



Πιθανότητες – Εισαγωγή

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ , Β ΜΑΧΙΜΟΙ, Β ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ,
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

Πιθανότητες

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε με:

- Τα πειράματα τύχης
- Τους χώρους των πιθανοτήτων
- Τον υπολογισμό πιθανοτήτων

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Πολλά φαινόμενα έχουν την ιδιότητα η επανειλημμένη παρατήρησή τους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Για παράδειγμα, αν αφήνουμε μια μπάλα που ήταν αρχικά ακίνητη να πέσει από ύψος d μέτρων μέσα σε έναν κύλινδρο χωρίς αέρα, θα φτάνει στο έδαφος πάντα μετά από $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ δευτερόλεπτα, όπου το g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2 .

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα αιτιοκρατικά ή ντετερμινιστικά φαινόμενα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα, των οποίων η επανειλημμένη παρατήρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες δεν οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Λόγου χάρη, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές, οι εμφανίσεις γραμμάτων (Γ) ή κεφαλής (Κ) εναλλάσσονται με έναν φαινομενικά ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Τέτοιου είδους φαινόμενα τα θεωρούμε ως **τυχαία**, και ένα πείραμα όπως αυτό που μόλις περιγράφηκε το ονομάζουμε **πείραμα τύχης**.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Τα πειράματα τύχης, ή αλλιώς τυχαία πειράματα, είναι λοιπόν εκείνα για τα οποία η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται απλά καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα.

Τυχαίο Πείραμα vs. Ντετερμινιστικό Πείραμα

- Ένα πιο απλό παράδειγμα είναι η ρίψη ενός νομίσματος.
- Αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι θα είναι Κ ή Γ.
- Το αποτέλεσμα δηλαδή του πειράματος θα ανήκει δηλαδή στο σύνολο $\{Κ, Γ\}$.

Παραδείγματα

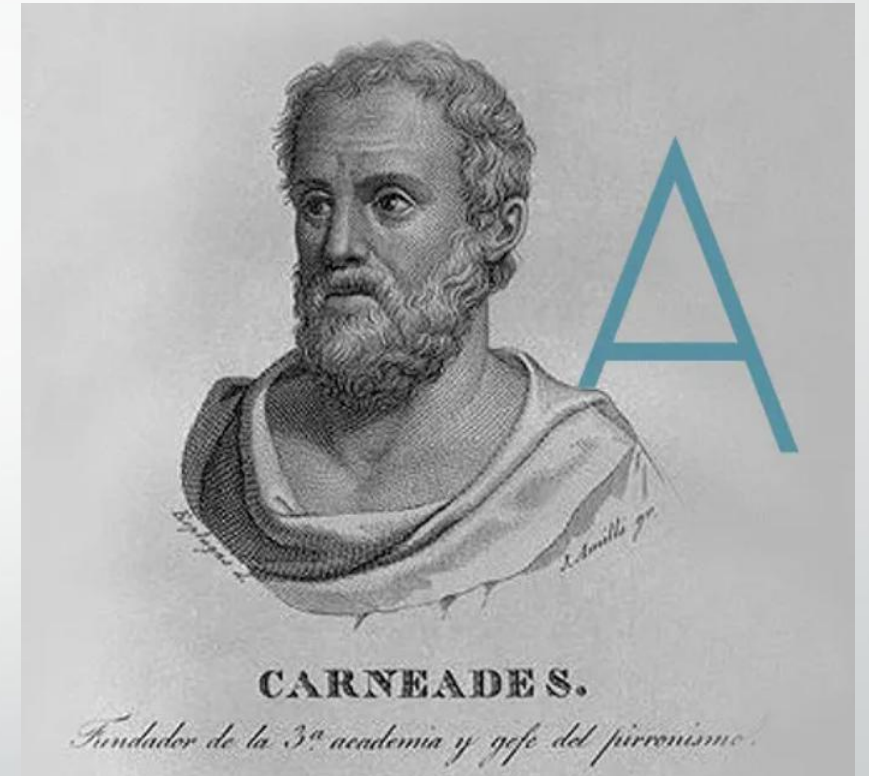
Άλλα παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι:

