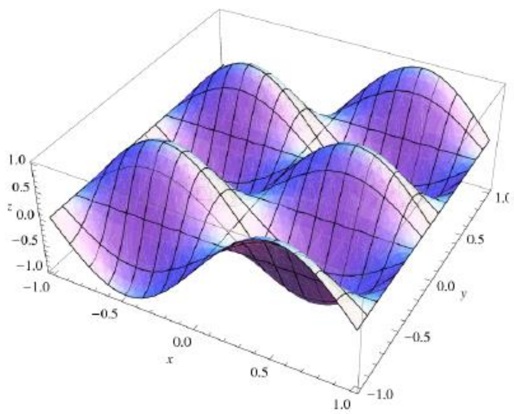
y: Εξαρτημένη μεταβλητή

x_1, x_2: Ανεξάρτητες μεταβλητές

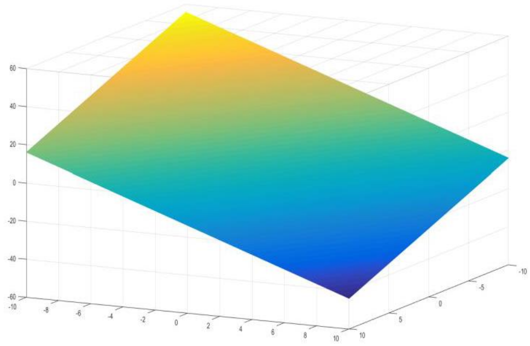
Η **γραφική παράσταση** της f είναι τρισδιάστατη (μήκος, πλάτος και ύψος). Συγκεκριμένα, έστω συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **Γράφημα** της f ονομάζεται το υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από τα σημεία $(x, y, f(x, y))$

$$graph(f) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

<u>Παραδείγματα:</u>



$f(x, y) = sin(\pi x)cos(2\pi y)$



$f(x, y) = 6 - 3x - 3y$

<u>Σημείωση:</u>

Ενδεικτικό site για να πραγματοποιείτε γραφήματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι το

https://www.geogebra.org/3d?lang=en

<u>Παραδείγματα συναρτήσεων δύο μεταβλητών</u>

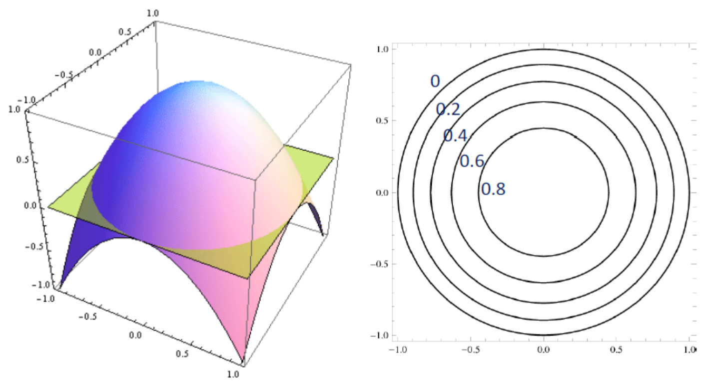
1. $f(x,y) = 2xy + x^2 + y^2$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x,y) = ylnx + e^x$

<u>Ορισμός:</u>

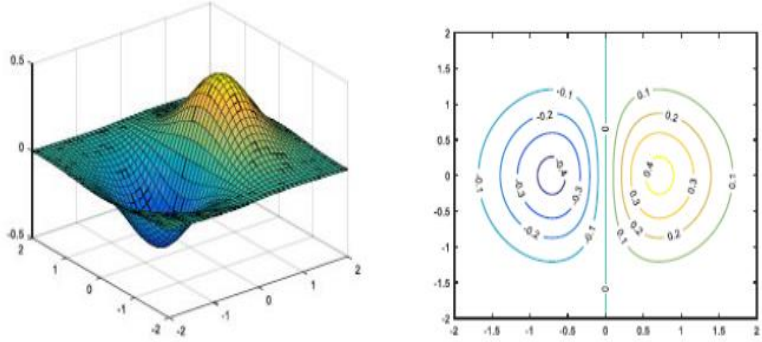
Ισοσταθμική καμπύλη μιας επιφάνειας $S: z = f(x,y)$ ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου Oxy, στα οποία η τιμή της συνάρτησης f παραμένει σταθερή.

