



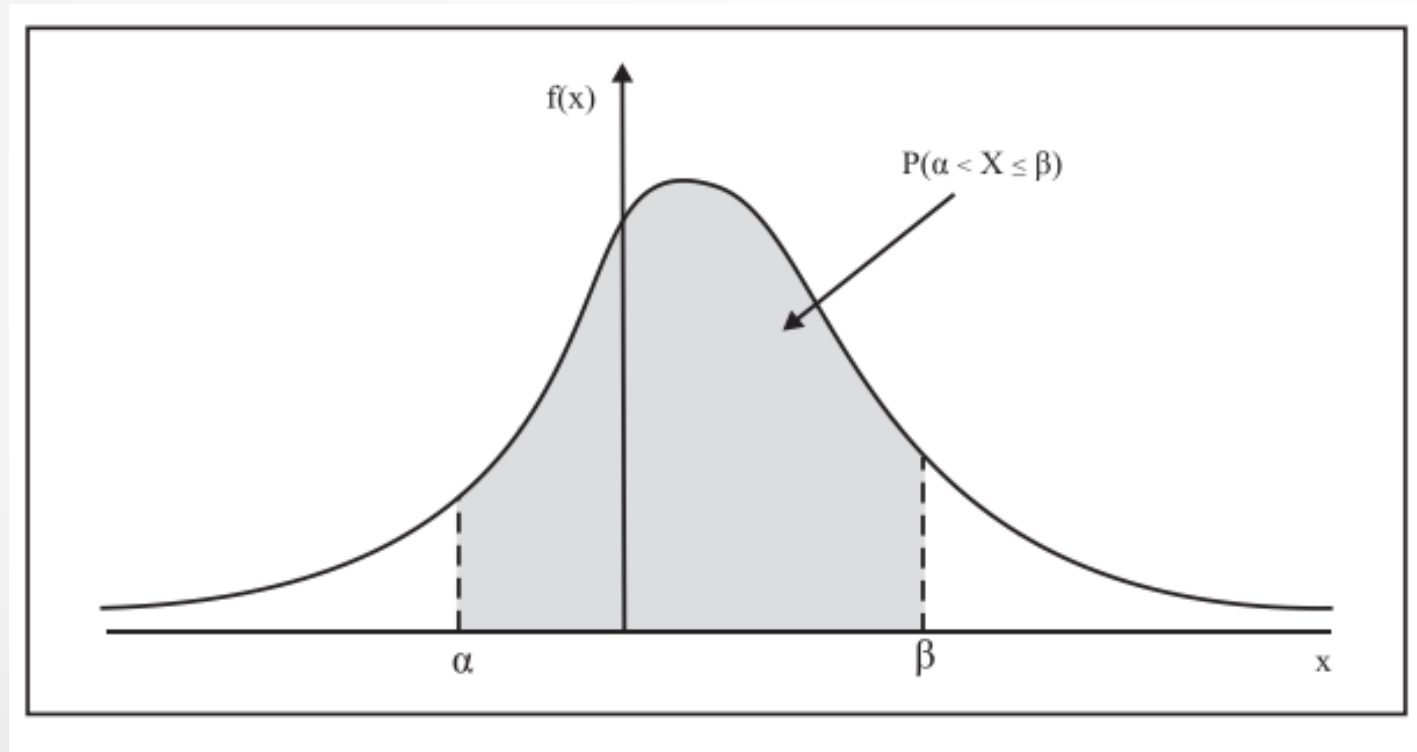
Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ , Β ΜΑΧΙΜΟΙ, Β ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ ,
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

Συνεχείς κατανομές



σχήμα 1

Βασικές Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Βασικές Συνεχείς κατανομές είναι

- Η Συνέχης Ομοιόμορφη Κατανομή
- Η Εκθετική Κατανομή
- Οι κατανομές Γάμμα και Βήτα
- Η Κανονική Κατανομή

Ομοιομορφή Κατανομή

- Η τ.μ. X λέμε ότι ακολουθεί την **ομοιόμορφη κατανομή** στο διάστημα

$[a, b]$ όταν η X είναι το ίδιο πιθανό να πάρει τιμές σε οποιαδήποτε υπο-διάστημα μεταξύ του a και του b .