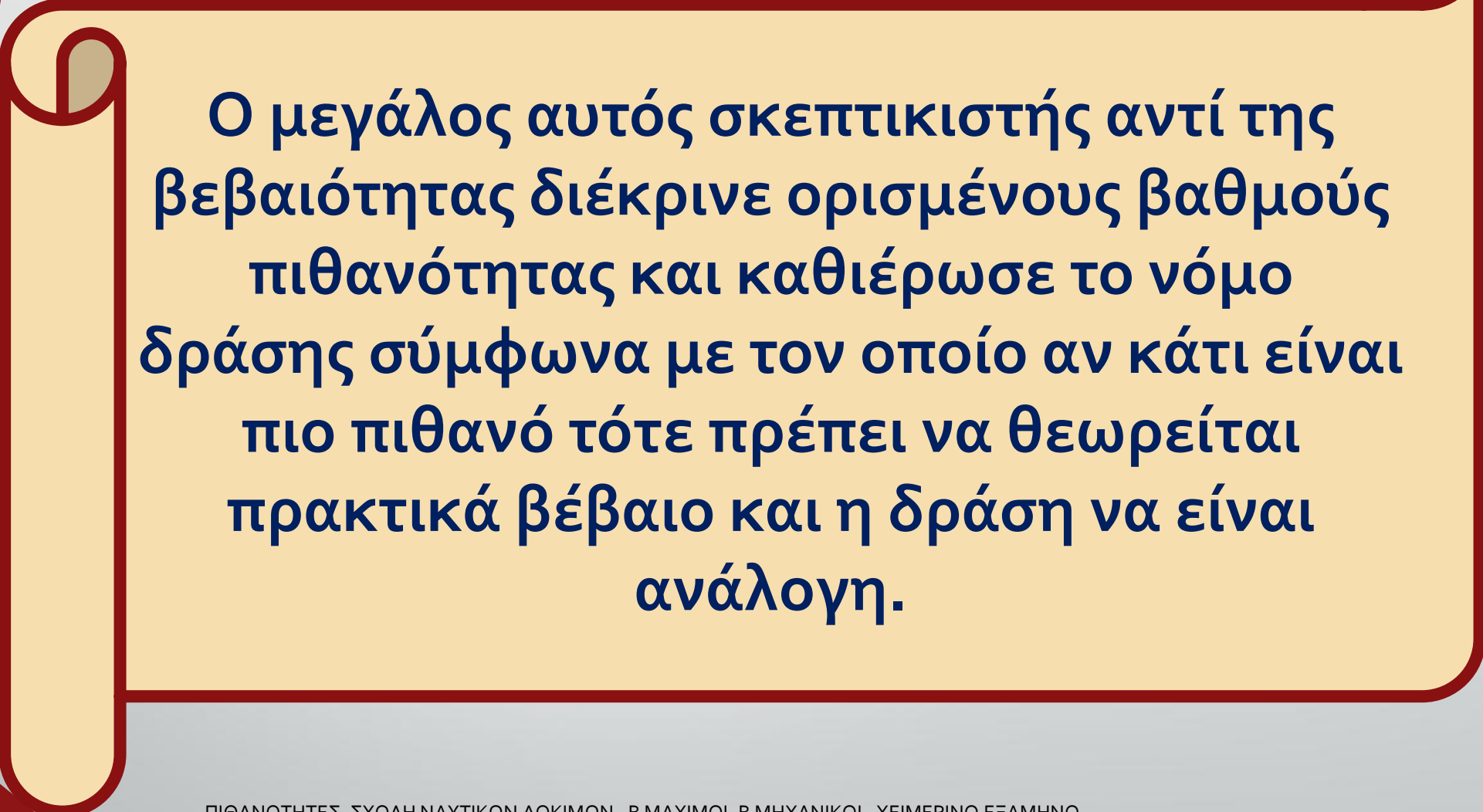
- Η ρίψη ενός ζαριού.
- Το τράβηγμα ενός χαρτιού από μία συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά.
- Η καταγραφή της διάρκειας ζωής μίας μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα.

Παραδείγματα

- Η καταγραφή των υψών των ατόμων ενός δοθέντος πληθυσμού.
- Η επιλογή ενός βόλου από ένα δοχείο το οποίο περιέχει s βόλους, οι οποίοι φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \dots, s$.

Η παλαιότερη αναφορά
στην έννοια της
πιθανότητας οφείλεται
στον Έλληνα φιλόσοφο
Καρνεάδη
(219 – 129 π.Χ.).



A decorative scroll graphic with a yellow background and a dark red border. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges showing a dark red binding. The text is written in a dark blue, serif font.

Ο μεγάλος αυτός σκεπτικιστής αντί της
βεβαιότητας διέκρινε ορισμένους βαθμούς
πιθανότητας και καθιέρωσε το νόμο
δράσης σύμφωνα με τον οποίο αν κάτι είναι
πιο πιθανό τότε πρέπει να θεωρείται
πρακτικά βέβαιο και η δράση να είναι
ανάλογη.

Δειγματικός Χώρος

- **Δειγματικό Χώρο** ονομάζουμε το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
- Συμβολισμοί: Ω , S .

Παράδειγμα 1

Για τη ρίψη του ενός ζαριού ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6.

Είδη Δειγματικών Χώρων

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να έχει:

- **Πεπερασμένο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αποτελέσματα ρίψης ζαριού) ή
- **Άπειρο πλήθος στοιχείων** (π.χ. αριθμός προσπαθειών μέχρι την επίτευξη ενός στόχου).

Παράδειγμα 2

Αν θεωρήσουμε το πείραμα της παρατήρησης του αποτελέσματος που θα φέρει η ρίψη δύο ζαριών, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{(x, y) : x = 1, \dots, 6, y = 1, \dots, 6\}$$

Πίνακας Διπλής Εισόδου

		2ο ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
1ο ζάρι	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Ενδεχόμενα

- Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Συμβολισμός: $A, B, \dots$

Ισχύει ότι: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ για κάθε ενδεχόμενο A .

- Όπου το $\emptyset$ ή $\{ \}$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο ενώ
- Ο δειγματικός χώρος Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Στοιχειώδη Ενδεχόμενα

- Τα ενδεχόμενα που αποτελούνται από ένα μόνο στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω , δηλαδή είναι της μορφής

$$A = \{\omega\}$$

λέγονται **στοιχειώδη ή απλά ενδεχόμενα**.