Η ισοσταθμική που περιγράφεται ως $f(x,y) = c$ είναι η προβολή στο επίπεδο Oxy της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της επιφάνειας $z = f(x,y)$ με το επίπεδο $z = c$.

<u>Παραδείγματα:</u>



$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$



$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$

<u>Παράδειγμα</u>

Προσδιορίστε την ισοσταθμική καμπύλη ύψους 600 για την συνάρτηση

$f(x,y) = 60\sqrt[4]{x^3y}$

<u>Λύση:</u>

Για να προκύπτει πραγματικός αριθμός από τον τύπο της f, το πεδίο ορισμού είναι το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$.

Η ισοσταθμική καμπύλή είναι το γράφημα της $f(x,y) = 600$ ή ισοδύναμα

$$60\sqrt[4]{x^3y} = 600$$

$$\sqrt[4]{x^3y} = 10$$

$$y = \frac{10000}{x^3}$$

<u>Λυμένες Ασκήσεις:</u>

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

   <u>Λύση:</u>

   Για να προκύπτει πραγματικός αριθμός από τον τύπο της f, το πεδίο ορισμού είναι το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}$.

   Γραφικά το D ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο άνω μέρος της ευθείας $x+y=0$.

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

   <u>Λύση:</u>

Για να προκύπτει πραγματικός αριθμός από τον τύπο της g, το πεδίο ορισμού είναι το $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Παρατήρηση:

Το σύνολο αυτό μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια του καρτεσιανού γινομένου και ως εξής

$$D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

Γραφικά το D ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος αξόνων.

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x, y) = ln(4 - x^2 - 4y^2)$

Λύση:

Για να προκύπτει πραγματικός αριθμός από τον τύπο της g, το πεδίο ορισμού είναι το $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\right\}$.

Γραφικά το D ορίζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται εσωτερικά της έλλειψης με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x, y) = sin^{-1} x + \sqrt{xy}$
Για να προκύπτει πραγματικός αριθμός από τον τύπο της f θα πρέπει $-1 \leq x \leq 1$ και $xy \geq 0$.

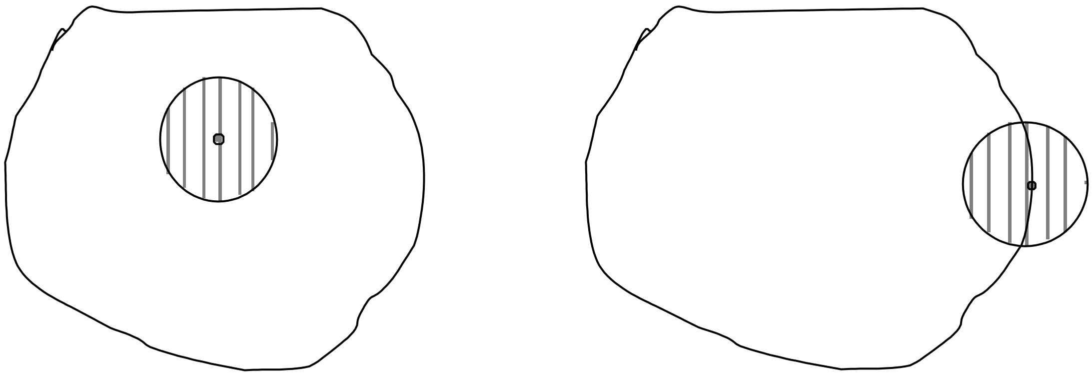
- Αν $-1 \leq x \leq 0$ τότε θα πρέπει $y \leq 0$
- Αν $0 \leq x \leq 1$ τότε θα πρέπει $y \geq 0$