Γράφουμε:

$$X \sim U[a, b]$$

Ομοιομορφή Κατανομή

Για την Ομοιόμορφη Κατανομή ισχύουν τα εξής:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή δηλαδή $X \sim U[a, b]$, τότε:

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & \text{αν } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{αν } x < a \text{ ή } x > b \end{cases}$$

Ομοιομορφή Κατανομή

- Η μέση (αναμενόμενη) τιμή της είναι: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Η διακύμανση είναι: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Παράδειγμα 1

Ένα συνεργείο συντηρήσεως του δημοσίου δρόμου είναι υπεύθυνο για ένα συγκεκριμένο τμήμα του δρόμου μήκους 10 χιλιομέτρων. Έστω ότι X είναι απόσταση (σε χιλιόμετρα) από την αρχή αυτού του τμήματος μέχρι το σημείο όπου υπάρχει ανάγκη για διόρθωση του δρόμου.

Παράδειγμα 1

Αν υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(0, 10)$, ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρξει ανάγκη για διόρθωση του δρόμου από την αρχή του δεκάτου χιλιομέτρου μέχρι το τέλος του;

Παράδειγμα 1

Λύση:

Αφού η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή δηλαδή $\mathbf{X} \sim \mathbf{U}[0, 10]$, τότε:

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{αν } 0 < x < 10 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \text{ ή } x \geq 10 \end{cases}$$

Ομοιομορφή Κατανομή

Η πιθανότητα να υπάρξει ανάγκη για διόρθωση του δρόμου από την αρχή του δεκάτου χιλιομέτρου μέχρι το τέλος του είναι

$$P(9 \leq X \leq 10) = \frac{1}{10} \cdot (10 - 9) = \frac{1}{10}$$

Κανονική Κατανομή

Η κανονική κατανομή (normal distribution) θεωρείται η σπουδαιότερη κατανομή της Θεωρίας Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Οι λόγοι που εξηγούν την εξέχουσα θέση της, είναι βασικά δύο:

Κανονική Κατανομή

- Πολλές τυχαίες μεταβλητές περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή ή περιγράφονται από κατανομές που μπορούν να προσεγγισθούν από την κανονική κατανομή.

Κανονική Κατανομή

- Οι ιδιότητες της κανονικής κατανομής αξιοποιούνται στη Στατιστική Συμπερασματολογία. Ουσιαστικά, η κανονική κατανομή, αποτελεί το θεμέλιο της Στατιστικής Συμπερασματολογίας.

Κανονική Κατανομή

- Η κανονική κατανομή μελετήθηκε αρχικά από τον De Moivre (1667 – 1754) και από τον Laplace (1749 – 1827) οι οποίοι απέδειξαν ότι η διωνυμική κατανομή $B(n, p)$ προσεγγίζεται, για μεγάλο n , από την κανονική κατανομή.

Κανονική Κατανομή

- Το 1809 ο Gauss (1777 – 1855) μελετώντας τη θεωρία τυχαίων σφαλμάτων παρατήρησε ότι οι κατανομές των σφαλμάτων των μετρήσεων μπορούσαν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά από μία συνεχή καμπύλη, η οποία αναφερόταν ως «**κανονική καμπύλη των σφαλμάτων**» και αποδίδονταν στους νόμους της τύχης.

Κανονική Κατανομή

- Η χρησιμότητα της κανονικής κατανομής γίνεται περισσότερο φανερή από το κεντρικό οριακό θεώρημα.
- Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, κάθε φυσική ποσότητα της οποίας η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ότι διαμορφώνεται από ένα μεγάλο αριθμό (ανεξάρτητων) παραγόντων ακολουθεί προσεγγιστικά κανονική κατανομή.

Κανονική Κατανομή

Ορισμός:

Η συνεχής κατανομή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

καλείται κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2

Γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Κανονική Κατανομή

Για την **Κανονική Κατανομή** ισχύουν τα εξής:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 , δηλαδή

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε:

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής X δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Κανονική Κατανομή