Παράδειγμα 3

- Έστω το πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού.

Δειγματικός χώρος πειράματος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Τα παρακάτω σύνολα αποτελούν ενδεχόμενα του τυχαίου πειράματος.

Παράδειγμα 3

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Παράδειγμα 3

Παρατήρηση:

Ένα ενδεχόμενο E εμφανίζεται σε μια πραγματοποίηση ενός πειράματος (δοκιμή) όταν το αποτέλεσμα ω της δοκιμής ανήκει στο ενδεχόμενο E , δηλαδή $\omega \in E$.

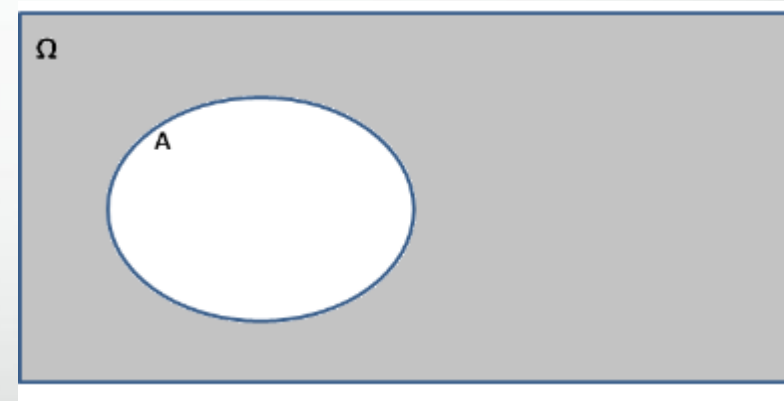
Παράδειγμα 3

Για παράδειγμα, αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι $\omega = 4$, τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα E_1 , E_2 πραγματοποιήθηκαν, ενώ τα ενδεχόμενα E_3 , E_4 , E_5 δεν πραγματοποιήθηκαν.

Συμβολικά: $\omega \in E_1, \omega \in E_2, \omega \notin E_3, \omega \notin E_4, \omega \notin E_5$.

Γραφική Αναπαράσταση Ενδεχομένων

Η γραφική αναπαράσταση ενδεχομένων γίνεται με τα διαγράμματα Venn

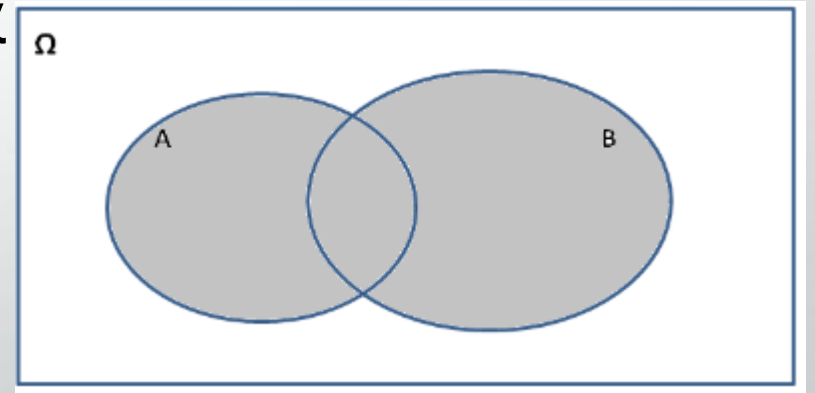


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Ένωση δύο ενδεχομένων A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A \cup B$ το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B .

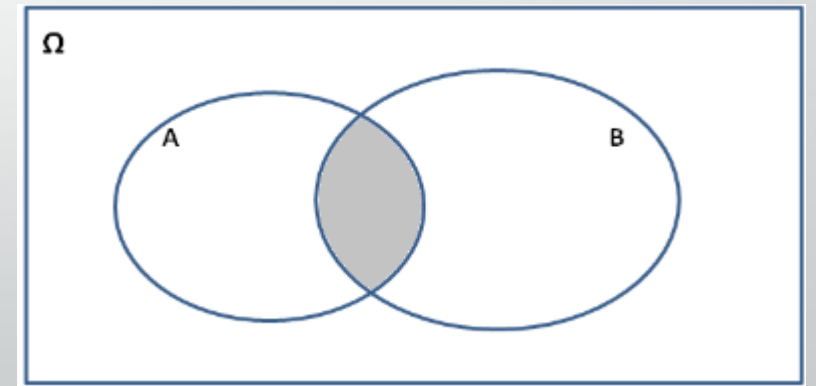
Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ ή } \omega \in B$$



Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Τομή δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A \cap B$ το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των ενδεχομένων A και B .
- Δηλαδή ισχύει ότι:
$$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \text{ και } \omega \in B$$

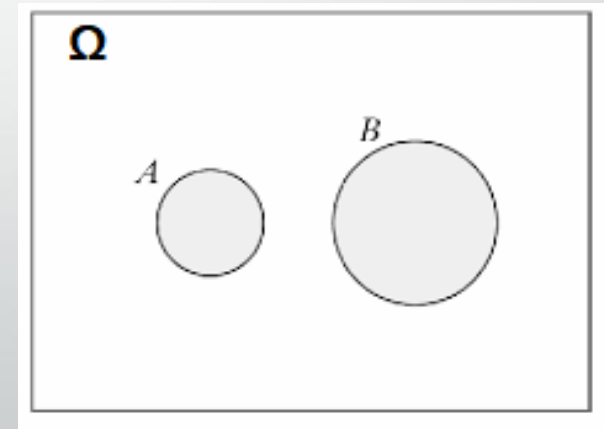


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Αν δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά στοιχεία, ισχύει δηλαδή ότι

$$A \cap B = \emptyset$$

Τότε λέμε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ξένα ή ασυμβίβαστα .

