



Πιθανότητες – Εισαγωγή

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Πιθανότητες

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με:

- Τα πειράματα τύχης
- Τους χώρους των πιθανοτήτων
- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων
- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων στο excel

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Πολλά φαινόμενα έχουν την ιδιότητα η επανειλημμένη παρατήρησή τους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα.
- Για παράδειγμα, αν αφήνουμε μια μπάλα που ήταν αρχικά ακίνητη να πέσει από ύψος d μέτρων μέσα σε έναν κύλινδρο χωρίς αέρα, θα φτάνει στο έδαφος πάντα μετά από $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ δευτερόλεπτα, όπου το g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2 .

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά φαινόμενα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα, των οποίων η επανειλημμένη παρατήρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες δεν οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα.
- Λόγου χάρη, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές, οι εμφανίσεις γραμμάτων (Γ) ή κεφαλής (Κ) εναλλάσσονται με έναν φαινομενικά ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Τέτοιου είδους φαινόμενα τα θεωρούμε ως **τυχαία**, και ένα πείραμα όπως αυτό που μόλις περιγράφηκε το ονομάζουμε **πείραμα τύχης**.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Τα πειράματα τύχης, ή αλλιώς τυχαία πειράματα, είναι λοιπόν εκείνα για τα οποία η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται απλά καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Ένα πιο απλό παράδειγμα είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι θα είναι Κ ή Γ, θα ανήκει δηλαδή στο σύνολο $\{K, \Gamma\}$.

Παραδείγματα

Άλλα παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι:

- Η ρίψη ενός ζαριού
- Το τράβηγμα ενός χαρτιού από μία συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά
- Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μίας μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα

Παραδείγματα

- Η καταγραφή των υψών των ατόμων ενός δοθέντος πληθυσμού
- Η επιλογή ενός βόλου από ένα δοχείο το οποίο περιέχει s βόλους, οι οποίοι φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \dots, s$.

Δειγματικός Χώρος

- Είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
- Συμβολισμοί: Ω , S

Δειγματικός Χώρος

Παράδειγμα:

Για τη ρίψη του ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6.

Δειγματικός Χώρος

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να έχει:

- **Πεπερασμένο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αποτελέσματα ρίψης ζαριού) ή
- **Άπειρο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αριθμός προσπαθειών μέχρι την επίτευξη ενός στόχου).

Δειγματικός Χώρος – Παραδείγματα

- Αν θεωρήσουμε το πείραμα της παρατήρησης του αποτελέσματος που θα φέρει η ρίψη ενός ζαριού, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Δειγματικός Χώρος – Παραδείγματα

- Αν θεωρήσουμε το πείραμα της παρατήρησης του αποτελέσματος που θα φέρει η ρίψη δύο ζαριών, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{(x, y) : x = 1, \dots, 6, y = 1, \dots, 6\}$$

		2ο ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
1ο ζάρι	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Ενδεχόμενα

- Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Συμβολισμός: $A, B, \dots$

Ισχύει ότι: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ για κάθε ενδεχόμενο A .

- Όπου το $\emptyset$ ή $\{ \}$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο ενώ
- Ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Στοιχειώδη Ενδεχόμενα

- Τα ενδεχόμενα που αποτελούνται από ένα μόνο στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω , δηλαδή είναι της μορφής

$$A = \{\omega\}$$

λέγονται **στοιχειώδη ή απλά ενδεχόμενα**.

Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

- Έστω το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού.

Δειγματικός χώρος πειράματος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Τα παρακάτω σύνολα αποτελούν ενδεχόμενα του τυχαίου πειράματος.

Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

Παρατήρηση:

Ένα ενδεχόμενο E εμφανίζεται σε μια πραγματοποίηση ενός πειράματος (δοκιμή) όταν το αποτέλεσμα ω της δοκιμής ανήκει στο ενδεχόμενο E , δηλαδή $\omega \in E$.

