Διαφορίσιμη Συνάρτηση
Κανόνας Αλυσίδας
Ανάδελτα
Παράγωγοι Κατά Κατεύθυνση

Διδάσκοντες: Παπαγεωργίου Ευγενία, Κουλουμπού Δήμητρα

Διαφορίσιμη Συνάρτηση

Ορισμός (Παραγωγίσιμη Συνάρτηση):

Έστω συνάρτηση $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο $(x_0,y_0)\in D$, αν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)}{\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|}=0$$

όπου $\left\|(x,y)-(x_0,y_0)\right\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ η απόσταση των σημείων (x,y) και (x_0,y_0).

Αυτή η εξίσωση εκφράζει αυτό που λέμε ότι το

$$f(x_0,y_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)$$

είναι μια καλή προσέγγιση της συνάρτησης f.

Βασικές Προτάσεις:

Πρόταση 1: Αν η συνάρτηση $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(x_0,y_0)\in D$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Πρόταση 2 (Κριτήριο Διαφορισιμότητας σε σημείο): Έστω η συνάρτηση $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή ενός σημείου $(x_0, y_0) \in D$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

<u>Πρόταση 3 Πρόταση 2 (Κριτήριο Διαφορισιμότητας σε σύνολο):</u>

Έστω η συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς σε όλο το χωρίο D, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in D$.

<u>Σύνθετες Συναρτήσεις σε Περισσότερες Διαστάσεις</u>

<u>Κανόνας Αλυσίδας</u>

Στην Ανάλυση Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής μάθαμε ότι αν η $w = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και η $x = g(t)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t, τότε και η w είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t, και ο κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης μας δίνει

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει έναν ανάλογο με τον παραπάνω τύπο για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

<u>Θεώρημα 1 (Πρώτος Κανόνας Αλυσιδωτης Παραγώγισης για συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών):</u>

Αν η συνάρτηση $w = f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη και x, y είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t, τότε η w είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και ισχύει $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης για να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $w = f(x, y) = xy$ ως προς t κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos t, y = \sin t$. Ποια η τιμή της παραγώγου για $t = \frac{\pi}{2}$;

<u>Λύση:</u>

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης f υπάρχουν και είναι συνεχής σε σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin t \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y\left(-\sin t\right) + x\cos t = -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t .$$

Για την δεδομένη τιμή του t

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1.$$

2. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης για να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $w = f\left(x,y\right) = x^2 + y^2$ ως προς t κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos t + \sin t,\ y = \cos t - \sin t$. Ποια η τιμή της παραγώγου για $t = 0$;

<u>Λύση:</u>

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης f υπάρχουν και είναι συνεχής σε σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin t + \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -\sin t - \cos t \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \\ &= 2x(-\sin t+\cos t)+2y(-\sin t-\cos t)= \\ &= 2(\cos t+\sin t)(-\sin t+\cos t)+2(\cos t-\sin t)(-\sin t-\cos t)= \\ &= 2\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)-2\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)=0\end{aligned}.$$

Για την δεδομένη τιμή του t

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0}=0.$$

<u>Υπενθύμιση-Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις:</u>

$$sin^2 a + cos^2 a = 1$$

$$sin2a = 2sinacosa = \frac{2tana}{1+tan^2 a}$$

$$cos2a = cos^2 a - sin^2 a = 1-2sin^2 a = 2cos^2 a - 1 = \frac{1-tan^2 a}{1+tan^2 a}$$

$$tan2a = \frac{2tana}{1-tan^2 a}$$

$$sin^2 a = \frac{1-cos2a}{2}$$

$$cos^2 a = \frac{1+cos2a}{2}$$

<u>Θεώρημα 2 (Πρώτος Κανόνας Αλυσιδωτης Παραγώγισης για συναρτήσεις τριών ανεξάρτητων μεταβλητών):</u>

Αν η συνάρτηση $w=f(x,y,z)$ είναι διαφορίσιμη και x,y,z είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις του t, τότε η w είναι διαφορίσιμη συνάρτηση του t και ισχύει

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

<u>Παράδειγμα</u>

3. Εφαρμόστε τον κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης για να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $w=f(x,y,z)=xy+z$ ως προς t κατά μήκος