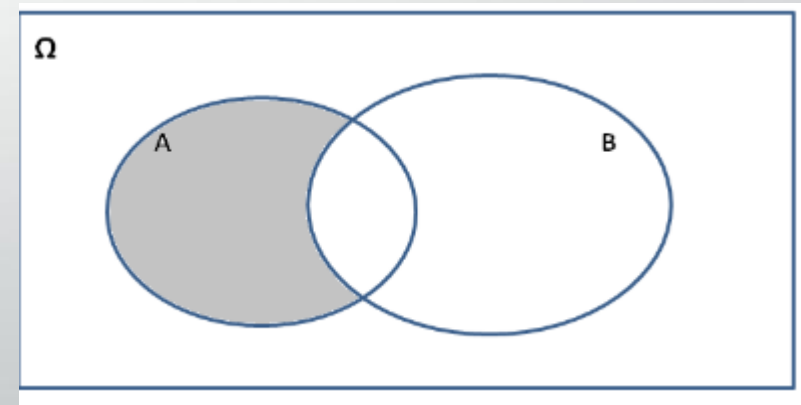


Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Διαφορά δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο

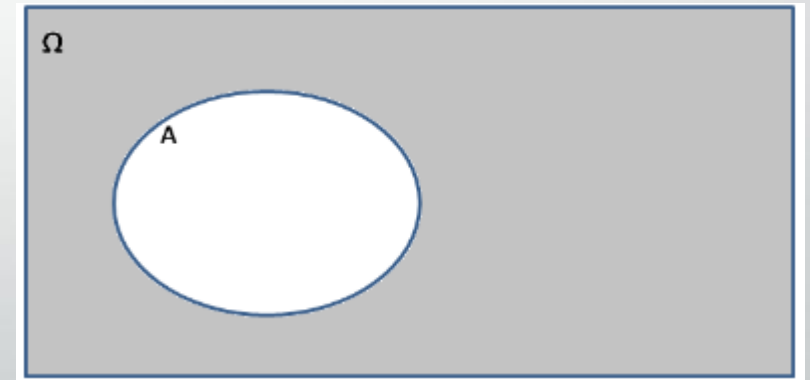
$$\Gamma = A - B$$

- Περιλαμβάνει τα αποτελέσματα που περιέχονται στο A και δεν περιέχονται στο B.



Πράξεις με Ενδεχόμενα

- Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω , είναι το ενδεχόμενο $\Gamma = A'$ ή $\Gamma = A^c$.
- Περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου Ω που δεν περιέχονται στο A .



Παράδειγμα 4

Ρίχνουμε ένα «αμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές.

Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

Παράδειγμα 4

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει K την πρώτη φορά και B το ενδεχόμενο να έρθει το ίδιο αποτέλεσμα και τις δύο φορές.

Δηλαδή:

$$A = \{KK, K\Gamma\}$$

$$B = \{KK, \Gamma\Gamma\}$$

Παράδειγμα 4

Έχουμε επίσης ότι

$$A \cup B = \{ΚΚ, ΚΓ, ΓΓ\}$$

$$A \cap B = \{ΚΚ\}$$

$$A - B = \{ΚΓ\}$$

$$B - A = \{ΓΓ\}$$

$$A^c = \{ΓΚ, ΓΓ\}$$

$$B^c = \{ΚΓ, ΓΚ\}$$

Παράδειγμα 5

Έστω τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Παράδειγμα 5

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα 4 ή αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_2 \cup E_4 = \{1,2,4\}$$

- Το ενδεχόμενο να έχουμε αποτέλεσμα άρτιο αριθμό μικρότερο του 3 είναι το ενδεχόμενο

$$E_1 \cap E_4 = \{2\}$$

Παράδειγμα 5

- Το συμπλήρωμα του ενδεχόμενου να έχουμε άρτιο αποτέλεσμα είναι να έχουμε περιττό

$$E'_1 = E_3$$

- Το ενδεχόμενο να έχουμε περιττό αριθμό αλλά όχι μεγαλύτερο του 4 είναι το ενδεχόμενο

$$E_3 - E_5 = \{1,3\}$$

Ιδιότητες των Πράξεων των Ενδεχομένων

1. $\emptyset \subset A$
2. $A \cup A' = \Omega$
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
5. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'.$

Πράξεις με Ενδεχόμενα και Φυσική Ερμηνεία

- Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και το ω είναι ένα αποτέλεσμα του ίδιου πειράματος.
- Στην αριστερή στήλη είναι διατυπωμένες διάφορες σχέσεις του A και B στην κοινή γλώσσα και στην δεξιά έχουμε τις σχέσεις αυτές στη γλώσσα των συνόλων.