Άρα έχουμε $-1 \leq x \leq 0$ και $y \leq 0$ δηλαδή το σύνολο $D_1 = [-1,0] \times (-\infty, 0]$
ή $0 \leq x \leq 1$ και $y \geq 0$ δηλαδή το σύνολο $D_1 = [0,1] \times [0, +\infty)$
Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $D = D_1 \cup D_2$

Βασικές έννοιες

- Το (x_0, y_0) λέγεται **εσωτερικό σημείο** του χωρίου D αν υπάρχει κυκλικός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) που ανήκει πλήρως στο D.
- Το (x_0, y_0) λέγεται **συνοριακό σημείο** του χωρίου D αν κάθε κυκλικός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) έχει σημεία που ανήκουν και σημεία που δεν ανήκουν στο D.
- Ένα σύνολο είναι **ανοικτό** εάν περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία και **κλειστό** αν περιέχει και τα συνοριακά του.

- Ένα σύνολο είναι **φραγμένο** έαν μπορεί να περικλειστεί από δίσκο πεπερασμένης ακτίνας.



Όριο Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών:

Ορισμός (Όριο Συναρτήσεων Δύο Μεταβλητών):

Έστω συνάρτηση f δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και (x_0, y_0) σημείο συσσώρευσης του D . Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $(x, y) \in D$ για τα όποια

$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ ισχύει $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ τότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Παρατήρηση: Το όριο εφόσον υπάρχει είναι μοναδικό.

Ιδιότητες Ορίου:

1. Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$, ορισμένη στο ανοιχτό σύνολο D και $(x_0, y_0) \in D$.

Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ και υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ και $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{x\to x_0} \left[\lim_{y\to y_0} f(x, y)\right] = L \text{ και}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{y\to y_0} \left[\lim_{x\to x_0} f(x, y)\right] = L.$$

Τα παραπάνω όρια καλούνται **επάλληλα ή διαδοχικά** όρια μιας συνάρτησης f(x,y) και **δεν** είναι απαραίτητα ίσα, παρά μόνο αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$.

Παρατήρηση (Κριτήριο μη ύπαρξης ορίου)

Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right] \neq \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

2. Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$ τότε

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L + M$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) - g(x,y)] = L - M$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = L \cdot M$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [\kappa \cdot f(x,y)] = k \cdot L$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ με $M \neq 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$

3. Όρια Βασικών Συναρτήσεων:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^k y^\ell = {x_0}^k {y_0}^\ell$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^k = {x_0}^k$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y^\ell = {y_0}^\ell$

4. (Κριτήριο Παρεμβολής)
Αν για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών f, g, h ισχύει
$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ για όλα τα σημεία (x,y) κοντά στο (x_0,y_0)
και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$ τότε $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$,

Μεθοδολογικό Σχόλιο:

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει ότι τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων καθώς $(x,y) \to (x_0,y_0)$ μπορούν να βρεθούν αν υπολογίσουμε τις τιμές των συναρτήσεων στο σημείο (x_0,y_0) αρκεί βέβαια το σημείο (x_0,y_0) να ανήκει στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

Λυμένες Ασκήσεις (Σύγκλιση Συναρτήσεων):

1. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (y^2 - 4xy)$

Λύση:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (y^2 - 4xy) = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

2. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2-4x+y}{x+2y+3}$

<u>**Λύση:**</u>

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2-4x+y}{x+2y+3} = \frac{1^2-4\cdot 0+1}{0+2\cdot 1+3} = \frac{2}{5}$$

3. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

<u>**Λύση:**</u>

Το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή τείνει στο 0 καθώς $(x,y)\to(1,1)$. Θα παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με σκοπό να άρουμε την απροσδιοριστία.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x-y) = 1-1 = 0$$

4. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

<u>**Λύση:**</u>

Το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή τείνει στο 0 καθώς $(x,y)\to(1,1)$. Θα παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με σκοπό να άρουμε την απροσδιοριστία.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-2)}{x-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2) = -1$$

5. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

<u>**Λύση:**</u>

Το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή τείνει στο 0 καθώς $(x,y)\to(0,0)$. Θα πολλαπλασιάσουμε με την συζυγή παράσταση του παρονομαστή με σκοπό να άρουμε την απροσδιοριστία.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x(\sqrt{x}-\sqrt{y})\right] = 0$$

6. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x}(1+y^2)\sin x + \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}\right)$

Λύση:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x}(1+y^2)\mathrm{sin}x+\frac{\sin(xy)}{\mathrm{sin}x\mathrm{sin}y}\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\mathrm{sin}x}{x}(1+y^2)+\frac{\frac{\sin(xy)}{xy}}{\frac{\mathrm{sin}x}{x}\frac{\mathrm{sin}y}{y}}\right)=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\mathrm{sin}x}{x}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+y^2)+\frac{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\sin(xy)}{xy}\right)}{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\mathrm{sin}x}{x}\right)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\mathrm{sin}y}{y}\right)}=1+1=2$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο:

Πολλές φορές για να υπολογίσουμε ένα όριο της μορφής $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ όπου η συνάρτηση $f(x,y)$ περιέχει παραστάσεις της μορφής x^2+y^2 κάνουμε χρήση πολικών συντεταγμένων. Δηλαδή κάνουμε την αντικατάσταση $x=\rho\cos\varphi\,, y=\rho\sin\varphi$.

Για $(x,y)\to(0,0)$, είναι $\rho\to 0$ για κάθε $\varphi\in[0,2\pi]$ και επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta).$$

7. **(Χρήση Πολικών Συντεταγμένων)** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$

Λύση:

Κάνουμε την αντικατάσταση $x=\rho\cos\varphi\,, y=\rho\sin\varphi$. Για $(x,y)\to(0,0)$, έχουμε ότι $\rho\to 0$ για κάθε $\varphi\in[0,2\pi]$

Έχουμε $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2+4}-2}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}=$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+4}-2}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+4}-2}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\sqrt{\rho^2+4}-2\right)\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

8. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$

Λύση:

Κάνουμε την αντικατάσταση $x=\rho\cos\varphi\,, y=\rho\sin\varphi$. Για $(x,y)\to(0,0)$, έχουμε ότι $\rho\to 0$ για κάθε $\varphi\in[0,2\pi]$.

Οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{p\to 0} \frac{(\rho\cos\varphi)^2(\rho\sin\varphi)^3}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2} = \lim_{p\to 0} \frac{\rho^5\cos^2\varphi\sin^3\varphi}{\rho^2} = \lim_{p\to 0}(\rho^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi) = 0.$$

9. Να υπολογίσετε το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Λύση:

Κάνουμε την αντικατάσταση $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Για $(x,y) \to (0,0)$, έχουμε ότι $\rho \to 0$ για κάθε $\varphi \in [0,2\pi]$

Έχουμε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{p\to 0} \frac{\sin[(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2]}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2} = \lim_{p\to 0} \frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1$

10. (Κριτήριο Παρεμβολής) Να υπολογίσετε το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)$

Λύση:

Έχουμε:

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right) \le 1, \text{άρα}$$

$$-\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right) \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$, επομένως $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = 0.$

11. Να υπολογίσετε το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Λύση:

Έχουμε:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1, \text{άρα} \left|y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |y|$$

$$-|y| \le y\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |y|$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -|y| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, επομένως $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Κριτήρια Μη Σύγκλισης:

- Αν μια συνάρτηση έχει διαφορετικά όρια κατά μήκος δύο διαφορετικών διαδρομών καθώς το (x, y) τείνει στο $(x_0,\ y_0)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη στο ανοιχτό σύνολο D και $(x_0, y_0) \in D$.

Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ και $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, και

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right] \neq \lim\limits_{y\to y_0}\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη στο ανοιχτό σύνολο D και $(x_0, y_0) \in D$. Αν για δύο ακολουθίες $P_n(x_n, y_n)$ και $Q_n(x_n, y_n)$ με
$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} Q_n(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$$
ισχύει ότι
$$\lim_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] \neq \lim_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)]$$
τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Λυμένες Ασκήσεις (Παραδείγματα Μη Σύγκλισης):

12. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1$ για κάθε $y \neq 0$

  και
$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

- $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1$ για κάθε $x \neq 0$

  και

  $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim\limits_{x\to 0}(1) = 1$

Οπότε $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right] \neq \lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$ και συνεπώς το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

13. Έστω το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-2y}$.

Έστω $f(x,y) = \frac{x+y}{x-2y}$.

Θεωρούμε ακολουθίες $P_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ και $Q_n(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Έχουμε ότι

- $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x_n, y_n) = (0,0)$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] = \frac{\frac{1}{n}+0}{\frac{1}{n}-0} = 1$ και $\lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)] = \frac{0+\frac{1}{n}}{0-2\frac{1}{n}} = -\frac{1}{2}$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)]$, το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-2y}$ δεν υπάρχει.

14. Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$

<u>Λύση:</u>

Έστω $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

Θεωρούμε ακολουθίες $P_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n^2}\right)$ και $Q_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n^2}\right)$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x_n, y_n) = (0,0)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{4}{n^2}} = 2$ και

  $\lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{9}{n^4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{9}{n^2}} = 3$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)]$, το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι υπάρχει και το $\lim\limits_{y\to y_0} \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$.
- Η ισότητα των ορίων $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right]$ και $\lim\limits_{y\to y_0} \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right]$ δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Συνέχεια Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Ορισμός:

Η f είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) όταν

- υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ και
- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Ορισμός:

Η f είναι **συνεχής στο σύνολο** A αν είναι συνεχής **σε κάθε** σημείο (x_0, y_0) του συνόλου A.

Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων δύο Μεταβλητών:

- Μία συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.
- Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $P(x_n, y_n)$ με $P(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ καθώς $n \to +\infty$ ισχύει $f[P(x_n, y_n)] \to f(x_0, y_0)$
- Όπως και στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής έτσι και στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ισχύουν ιδιότητες στην συνέχεια των συναρτήσεων. Οι ιδιότητες αυτές είναι ακριβώς ανάλογες με τις ιδιότητες συναρτήσεων μιας μεταβλητής.
- Συνεπώς αν $f(x,y), g(x,y)$ συνεχείς, τότε είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις $f(x,y) + g(x,y), f(x,y) - g(x,y), f(x,y) \cdot g(x,y), \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ με $g(x,y) \neq 0$.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς, στα σημεία που δε μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Λυμένες Ασκήσεις (Έλεγχος Συνέχειας Συναρτήσεων):

1. Η συνάρτηση $f(x,y) = 3xy^2 - \frac{4}{3}x^3y + 4$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$
2. Η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{xy^2 - 4x^3y + 7}{x^2 + y^2}$ είναι μια ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$. Άρα είναι συνεχής στο D.
3. Η συνάρτηση $f(x,y) = y\, sin\, x - x^2 + y$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

4. Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \quad\quad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Λύση:

Για $(x,y) \neq (0,0)$, η $f(x,y) = \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ συνεχής.

Για $(x,y) = (0,0)$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{sin(\rho^2)}{\rho^2} = 1 = f(0,0)$.

Για τον υπολογισμό του ορίου χρησιμοποιήσαμε τον μετασχηματισμό $x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi$. Για $(x,y) \to (0,0)$, έχουμε ότι $\rho \to 0$ για κάθε $\varphi \in [0,2\pi]$.