της καμπύλης $x = \cos t,\ y = \sin t, z = t$. Ποια η τιμή της παραγώγου για $t = 0$;

Λύση:

Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$ της συνάρτησης f υπάρχουν και είναι συνεχής σε σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Επομένως η f είναι διαφορίσιμη. Έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = y && \frac{dx}{dt} = -\sin t \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = x \ \text{και} && \frac{dy}{dt} = \cos t \\ &\frac{\partial f}{\partial z} = 1 && \frac{dz}{dt} = 1 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= y(-\mathrm{sint}) + \mathrm{xcost} + 1 =$$
$$= \mathrm{sint}(-\mathrm{sint}) + \mathrm{costcost} + 1 =$$
$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t$$

Για την δεδομένη τιμή του t έχουμε $\frac{dw}{dt}|_{t=0} = 1 + cos(0) = 2.$

<u>Συναρτήσεις Ορισμένες σε Επιφάνειες</u>

<u>Θεώρημα 3 (Δεύτερος Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης για συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών):</u>

Αν η συνάρτηση $w = f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη και $x = g(r,s), y = h(r,s)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε η w έχει μερικές παράγωγους ως προς r,s που δίνονται από τους τύπους:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

4. Εκφράστε τα $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$ ως συνάρτηση των r,s αν

$$w = x^2 + y^2, x = r - s, y = r + s$$

Λύση:

Έχουμε

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial w}{\partial x}=2x\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=2y\end{array},\quad \begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial r}=1\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}=1\end{array}\quad \text{και}\quad \begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial s}=-1\\ \dfrac{\partial y}{\partial s}=1\end{array}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=2x+2y=2(r-s)+2(r+s)=4r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=-2x+2y=-2(r-s)+2(r+s)=4s$$

5. Εκφράστε τα $\dfrac{\partial z}{\partial r},\dfrac{\partial z}{\partial s}$ ως συνάρτηση των r,s στο σημείο $(r,s)=\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$ αν

$$z=4e^x \ln y,\ x=\ln(r\cos(s)),\ y=r\sin s$$

Λύση:

Έχουμε

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4e^x\ln y\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4e^x}{y}\end{array},\quad \begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r}=\sin s\end{array}\quad \text{και}\quad \begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial s}=\dfrac{-r\sin s}{r\cos(s)}=-\tan s\\ \dfrac{\partial y}{\partial s}=r\cos(s)\end{array}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=4e^x\ln y\frac{1}{r}+\frac{4e^x}{y}\sin s=$$

$$4r\cos(s)\ln(r\sin s)\frac{1}{r}+\frac{4r\cos(s)}{r\sin s}\sin s=$$

$$=4\cos(s)\ln(r\sin s)+4\cos(s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=4e^{x}\ln y\frac{-\sin s}{\cos(s)}+\frac{4e^{x}}{y}r\cos(s)=$$

$$4r\cos(s)\ln(r\sin s)\frac{-\sin s}{\cos(s)}+\frac{4r\cos(s)}{r\sin s}r\cos(s)=$$

$$=-4r\sin s\ln(r\sin s)+\frac{4r\cos^{2}(s)}{\sin s}$$

Στο σημείο $(r,s)=\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}=4\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\left(\ln\sqrt{2}+1\right)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_{\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}=-8\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{8\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{2}\left(1-\ln\sqrt{2}\right)$$

<u>Θεώρημα 4 (Δεύτερος Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης για συναρτήσεις τριών ανεξάρτητων μεταβλητών):</u>

Αν η συνάρτηση $w=f(x,y,z)$ είναι διαφορίσιμη και $x=g(r,s), y=h(r,s)$ και $z=k(r,s)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις , τότε η w έχει μερικές παράγωγους ως προς r,s που δίνονται από τους τύπους:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