Πράξεις με Ενδεχόμενα και Φυσική Ερμηνεία

Πραγματοποιείται το A	$\omega \in A$
Το A δεν πραγματοποιείται	$\omega \notin A \quad \text{ή} \quad \omega \in A'$
Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B (Πραγματοποιείται το A ή το B)	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται συγχρόνως το A και το B (Πραγματοποιείται το A και το B)	$\omega \in A \cap B$
Πραγματοποιείται <u>μόνο</u> το A	$\omega \in A - B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B	$\omega \in (A \cap B)'$
Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B	$\omega \in (A - B) \cup (B - A)$

Κλασικός Ορισμός της Πιθανότητας

- Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας $P(A)$ είναι ο γνωστός ως κλασσικός ορισμός, και έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια.
- Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Όπου:

$N(A)$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου A .

$N(\Omega)$: πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου Ω .

Κλασικός Ορισμός της Πιθανότητας

Για να ισχύει κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προϋποθέσεις :

- Το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματοχώρο.
- Όλα τα απλά (στοιχειώδη) γεγονότα να έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να συμβούν.

Παράδειγμα 6

Ρίχνουμε ένα «αμερόληπτο» νόμισμα δύο φορές. Εδώ ο δειγματικός χώρος (το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων) είναι

$$\Omega = \{KK, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ\}$$

Έστω A το ενδεχόμενο να έρθει Κ την πρώτη φορά και B το ενδεχόμενο να έρθει αποτέλεσμα Κ και τις δύο φορές.

Παράδειγμα 6

Δηλαδή:

$$A = \{KK, K\Gamma\}$$

$$B = \{KK\}$$

Έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Παράδειγμα 7

Έστω τα ενδεχόμενα της ρίψης ενός ζαριού

- $E_1 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι άρτιος αριθμός}\} = \{2, 4, 6\}.$
- $E_2 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι τέσσερα}\} = \{4\}.$
- $E_3 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός}\} = \{1, 3, 5\}.$
- $E_4 = \{\text{Το αποτέλεσμα του ζαριού αριθμός μικρότερος του 3}\} = \{1, 2\}.$
- $E_5 = \{\text{Το ζάρι φέρνει αριθμό μεγαλύτερο του τέσσερα}\} = \{5, 6\}$

Παράδειγμα 7

Έχουμε:

$$P(E_1)=3/6=1/2,$$

$$P(E_2)=1/6,$$

$$P(E_3)=3/6=1/2,$$

$$P(E_4)=2/6=1/3,$$

$$P(E_5)=2/6=1/3$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

Ορισμός:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}, i = 1, 2, \dots$ αντιστοιχίζουμε ένα πραγματικό αριθμό, τον οποίο συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$
- $P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \dots = 1$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας (Kolmogorov)

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου

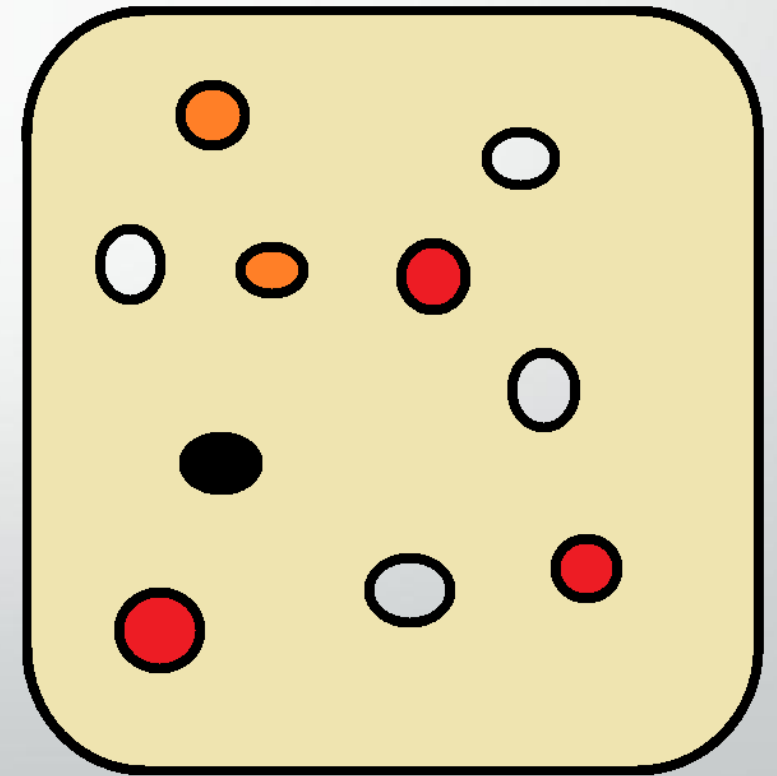
$A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \dots, \omega_{j_k}\}$ ορίζουμε