- Η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κατανομής X είναι

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Κανονική Κατανομή

- Η μέση (αναμενόμενη) τιμή της είναι:

$$E(X) = \mu$$

- Η διακύμανση είναι:

$$Var(X) = \sigma^2$$

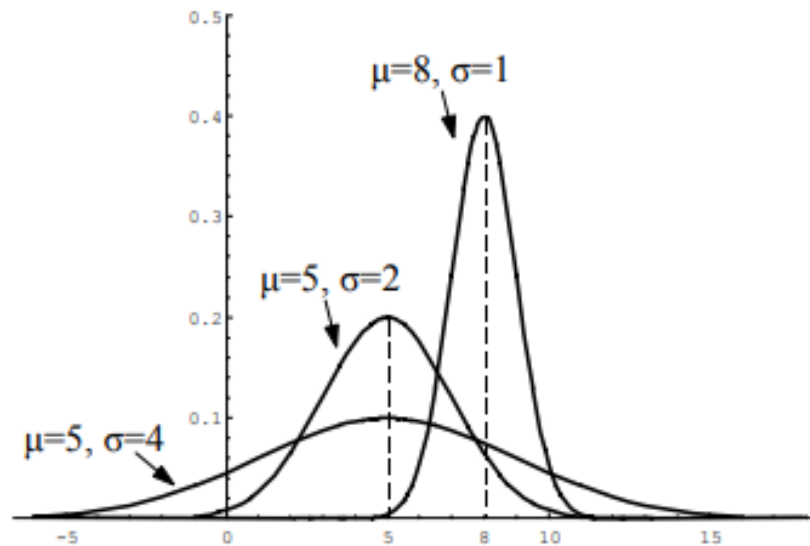
Κανονική Κατανομή

Τα γραφήματα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ για

■ $\mu = 8, \sigma = 1$

■ $\mu = 5, \sigma = 2$

■ $\mu = 5, \sigma = 4$

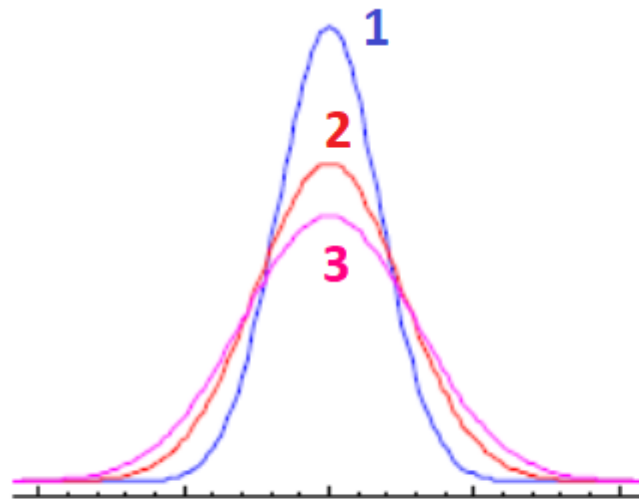


Άσκηση 1

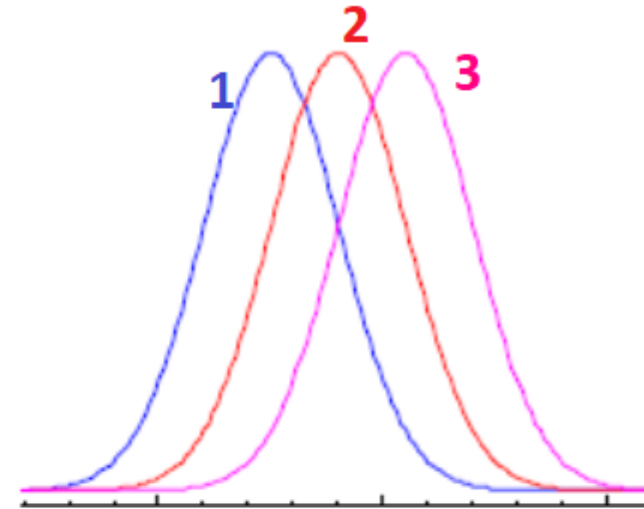
Οι παρακάτω κατανομές στο σχήμα α και σχήμα β , είναι όλες κανονικές.

Να συγκρίνετε τις δύο ομάδες κατανομών ως προς τις βασικές παραμέτρους αυτών.

Κανονική Κατανομή



(α)