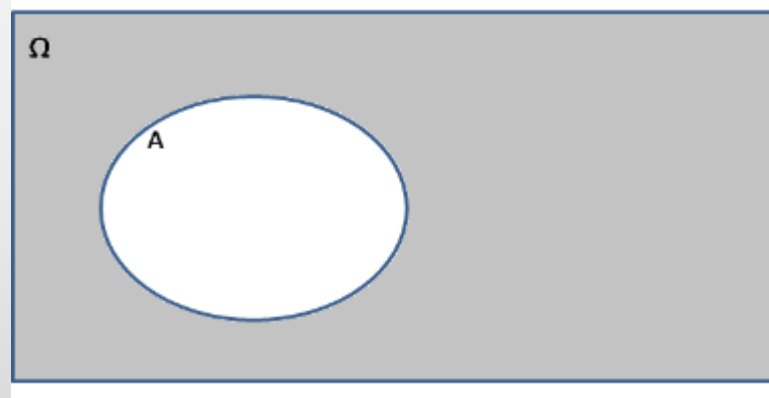
Ενδεχόμενα – Παραδείγματα

Για παράδειγμα, αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι $\omega = 4$, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα E_1 , E_2 πραγματοποιήθηκαν, ενώ τα ενδεχόμενα E_3 , E_4 , E_5 δεν πραγματοποιήθηκαν.

Συμβολικά: $\omega \in E_1, \omega \in E_2, \omega \notin E_3, \omega \notin E_4, \omega \notin E_5$.

Γραφική Αναπαράσταση Ενδεχομένων

Η γραφική αναπαράσταση ενδεχομένων γίνεται με τα διαγράμματα Venn

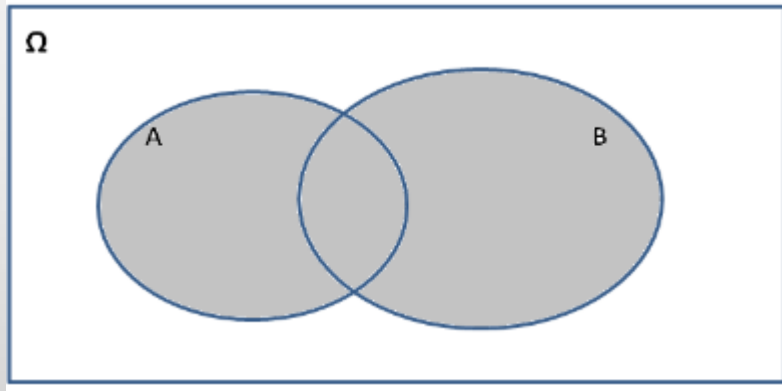


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- **Ένωση** δύο ενδεχομένων A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A \cup B$ το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B .

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ ή } \omega \in B$$

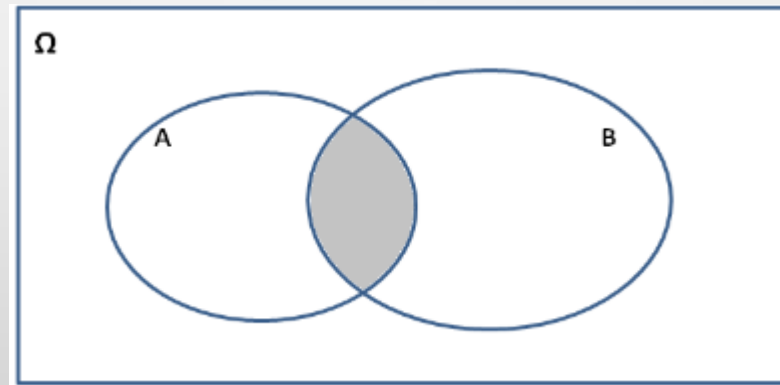


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Τομή δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A \cap B$ το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων A και B .

Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ και } \omega \in B$$

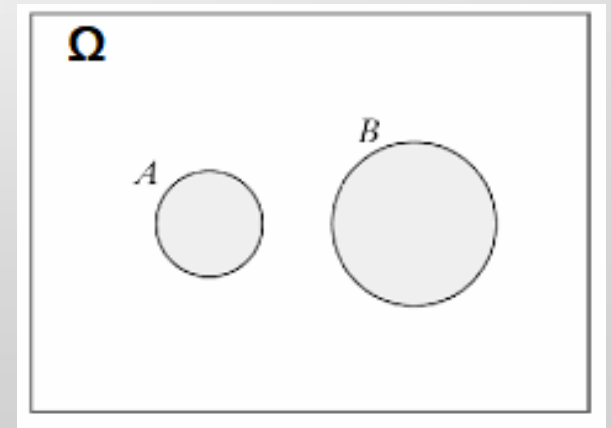


Πράξεις με Ενδεχόμενα

Αν δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία, ισχύει δηλαδή ότι

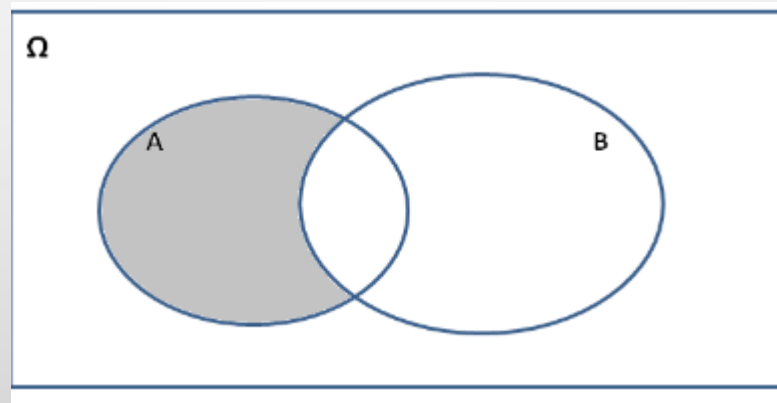
$$A \cap B = \emptyset$$

Τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα ή ασυμβιβαστα .



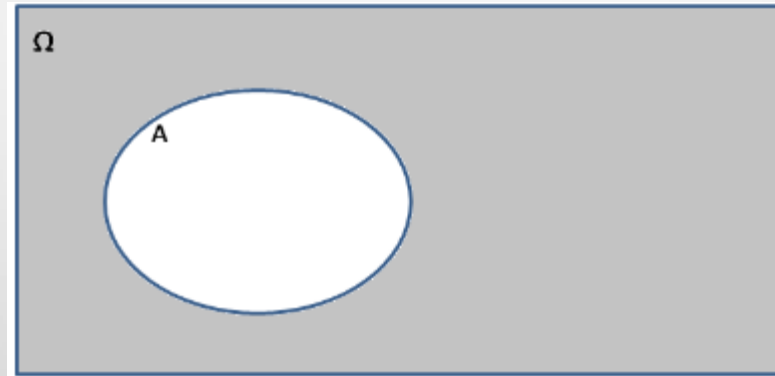
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Διαφορά δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A - B$ και περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που περιέχονται στο A και δεν περιέχονται στο B .



Πράξεις με Ενδεχόμενα

Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A'$ ή $\Gamma = A^c$ που περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου Ω που δεν περιέχονται στο A .



Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα «αμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές. Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει K την πρώτη φορά και B το ενδεχόμενο να έρθει το ίδιο αποτέλεσμα και τις δύο φορές.

Δηλαδή:

$$A = \{KK, ΚΓ\}$$

$$B = \{KK, ΓΓ\}$$

Παραδείγματα

Έχουμε επίσης ότι

$$A \cup B = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΓ\}$$

$$A \cap B = \{ΚΚ\}$$

$$A - B = \{ΚΓ\}$$

$$B - A = \{ΓΓ\}$$

$$A^c = \{ΓΚ, ΓΓ\}$$

$$B^c = \{ΚΓ, ΓΚ\}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2:

Έστω τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Παραδείγματα

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα 4 ή αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_2 \cup E_4 = \{1,2,4\}$$

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα άρτιο αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_1 \cap E_4 = \{2\}$$

Παραδείγματα

- Το συμπλήρωμα του ενδεχόμενου να έχουμε άρτιο αποτέλεσμα είναι να έχουμε περιττό

$$E'_1 = E_3$$

- Το ενδεχόμενο να έχουμε περιττό αριθμό αλλά όχι μεγαλύτερο του 4 είναι το ενδεχόμενο

$$E_3 - E_5 = \{1,3\}$$

Ιδιότητες των Πράξεων των Ενδεχομένων

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \cup A' = \Omega$
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
5. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'.$

Πράξεις με Ενδεχόμενα και Φυσική Ερμηνεία

- Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και το ω είναι ένα αποτέλεσμα του ίδιου πειράματος.
- Στην αριστερή στήλη είναι διατυπωμένες διάφορες σχέσεις του A και B στην κοινή γλώσσα και στην δεξιά έχουμε τις σχέσεις αυτές στη γλώσσα των συνόλων.