$$P(A) = P(\omega_{j_1}) + P(\omega_{j_2}) + \dots + P(\omega_{j_k})$$

Παράδειγμα 8

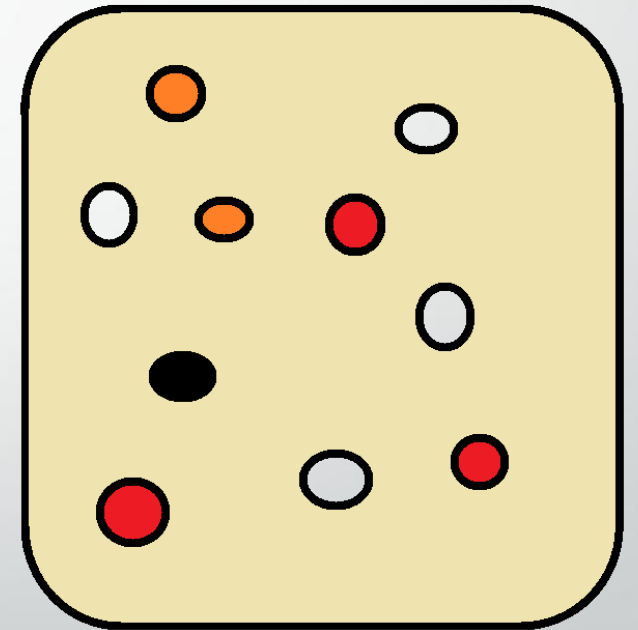
Έστω μία κάλπη που περιέχει 3 κόκκινες μπάλες, 2 πορτοκαλί, 4 άσπρες και 1 μαύρη.

Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα από την κάλπη και καταγράφουμε το χρώμα της.



Παράδειγμα 8

- A. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος και οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων τους.
- B. Να βρεθεί η πιθανότητα η μπάλα που θα επιλέξουμε να είναι πορτοκαλί ή μαύρη
- C. Να βρεθεί η πιθανότητα να μην επιλέξουμε μαύρη μπάλα.



Παράδειγμα 8 – Λύση

$$A.\Omega = \{A, K, M, \Pi\}$$

Όπου:

- A: Άσπρη μπάλα
- K: Κόκκινη μπάλα
- M: Μαύρη μπάλα
- Π: Πορτοκαλί μπάλα

Παράδειγμα 8 – Λύση

$$A. \Omega = \{A, K, M, \Pi\}$$

$$P(\{A\}) = \frac{4}{10}, P(\{K\}) = \frac{3}{10},$$

$$P(\{M\}) = \frac{1}{10}, P(\{\Pi\}) = \frac{2}{10}$$

Παράδειγμα 8 – Λύση

$$\mathbf{B.} \ B = \{M, \Pi\}$$

$$P(B) = P(\{M\}) + P(\{\Pi\}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

Παράδειγμα 8 – Λύση

$$C. C = \{A, K, \Pi\}$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\{A\}) + P(\{K\}) + P(\{\Pi\}) \\ &= \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Βασικές Ιδιότητες των Πιθανοτήτων

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω .

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Απλός Προσθετικός Νόμος)

- Για κάθε ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Προσθετικός Νόμος)

- Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .
Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

- Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων

- Κανόνας της Πρόσθεσης για Τρία Ενδεχόμενα

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Άσκηση 1

Οι φοιτητές ενός Μαθηματικού τμήματος επιλέγουν στο πρώτο έτος την ενότητα ΜΑΘ1 σε ποσοστό 60% και την ΜΑΘ2 σε ποσοστό 50%, ενώ το ποσοστό των φοιτητών που επιλέγουν και τις δύο θεματικές ενότητες είναι 30%. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν πρωτοετή φοιτητή του μαθηματικού τμήματος να βρεθούν οι πιθανότητες:

Άσκηση 1

- A. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει τουλάχιστον μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.
- B. Ο φοιτητής να έχει επιλέξει ακριβώς μία από τις παραπάνω δύο ενότητες.

Άσκηση 1 – Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: Ο φοιτητής έχει επιλέξει ΜΑΘ1

B: Ο φοιτητής έχει επιλέξει ΜΑΘ2

Έχουμε:

$$P(A) = 60\%$$

$$P(B) = 50\%$$

$$P(A \cap B) = 30\%$$

Άσκηση 1 – Λύση

A. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 60\% + 50\% - 30\%$$

$$P(A \cup B) = 80\%$$

Άσκηση 1 – Λύση

B. Έχουμε:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = 60\% - 30\% + 50\% - 30\%$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = 50\%$$

Άσκηση 2

Σε μια μελέτη των αιτιών καταστροφής του οδοστρώματος βρέθηκε ότι στο 8% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε αστοχία υλικού, στο 85% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε κατασκευαστική κακοτεχνία, ενώ στο 5% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε ένα συγκεκριμένο έλεγχο καταστροφής οδοστρώματος υπάρχει:

Άσκηση 2

- A. Αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία.
- B. Αστοχία υλικού αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία.
- C. Το πολύ ένα είδος από τις αναφερόμενες αιτίες.
- D. Καμία από τις δύο αναφερόμενες αιτίες.

