Δεσμευμένη Πιθανότητα

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η πιθανότητα που έχουμε για την εμφάνιση ενός ενδεχομένου, ενός δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, είναι δυνατόν να διαφοροποιηθεί, αν σε κάποιο στάδιο του στοχαστικού πειράματος προκύψουν πρόσθετες πληροφορίες για την έκβαση του.

Παράδειγμα 1:

Ένας συμπαίχτης μας ρίχνει ένα αμερόληπτο ζάρι μία φορά. Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την πραγματοποίηση του ενδεχομένου

$A = \{1,4,6\}$. Ρωτάμε τον συμπαίχτη μας και μας δίνει την πληροφορία ότι το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός.

Παράδειγμα 1:

Πριν την πληροφορία η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, είναι

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

Παράδειγμα 1:

Μετά την πληροφορία ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός, ο δειγματικός χώρος του πειράματος περιοριστικέ στο σύνολο $\mathrm{B} = \{2,4,6\}$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A περιορίζονται στην πραγματοποίηση του ενδεχομένου $A \cap B$.

Παράδειγμα 1:

Επομένως η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B

$$P(A \mid B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\mathrm{B})} = \frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 1:

Παρατηρούμε ότι

$$P(A \mid B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\mathrm{B})} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{\mathrm{N}(\Omega)}}{\frac{N(B)}{\mathrm{N}(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

- Η παραπάνω συλλογιστική, μπορεί να εφαρμοσθεί γενικότερα και σε πεπερασμένους και σε μη πεπερασμένους δειγματικούς χώρους. Με ισοπίθανα ή μη απλά ενδεχόμενα.
- Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό.

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Ορισμός

Ορισμός:

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A, δεδομένου του B (ή όταν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί ή ότι θα συμβεί το B) με $P(B) > 0$, ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Παρατήρηση:

Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου Β, δεδομένου του Α με $P(\mathrm{A}) > 0$, σύμφωνα με τον ορισμό δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})}{\boldsymbol{P}(\mathbf{A})}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Πολλαπλασιαστικός Τύπος

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι το παρακάτω αποτέλεσμα γνωστό ως πολλαπλασιαστικός τύπος

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A),$ όταν $P(A) > 0$
- $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B),$ όταν $P(B) > 0$

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Πολλαπλασιαστικός Τύπος

<u>Παρατήρηση:</u>

Παρατηρήστε ότι ενώ ο πολλαπλασιαστικός τύπος προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, εντούτοις ισχύει και για την περίπτωση που $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$.

Παράδειγμα 2:

Το 51% μιας συγκεκριμένης περιοχής είναι άνδρες και το 49% γυναίκες. Γνωρίζουμε επίσης από πρόσφατη έρευνα ότι το 4,2% των κατοίκων πάσχει από αχρωματοψία. Επίσης από την ίδια έρευνα γνωρίζουμε ότι το 4% των κατοίκων της περιοχής αυτής είναι άνδρες που πάσχουν από αχρωματοψία. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από αυτήν την περιοχή και είναι άνδρας ποια είναι η πιθανότητα να πάσχει από αχρωματοψία;

Παράδειγμα 2:

Λύση:

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

A: Το άτομο πάσχει από αχρωματοψία

B: Το άτομο είναι άνδρας.

Δίνεται ότι $P(A) = 4{,}2\%, P(B) = 51\%, P(A \cap B) = 4\%$.

Παράδειγμα 2:

<u>Λύση:</u>

Ζητάμε την πιθανότητα το άτομο που επιλέξαμε να πάσχει από αχρωματοψία δεδομένου ότι είναι άντρα.

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4\%}{51\%} = \frac{4}{51} = 0,078}$$

Παράδειγμα 3:

Παράδειγμα 3:

Ρίχνουμε ένα ζάρι και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

B: Το αποτέλεσμα είναι 2

A: Το αποτέλεσμα είναι το πολύ 2.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα $\boldsymbol{P(B \mid A)}$

Παράδειγμα 3:

<u>Λύση:</u>

Έχουμε $B = \{2\}, A = \{1, 2\}, \mathrm{A} \cap B = \{2\}$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 4:

Ρίχνουμε δύο ζάρια το ένα μετά το άλλο. Αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των αποτελεσμάτων είναι 5, ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη ρίψη να είναι 3;

Παράδειγμα $\mathbf{4}$:

Λύση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: το άθροισμα των αποτελεσμάτων είναι 5, δηλαδή

$$A = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), \}$$

B: η δεύτερη ρίψη να είναι 3, δηλαδή

$$B = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)\}$$

Παράδειγμα 4:

<u>Λύση:</u>

Έχουμε:

$$A \cap B = B = \{(2,3)\}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B \mid A)$.

Έχουμε:

Παράδειγμα 4:

Λύση:

Έχουμε:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{4/36} = \frac{1}{4}$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Ορισμός:

Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ανεξάρτητα όταν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Παρατήρηση:

Αν δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα τότε

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A), \qquad \alpha\nu\ P(\mathrm{B}) > 0$$

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(A)P(B)}{P(\mathrm{A})} = P(\mathrm{B}), \qquad \alpha\nu\ P(A) > 0$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

- Δηλαδή αν δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ανεξάρτητα τότε η πληροφορία πραγματοποίησης του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης τους άλλου.

Παράδειγμα 4: – Συνέχεια

Ρίχνουμε δύο ζάρια το ένα μετά το άλλο.

a) Αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των αποτελεσμάτων είναι 5 ποια είναι η πιθανότητα η δεύτερη ρίψη να είναι 3;

b) Είναι τα ενδεχόμενα

A: το άθροισμα των αποτελεσμάτων είναι 5, και

B: η δεύτερη ρίψη να είναι 3 ανεξάρτητα;

Παράδειγμα 4:

Λύση:

b) Έχουμε:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B) = \frac{4}{36}\frac{6}{36} = \frac{1}{54}$$

Δηλαδή

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

Δεσμευμένη Πιθανότητα – Ιδιότητες

Έστω $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ ενδεχόμενα ενός δειγματικό χώρου με $P(B) > 0$. Τότε

- $\boldsymbol{P(A^c \mid \mathrm{B}) = 1 - P(A \mid \mathrm{B})}$
- $\boldsymbol{P(\emptyset \mid \mathrm{B}) = 0, P(\Omega \mid \mathrm{B}) = 1}$
- $\boldsymbol{P(A \cup \Gamma \mid \mathrm{B}) = P(A \mid \mathrm{B}) + P(\Gamma \mid \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \Gamma \mid \mathrm{B})}$
- $\mathbf{P(A - \Gamma \mid B) = P(A \mid B) - P(A \cap \Gamma \mid B)}$

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons
- Γ. Παπαδόπουλος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Εκδόσεις Gutenberg