Πράξεις με Ενδεχόμενα και Φυσική Ερμηνεία

Πραγματοποιείται το A	$\omega \in A$
Το A δεν πραγματοποιείται	$\omega \notin A \quad \text{ή} \quad \omega \in A'$
Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B (Πραγματοποιείται το A ή το B)	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται συγχρόνως το A και το B (Πραγματοποιείται το A και το B)	$\omega \in A \cap B$
Πραγματοποιείται <u>μόνο</u> το A	$\omega \in A - B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B	$\omega \in (A \cap B)'$
Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B	$\omega \in (A - B) \cup (B - A)$

Ορισμός της Πιθανότητας

- Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας $P(A)$ είναι ο γνωστός ως κλασσικός ορισμός, και έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια.
- Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Όπου:

$N(A)$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου A .

$N(\Omega)$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου Ω .

Ορισμός της Πιθανότητας

Για να ισχύει κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προϋποθέσεις :

- Το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματοχώρο.
- Όλα τα απλά (στοιχειώδη) γεγονότα να έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να συμβούν.

Ορισμός της Πιθανότητας

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα «αμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές. Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει Κ την πρώτη φορά και B το ενδεχόμενο να έρθει αποτέλεσμα Κ και τις δύο φορές.

Ορισμός της Πιθανότητας

Παράδειγμα 1:

Δηλαδή:

$$A = \{KK, KΓ\}$$

$$B = \{KK\}$$

Έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(B) = \frac{1}{4} = 25\%$$

Ορισμός της Πιθανότητας

Παράδειγμα 2:

Έστω τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Ορισμός της Πιθανότητας

Παράδειγμα 2:

Έχουμε:

$$P(E_1)=3/6=1/2,$$

$$P(E_2)=1/6,$$

$$P(E_3)=3/6=1/2,$$

$$P(E_4)=2/6=1/3,$$

$$P(E_5)=2/6=1/3$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

Ορισμός:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}, i = 1, 2, \dots$ αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$
- $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \dots = 1$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ ορίζουμε

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \dots + P(\omega_{i_k})$$

Βασικές Ιδιότητες των Πιθανοτήτων

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω .

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω
 - $P(A^c) = 1 - P(A)$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$
- Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Κανόνας της Πρόσθεσης για Τρία Ενδεχόμενα

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

- Ο υπολογισμός πιθανοτήτων στο excel γίνεται με την συνάρτηση

PROB

- **PROB (Συνάρτηση PROB)**

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

- Η συνάρτηση **PROB** επιστρέφει την πιθανότητα οι τιμές μιας περιοχής να βρίσκονται μεταξύ δύο ορίων.
- Εάν δεν δίνεται ανώτερο_όριο, η συνάρτηση επιστρέφει την πιθανότητα οι τιμές του ορίσματος x_εύρος να είναι ίσες με το κατώτερο_όριο.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

- Σύνταξη:

PROB(x_εύρος; εύρος_πιθανοτήτων; [κατώτερο_όριο]; [ανώτερο_όριο])

Η σύνταξη της συνάρτησης PROB περιλαμβάνει τα παρακάτω ορίσματα:

- **X_εύρος** Υποχρεωτικό. Η περιοχή των αριθμητικών τιμών της μεταβλητής x για τις οποίες υπάρχουν σχετικές πιθανότητες.
- **Εύρος_πιθανοτήτων** Υποχρεωτικό. Ένα σύνολο πιθανοτήτων που σχετίζεται με τις τιμές του ορίσματος x_εύρος.
- **Κατώτερο_όριο** Προαιρετικό. Το κάτω φράγμα της τιμής για την οποία θέλετε την πιθανότητα.
- **Ανώτερο_όριο** Προαιρετικό. Το προαιρετικό άνω φράγμα της τιμής για την οποία θέλετε την πιθανότητα.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Εάν οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων είναι ≤ 0 ή εάν οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων είναι > 1 , η συνάρτηση PROB επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ή #NAME! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν το άθροισμα των τιμών του ορίσματος εύρος_πιθανοτήτων δεν ισούται με 1, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την τιμή #ΑΡΙΘ! ή #NAME! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν παραλειφθεί το όρισμα ανώτερο_όριο, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την πιθανότητα να ισούται η τιμή με το κατώτερο_όριο.
- Εάν τα ορίσματα x_εύρος και εύρος_πιθανοτήτων περιέχουν διαφορετικό αριθμό σημείων δεδομένων, η συνάρτηση PROB επιστρέφει την τιμή σφάλματος #Δ/Υ.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Παράδειγμα:

- Αντιγράψτε τα δεδομένα του παραδείγματος στον πίνακα που ακολουθεί και, στη συνέχεια, επικολλήστε τα στο κελί A1 ενός νέου φύλλου εργασίας του **Excel**.
- Για να εμφανιστούν τα αποτελέσματα των τύπων, επιλέξτε τους, πατήστε το πλήκτρο *F2* και, στη συνέχεια, πατήστε το πλήκτρο **Enter**. Εάν χρειάζεται, μπορείτε να ρυθμίσετε το πλάτος των στηλών για να βλέπετε ολόκληρα τα δεδομένα.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων στο Excel

Δεδομένα		
Τιμή του x	Πιθανότητα	
0	0,2	
1	0,3	
2	0,1	
3	0,4	
Τύπος	Περιγραφή	Α ποτέλεσμα
=PROB(A3:A6;B3:B6;2)	Η πιθανότητα το x να είναι 2.	0,1
=PROB(A3:A6;B3:B6;1;3)	Η πιθανότητα να κυμαίνεται το x μεταξύ του 1 και 3.	0,8

Παράδειγμα

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια διαδοχικά και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεων τους.

Να βρεθούν

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος

β) Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων

Παράδειγμα

Παράδειγμα:

γ) Η πιθανότητα το άθροισμα των ζαριών να είναι τουλάχιστον 3 και το πολύ 7

δ) Η πιθανότητα τό άθροισμα των ενδείξεων να είναι τουλάχιστον 8

ε) Η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι το πολύ 9

Παράδειγμα

α) Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις καθώς και το αποτέλεσμα του πειράματος σε κάθε περίπτωση.

Επομένως σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Παράδειγμα

		Ζάρι 1						
		1	2	3	4	5	6	
	1	2	3	4	5	6	7	
	2	3	4	5	6	7	8	
Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9	
	4	5	6	7	8	9	10	
	5	6	7	8	9	10	11	
	6	7	8	9	10	11	12	

Παράδειγμα

β) Εφόσον τα ζάρια είναι «δίκαια» κάθε περίπτωση έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί. Επίσης συνολικά όλες οι περιπτώσεις είναι 36. Επομένως η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι ο αριθμός i , $i = 2, 3, \dots, 12$ είναι:

$$P(i) = \frac{\text{Πλήθος Περιπτώσεων όπου η ένδειξη είναι ο αριθμός } i}{36}$$

Παράδειγμα

Ο υπολογισμός των συχνοτήτων και των πιθανοτήτων των απλών ενδεχομένων γίνεται στο excel με την βοήθεια των συναρτήσεων **COUNTIF** και στην συνέχεια με απλές πράξεις.

Για παράδειγμα αν έχουμε των παρακάτω πίνακα ενδείξεων στο excel, για να υπολογίσουμε την συχνότητα της ένδειξης «6» γράφουμε

=COUNTIF(C4:H9; "6") ή =COUNTIF(C4:H9; C8)

Ενώ για την πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι ο αριθμός «6»

Γράφουμε

=COUNTIF(C4:H9; "6")/36 ή =COUNTIF(C4:H9; C8)/36

Παράδειγμα

=COUNTIF(C4:H9; "6") ή =COUNTIF(C4:H9; C8)

=COUNTIF(C4:H9; "6")/36 ή =COUNTIF(C4:H9; C8)/36

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				Ζάρι 1									
2													
3			1	2	3	4	5	6			Ένδειξη	Συχνότητα	Πιθανότητα
4		1	2	3	4	5	6	7			2	1	2,78%
5		2	3	4	5	6	7	8			3	2	5,56%
6	Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9			4	3	8,33%
7		4	5	6	7	8	9	10			5	4	11,11%
8		5	6	7	8	9	10	11			6	5	13,89%
9		6	7	8	9	10	11	12			7	6	16,67%
10											8	5	13,89%
11											9	4	11,11%
12											10	3	8,33%
13											11	2	5,56%
14											12	1	2,78%
15											Σύνολο	36	
16													

Παράδειγμα

γ) Για τον υπολογισμό της πιθανότητας το άθροισμα των ζαριών να είναι τουλάχιστον 3 και το πολύ 7 έχουμε:

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) = 55,56\%$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας γίνεται στο excel με την συνάρτηση **PROB**

Σύνταξη:

=PROB(range, prob_range, [lower_limit], [upper_limit])