Άσκηση 2 – Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα η καταστροφή του οδοστρώματος να έχει ως αιτία:

A: Αστοχία υλικού

B: Κατασκευαστική κακοτεχνία

Ισχύουν τα εξής:

$$P(A) = 8\%$$

$$P(B) = 85\%$$

$$P(A \cap B) = 5\%$$

Άσκηση 2 – Λύση

A. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 8\% + 85\% - 5\%$$

$$P(A \cup B) = 88\%$$

Άσκηση 2 – Λύση

B. Έχουμε:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) +$$

$$P(A - B) = 80\% - 5$$

$$P(A - B) = 3\%$$

Άσκηση 2 – Λύση

C. Έχουμε:

$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$$

$$P[(A \cap B)'] = 1 - 5\%$$

$$P[(A \cap B)'] = 100\% - 5\%$$

$$P[(A \cap B)'] = 95\%$$

Άσκηση 2 – Λύση

D. Έχουμε:

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$P[(A \cup B)'] = 1 - 88\%$$

$$P[(A \cup B)'] = 100\% - 88\%$$

$$P[(A \cup B)'] = 12\%$$

Άσκηση 3

Σε μια επιχείρηση το 45% των εργαζομένων είναι γυναίκες, το 55% είναι εργαζόμενοι που κατέχουν πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και το 25% είναι γυναίκες που κατέχουν πτυχίο . Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο εργαζόμενος να είναι:

Άσκηση 3

- A. Γυναίκα ή άτομο που κατέχει πτυχίο
- B. Γυναίκα και όχι πτυχιούχος
- C. Άνδρας πτυχιούχος
- D. Άνδρας ή πτυχιούχος..

Άσκηση 3 – Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα ο/η εργαζόμενος / εργαζόμενη που θα επιλέξουμε να:

A: Κατέχει πτυχίο

B: Είναι γυναίκα

Ισχύουν τα εξής:

$$P(A) = 55\%$$

$$P(B) = 45\%$$

$$P(A \cap B) = 25\%$$

Άσκηση 3 – Λύση

A. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 45\% + 55\% - 25\%$$

$$P(A \cup B) = 75\%$$

Άσκηση 3 – Λύση

B. Έχουμε:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) +$$

$$P(B - A) = 45\% - 25$$

$$P(B - A) = 20\%$$

Άσκηση 3 – Λύση

C. Έχουμε:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) +$$

$$P(A - B) = 55\% - 25$$

$$P(A - B) = 30\%$$

Άσκηση 3 – Λύση

D. Έχουμε:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$P(A \cup B') = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B)$$

$$P(A \cup B') = 55\% + 100\% - 45\% - 30\%$$

$$P(A \cup B') = 80\%$$

Άσκηση 4

Η πιθανότητα ένας άνθρωπος να συναντήσει στην πόλη που διαμένει σε ένα έτος έναν παλιό συμμαθητή του είναι $0,02$. Η αντίστοιχη πιθανότητα να συναντήσει στο δρόμο ένα συνάδελφο είναι $0,10$, ενώ υπάρχει πιθανότητα $0,01$ σε διάρκεια ενός έτους να συναντήσει και συμμαθητή και συνάδελφο. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε ένα έτος, ένας άνθρωπος στην πόλη του

Άσκηση 4

- A. Να συναντήσει μόνο παλιό συμμαθητή
- B. Να συναντήσει μόνο συνάδελφο
- C. Να συναντήσει συνάδελφο ή συμμαθητή
- D. Να μην συναντήσει ούτε συνάδελφο ούτε συμμαθητή.

Άσκηση 4 – Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα ο άνθρωπος στην διάρκεια ενός έτους συναντάει στην πόλη του

A: Παλιό συμμαθητή

B: Συνάδελφο

Ισχύουν τα εξής:

$$P(A) = 0,02$$

$$P(B) = 0,10$$

$$P(A \cap B) = 0,01$$

Άσκηση 4 – Λύση

A. Έχουμε:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = 0,02 - 0,01$$

$$P(A - B) = 0,01$$

Άσκηση 4 – Λύση

B. Έχουμε ισοδύναμα:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = 0,10 - 0,01$$

$$P(B - A) = 0,09$$

Άσκηση 4 – Λύση

C. Έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,02 + 0,10 - 0,01$$

$$P(A \cup B) = 0,09$$

Άσκηση 4 – Λύση

D. Έχουμε:

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$P[(A \cup B)'] = 1 - 0,11$$

$$P[(A \cup B)'] = 0,89$$

Άσκηση 5

Ένα κουτί περιέχει 5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες.

Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί.

Αν η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη ή γαλάζια μπάλα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή γαλάζια είναι $\frac{3}{5}$, τότε:

Άσκηση 5

- A. Να βρείτε τα x, y καθώς επίσης και πόσες μπάλες έχει το κουτί.
- B. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή πράσινη μπάλα.

Άσκηση 5 – Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι
 $\Omega = \{Κ, Π, Γ\}$

Όπου

Κ: Το ενδεχόμενο να τραβήξουμε κίτρινη μπάλα

Π: Το ενδεχόμενο να τραβήξουμε πράσινη μπάλα

Γ: Το ενδεχόμενο να τραβήξουμε πράσινη μπάλα

Άσκηση 5 – Λύση

Το κουτί περιέχει
5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες, συνολικά
περιέχει $(5 + x + y)$ μπάλες.