<u>Παραδείγματα:</u>

6. Εκφράστε τα $\frac{\partial w}{\partial r},\frac{\partial w}{\partial s}$ ως συνάρτηση των r,s αν

$$w=x+2y+z^{2},\ x=\frac{r}{s},\ y=r^{2}+\ln s,\ z=2r$$

<u>Λύση:</u>

Έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial x}=1 \qquad \frac{\partial x}{\partial r}=\frac{1}{s} \qquad \frac{\partial x}{\partial s}=-\frac{r}{s^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}=2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r}=2r \ \text{και} \ \frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{s}$$
$$\frac{\partial w}{\partial z}=2z \qquad \frac{\partial z}{\partial r}=2 \qquad \frac{\partial z}{\partial s}=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{s}+2\cdot 2r+2z\cdot 2=\frac{1}{s}+4r+4z=\frac{1}{s}+4r+4\cdot 2r=\frac{1}{s}+12r$$
$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{r}{s^2}+2\frac{1}{s}+2z\cdot 0=-\frac{r}{s^2}+\frac{2}{s}$$

<u>Θεώρημα 5 (Τύπος Παραγώγισης Πεπλεγμένης Συνάρτησης)</u>

Έστω ότι η $F(x,y)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και ότι η εξίσωση $F(x,y)=0$ ορίζει το y ως διαφορίσιμη συνάρτηση του x. Τότε για κάθε σημείο (x,y) όπου $F_y(x,y)\neq 0$, ισχύει

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

7. Χρησιμοποιείστε το **Θεώρημα 5** για να βρείτε το $\frac{dy}{dx}$ αν $y^2-x^2-\sin(xy)=0$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $F(x,y)=y^2-x^2-\sin(xy)$.

$$F_x=-2x-y\cos(xy)$$
$$F_y=2y-x\cos(xy)$$

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 5**

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}=\frac{2x+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}$$

Κλίση και Παράγωγοι κατά Κατεύθυνση:

Ορισμός (Παράγωγος κατά Κατεύθυνση):

Έστω συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και σημείο $P(x_0, y_0) \in D$. Η παράγωγος της f στο σημείο P στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος

$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ είναι η ποσότητα

$D_u f\big|_P = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$ εφόσον το όριο αυτό υπάρχει.

Στην μία διάσταση η παράγωγος μιας συνάρτησης f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ερμηνεύεται ως ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f έχει ως πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n$, τότε η παράγωγός της δεν είναι απλώς ένας αριθμός για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, αλλά ένα σημείο στο $\mathbb{R}^n$ το οποίο δηλώνει το ρυθμό μεταβολής της f σε κάθε διάσταση. Αυτή η γενίκευση της έννοιας της παραγώγου στις πολλές διαστάσεις ονομάζεται κλίση ή βαθμίδα ή ανάδελτα (gradient) της f και συμβολίζεται με το ανάδελτα ∇f, το οποίο στην περίπτωση συναρτήσεων δύο μεταβλητών, έστω x και y, ορίζεται ως εξής:

Ορισμός:

Έστω συνάρτηση $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Η **κλίση ή βαθμίδα ή ανάδελτα** της f στο (x, y) είναι το διάνυσμα που δίνεται από την σχέση $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right)$. Το διάνυσμα αυτό συμβολίζεται και με $\operatorname{grad} f$.

Αντίστοιχος ορισμός ισχύει και για συναρτήσεις $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. $n > 2$

Παραδείγματα:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   A) Να βρεθεί η κλίση ∇f.

   B) Να βρεθεί η τιμή $(\nabla f)_{(1,1)}$

Λύση

A) Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Άρα

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

B) $(\nabla f)_{(1,1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = xy + z$. Να βρεθεί η κλίση ∇f.

Λύση

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Άρα

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (y, x, 1).$$

Θεώρημα:

Αν η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο P και $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ μοναδιαίο διάνυσμα τότε

$$D_u f\big|_P = (\nabla f)_p \cdot \vec{u}$$

Που είναι το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης της f στο σημείο P και του διανύσματος $\vec{u}$.

Παραδείγματα:

1. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ στο σημείο $P(2,0)$ στην κατεύθυνση $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ έχει μέτρο $|\vec{v}| = 5 \neq 1$ και επομένως δεν είναι μοναδιαίο.