Παράδειγμα

Εδώ συγκεκριμένα

=PROB(K4:K14;M4:M14;K5;K9)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				Ζάρι 1									
2													
3			1	2	3	4	5	6			Ένδειξη	Συχνότητα	Πιθανότητα
4		1	2	3	4	5	6	7			2	1	2,78%
5		2	3	4	5	6	7	8			3	2	5,56%
6	Ζάρι 2	3	4	5	6	7	8	9			4	3	8,33%
7		4	5	6	7	8	9	10			5	4	11,11%
8		5	6	7	8	9	10	11			6	5	13,89%
9		6	7	8	9	10	11	12			7	6	16,67%
10											8	5	13,89%
11											9	4	11,11%
12											10	3	8,33%
13											11	2	5,56%
14											12	1	2,78%
15											Σύνολο	36	
16													

Παράδειγμα

δ) Όμοια η πιθανότητα τό άθροισμα των ενδείξεων να είναι τουλάχιστον 8 υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12) \\ &= 41,67\% \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της παραπάνω πιθανότητας θα γίνει στο excel πάλι με την συνάρτηση **PROB**

=PROB(K4:K14;M4:M14;K10;K14)

Παράδειγμα

ε) Η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεων να είναι το πολύ 9 είναι

$$P(X \leq 9) = P(2) + P(3) + P(4) + \dots + P(9) = 83,33\%$$

ή

$$P(X \leq 9) = 1 - P(X \geq 10) = 1 - P(10) + P(11) + P(12) = 83,33\%$$

Για τον υπολογισμό στο excel έχουμε

=PROB(K4:K14;M4:M14;K4;K11)

Ασκήσεις

1. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις πιθανές τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής X και τις πιθανότητες αυτών.

	A	B	C
1	Value x	Probability	Result
2	0	10%	
3	1	15%	
4	2	15%	
5	3	20%	
6	4	40%	

Ασκήσεις

Να βρείτε τις πιθανότητες:

- α) Η τυχαία Μεταβλητή X να μην πάρει την τιμή 0
- β) Η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή 0 ή 2 ή 4
- γ) Η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή μεγαλύτερη του 1
- δ) Η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή μικρότερη του 3
- ε) Η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή τουλάχιστον 1 και το πολύ 3

Ασκήσεις

2. Οι φοιτητές ενός Μαθηματικού τμήματος επιλέγουν στο πρώτο έτος την ενότητα ΜΑΘ1 σε ποσοστό 60% και την ΜΑΘ2 σε ποσοστό 50%, ενώ το ποσοστό των φοιτητών που επιλέγουν και τις δύο θεματικές ενότητες είναι 30%. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν πρωτοετή φοιτητή του μαθηματικού τμήματος να βρεθούν οι πιθανότητες:

A. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει τουλάχιστον μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.

B. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει ακριβώς μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.

Ασκήσεις

3. Σε μια μελέτη των αιτιών καταστροφής του οδοστρώματος βρέθηκε ότι στο 8% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε αστοχία υλικού, στο 85% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε κατασκευαστική κακοτεχνία, ενώ στο 5% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε ένα συγκεκριμένο έλεγχο καταστροφής οδοστρώματος υπάρχει:

- A. Αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία.
- B. Αστοχία υλικού αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία.
- Γ. Το πολύ ένα είδος από τις αναφερόμενες αιτίες.
- Δ. Καμία από τις δύο αναφερόμενες αιτίες.

Ασκήσεις

4. Σε μια επιχείρηση το 45% των εργαζομένων είναι γυναίκες, το 55% είναι πτυχιούχοι και το 25% είναι γυναίκες πτυχιούχοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο εργαζόμενος να είναι:

α) γυναίκα ή πτυχιούχος

β) γυναίκα και όχι πτυχιούχος

γ) άνδρας πτυχιούχος

δ) άνδρας ή πτυχιούχος..

Ασκήσεις

5. Η πιθανότητα ένας άνθρωπος να συναντήσει στην πόλη που διαμένει σε ένα έτος έναν παλιό συμμαθητή του είναι $0,02$. Η αντίστοιχη πιθανότητα να συναντήσει στο δρόμο ένα συνάδελφο είναι $0,10$, ενώ υπάρχει πιθανότητα $0,01$ σε διάρκεια ενός έτους να συναντήσει και συμμαθητή και συνάδελφο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε ένα έτος, ένας άνθρωπος στην πόλη του

- a) Να συναντήσει μόνο παλιό συμμαθητή
- b) Να συναντήσει μόνο συνάδελφο
- c) Να συναντήσει συνάδελφο ή συμμαθητή
- d) Να μην συναντήσει ούτε συνάδελφο ούτε συμμαθητή.

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sons