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής και στο σημείο $(x,y) = (0,0)$.

5. Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση:

Για $(x,y) \neq (0,0)$, η $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ συνεχής.

Για $(x,y) = (0,0)$

Θεωρούμε ακολουθίες $P_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ και $Q_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(x_n, y_n) = (0,0)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{2} = 1$ και

  $\lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)] = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

Επειδή $\lim\limits_{n\to+\infty} f[P_n(x_n, y_n)] \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f[Q_n(x_n, y_n)]$, το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής και στο σημείο $(x,y) = (0,0)$.

Μερική Συνέχεια Πραγματικής Συνάρτησης:

Ορισμός:

- Η συνάρτηση f είναι μερικώς συνεχής ως προς x στο σημείο (x_0, y_0), όταν η συνάρτηση $g(x) = f(x, y_0)$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.
- Η συνάρτηση f είναι μερικώς συνεχής ως προς y στο σημείο (x_0, y_0), όταν η συνάρτηση $h(y) = f(x_0, y)$ είναι συνεχής στο σημείο y_0

Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση είναι μερικώς συνεχής ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) δεν προκύπτει κατά ανάγκη ότι είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0).

Παράδειγμα:

6. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

είναι μερικώς συνεχής ως προς x και y στο σημείο $(0,0)$. Είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχής στο $(0,0)$;

Λύση:

- Ως προς x:
  Για κάθε $x \neq 0$, θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$.
  Επομένως
  $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$,
  δηλαδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
  Επομένως η $f(x,y)$ είναι μερικώς συνεχής ως προς x στο σημείο $(0,0)$.
- Ως προς y:
  Για κάθε $y \neq 0$, $h(y) = f(0,y) = \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$.
  Επομένως

  $\lim\limits_{x \to 0} g(y) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

  δηλαδή η συνάρτηση h είναι συνεχής στο σημείο $y_0 = 0$.
  Επομένως η $f(x,y)$ είναι μερικώς συνεχής ως προς y στο σημείο $(0,0)$.

- Έλεγχος συνέχειας: Θεωρούμε την ακολουθία $P_n(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x_n, y_n) = (0,0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f[P_n(x_n,y_n)] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0),$$

και επομένως η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

<u>Συναρτήσεις με Περισσότερες από Δύο Μεταβλητές</u>

Οι ορισμοί του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων δύο μεταβλητών καθώς και τα συμπεράσματα περί ορίων και συνέχειας επεκτείνονται σε συναρτήσεις με τρεις ή περισσότερες μεταβλητές.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις

$f(x,y,z) = ln(x+y+z)$ και $g(x,y,z) = \frac{ysinz}{x-1}$ είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού τους, ενώ το όριο

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+cos(0)} = \frac{1}{2}$ υπολογίστηκε με τις ιδιότητες των ορίων που αναφέραμε παραπάνω.

<u>Ασκήσεις:</u>

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

(i) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$

(ii) $g(x,y) = arcsin(x+y)$

(iii) $h(x,y) = arctan(xy)$

(iv) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \sin y}{\sin(xy)}$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{y}\right)$

(iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+y^2}{x} sinx$

(v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$

3. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

4. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$

5. Να βρεθεί εφόσον υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy}$

6. Υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

7. Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. Να εξεταστεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. Να εξεταστεί ως προς την μερική συνέχεια στο σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\chi^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσταθμικής καμπύλης της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{x-y}$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$.

Βιβλιογραφία:

1. Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002
2. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
3. Μπράτσος Α. (2011). Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Αθήνα: Εκδόσεις Α. Σταμουλή
4. L.J Goldstein, D.C Lay, D.I. Schneider, N.H. Asmar Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Θεωρία και Εφαρμογές, Broken Hill Publishers LTD (2020)
5. Σημειώσεις Σχολής Ναυτικών Δοκίμων Open e-class.