Η κατεύθυνση του $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ βρίσκεται αν μετατρέψουμε το διάνυσμα σε μοναδιαίο, δηλαδή αν διαιρέσουμε το διάνυσμα με το μέτρο του $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$$\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y - y\sin(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y - x\sin(xy)$$

Οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο $P(2,0)$ είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,0)} = 1$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2,0)} = 2 - 0 = 2$$

Η κλίση της f στο σημείο $P(2,0)$ είναι

$$(\nabla f)_{(2,0)} = (1,2)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $P(2,0)$ στην κατεύθυνση $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ επομένως είναι

$$D_u f\big|_P = (\nabla f)_p \cdot \vec{u} = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1.$$

2. Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x,y)=2xy-3y^2$ στο σημείο $P(5,5)$ στην κατεύθυνση $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$ έχει μέτρο $|\vec{v}|=5\neq 1$ και επομένως δεν είναι μοναδιαίο.

Η κατεύθυνση του $\vec{v}=4\vec{i}+3\vec{j}$ βρίσκεται αν μετατρέψουμε το διάνυσμα σε μοναδιαίο, δηλαδή αν διαιρέσουμε το διάνυσμα με το μέτρο του

$$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$\vec{u}=\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}.$$

Οι μερικές παράγωγοι της f είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x-6y$$

Οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο $P(5,5)$ είναι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(5,5)}=10$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(5,5)}=10-30=-20$$

Η κλίση της f στο σημείο $P(5,5)$ είναι

$$(\nabla f)_{(5,5)}=(10,-20)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $P(5,5)$ στην κατεύθυνση $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ επομένως είναι

$$D_u f\big|_P=\left(\nabla f\right)_p\cdot\vec{u}=10\cdot\frac{4}{5}-20\cdot\frac{3}{5}=8-12=-4.$$

Ορισμός:

Στην απλή περίπτωση της μιας διάστασης η δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f μας δίνει πληροφορία σχετικά με την καμπυλότητα της, δηλαδή αν είναι κυρτή ή κοιλή και σε ποιά διαστήματα του πεδίου ορισμού της συμβαίνει αυτό.

Αυτό προέκυπτε από το πρόσημο της f'' στο εκάστοτε σημείο, δηλαδή:

- αν $f'' \geq 0$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι κυρτή στο σημείο αυτό ενώ
- αν $f'' \leq 0$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι κοίλη στο σημείο αυτό. Στις περισσότερες διαστάσεις.

Η γενίκευση της έννοιας της δεύτερης παραγώγου οδηγεί σε ένα αντικείμενο που είναι ένας τετραγωνικός πίνακας στο $\mathbb{R}^n$ το οποίο καλείται Εσσιανός πίνακας (Hessian matrix) και συμβολίζεται ως $H(x) = \nabla^2 f$, όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Για τη γενική περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ο Εσσιανός πίνακας υπολογίζεται ως εξής:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, ελέγχεται μέσω αυτού του πίνακα και συγκεκριμένα από το αν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος.

Παραδείγματα:

1. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$\mathrm{f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3xz - 8yz}$.

Να βρεθεί η κλίση ∇f καθώς και ο Εσσιανός πίνακας.

Λύση:

Έχουμε

$\nabla \mathrm{f} = (2\mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\mathrm{z}, 2\mathrm{y} - \mathrm{x} - 8\mathrm{z}, 2\mathrm{z} + 3\mathrm{x} - 8\mathrm{y})$.

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -8 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$f(x,y) = x^2 + y^2 + xe^y$.

Να βρεθεί η κλίση ∇f καθώς και ο Εσσιανός πίνακας.

Λύση:

Έχουμε

$\nabla f = (2x+e^y, 2y + xe^y)$.

ο Εσσιανός πίνακας υπολογίζεται ως εξής

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & e^y \\ e^y & 2 + xe^y \end{bmatrix}$$

<u>Βιβλιογραφία:</u>

1. Λ. Τσίτσας. Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ , Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2002.
2. Finney, R. L. & Giordano, F. R. (2004). Απειροστικός Λογισμός ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
3. Διανυσματικός Λογισμός Jerold E. Mardsen & Antony J. Tromba (2017) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
4. Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών και Διανυσματική Ανάλυση, Βαγγέλης Σπανδάγος (1993) Εκδόσεις Αίθρα.
5. George B. Thomas, Jr Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙ , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2012.
6. L.J.Goldstein, D.C. Lay, D.I. Schneider, N.H. Asmar, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Επιμέλεια Ελληνικής Έκδοσης Εμ. Ν. Κρητικός. Εκδόσεις Broken Hill (2020).