Άσκηση 5 – Λύση

Επομένως:

$$P(K) = \frac{5}{5 + x + y}$$

$$P(\Pi) = \frac{x}{5 + x + y}$$

$$P(\Gamma) = \frac{y}{5 + x + y}$$

Άσκηση 5 – Λύση

A. Αν $A = \{\Pi, \Gamma\}$

$$P(A) = P(\Pi \cup \Gamma) = P(\Pi) + P(\Gamma)$$

Άρα,

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{5 + x + y} + \frac{y}{5 + x + y}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$x + y = 15 \quad (1)$$

Άσκηση 5 – Λύση

A. Αν $B = \{K, \Gamma\}$

$$P(A) = P(K \cup \Gamma) = P(K) + P(\Gamma)$$

Άρα,

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{5+x+y} + \frac{y}{5+x+y}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$3x - 2y = 10 \quad (2)$$

Άσκηση 5 – Λύση

A. Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$x = 8 \text{ και } y = 7$$

Άσκηση 5 – Λύση

A. Άρα το κουτί περιέχει συνολικά
 $x + y + 5 = 8 + 7 + 5 = 20$ μπάλες.

Άσκηση 5 – Λύση

B. Αν $\Gamma = \{K, \Pi\}$

$$P(\Gamma) = P(K) + P(\Pi) = \frac{5}{5 + x + y} + \frac{8}{5 + x + y}$$

Όμως $x = 8$ και $y = 7$, άρα

$$P(\Gamma) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

Άσκηση 6

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι $\frac{3}{8}$, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B είναι $\frac{1}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από A και B είναι $\frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Άσκηση 6

- A. Να πραγματοποιηθεί το A.
- B. Να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα A και B.
- C. Να πραγματοποιηθεί το B.
- D. Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
- E. Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

Άσκηση 6 – Λύση

A. Ισχύουν τα εξής:

$$P(A - B) = \frac{3}{8}$$

$$P(B - A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Άσκηση 6 – Λύση

A. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ \frac{3}{8} &= P(A) - P(A \cap B) \quad (1) \end{aligned}$$

Άσκηση 6 – Λύση

A. Όμοια

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} = P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

Άσκηση 6 – Λύση

A. Επίσης έχουμε:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

Όμως από την (2)

$$P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 6 – Λύση

A. Άρα

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα

Άσκηση 6 – Λύση

Β. Έχουμε από την (1)

$$\frac{3}{8} = P(A) - P(A \cap B)$$

Και αφού $P(A) = \frac{1}{2}$,

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

Άσκηση 6 – Λύση

B. Δηλαδή

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Άσκηση 6 – Λύση

Γ. Έχουμε από την (2)

$$\frac{1}{4} = P(B) - P(A \cap B)$$

Και αφού $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$$\frac{2}{8} = P(B) - \frac{1}{8}$$

Άσκηση 6 – Λύση

C. Δηλαδή

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

Άσκηση 6 – Λύση

D. Έχουμε:

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$$

$$P[(A \cup B)'] = 1 - \frac{3}{4}$$

$$P[(A \cup B)'] = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 6 – Λύση

Ε. Έχουμε:

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A)$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$$

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{5}{8}$$

Άσκηση 7

Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης
 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Αν

$$P(\omega_3) = 2P(\omega_1) \text{ και } P(\omega_1) + P(\omega_3) = 2P(\omega_2)$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου.

Άσκηση 7 – Λύση

Ισχύουν τα εξής:

$$P(\omega_3) = 2P(\omega_1) \quad (1)$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_3) = 2P(\omega_2) \quad (2)$$

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1 \quad (3)$$

Άσκηση 7 – Λύση

Από (2), (3)

Δηλαδή,

$$P(\omega_2) + 2P(\omega_2) = 1$$

$$P(\omega_2) = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 7 – Λύση

Από (3)

$$P(\omega_1) + \frac{1}{3} + P(\omega_3) = 1$$

Δηλαδή,

$$P(\omega_1) = \frac{2}{3} - P(\omega_3)$$

Άσκηση 7 – Λύση

Όμως από (1)

$$P(\omega_3) = 2P(\omega_1)$$

Άρα,

$$P(\omega_3) = 2 \left[\frac{2}{3} - P(\omega_3) \right]$$

Άσκηση 7 – Λύση

Δηλαδή,

$$P(\omega_3) = \frac{4}{3} - 2P(\omega_3)$$

Συνεπώς,

$$P(\omega_3) = \frac{4}{9}$$

Άσκηση 7 – Λύση

Και εφόσον από (1), $P(\omega_3) = 2P(\omega_1)$

$$\frac{4}{9} = 2P(\omega_1)$$

$$P(\omega_1) = \frac{2}{9}$$

Άσκηση 7 – Λύση

Άρα

$$P(\omega_1) = \frac{2}{9}, P(\omega_2) = \frac{1}{3}, P(\omega_3) = \frac{4}{9}$$

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- Χαλικιάς Μ. Ποσοτική Ανάλυση και Στοιχεία Θεωρίας Αποφάσεων στη Διοίκηση και Οικονομία με Χρήση Λογισμικών EXCEL, ISALOS και SPSS, Εκδόσεις Broken Hill Publishers Ltd, 2021
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sons