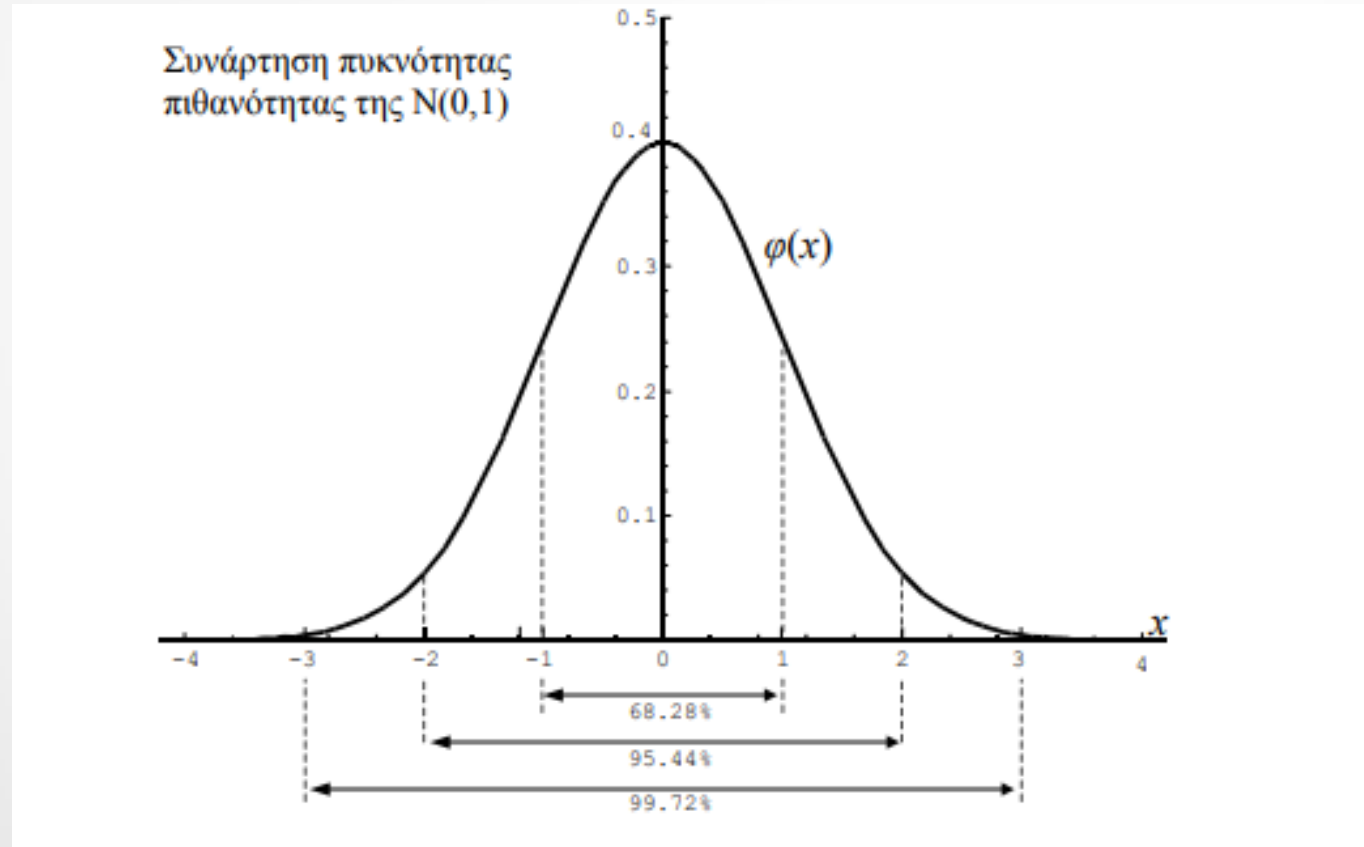
(β)

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Η απλούστερη μορφή της κατανομής αυτής, η οποία συνήθως χρησιμοποιείται σε πρακτικές εφαρμογές με μετασχηματισμό, είναι εκείνη που αναφέρεται στην περίπτωση όπου $\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$.
- Η κατανομή αυτή ονομάζεται τυποποιημένη κανονική κατανομή και έχει την μορφή

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή



Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής είναι

$$P(X \leq x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

- Το ολοκλήρωμα που εκφράζει την $\Phi(x)$ δεν μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή. Για το λόγο αυτό ο υπολογισμός των τιμών της $\Phi(x)$ γίνεται χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους.
- Συνήθως, στο τέλος κάθε συγγράμματος στατιστικής υπάρχει ένας πίνακας που περιέχει (προσεγγιστικές) τιμές της $\Phi(x)$ για διάφορες τιμές του x .

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

■ Ισχύουν τα εξής:

$$\Phi(0) = 0.5$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

■ Αν η τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0,1)$, τότε:

$$\begin{aligned} P(a < Z \leq \beta) &= P(a \leq Z < \beta) = P(a \leq Z \leq \beta) \\ &= P(a < Z < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(a) \end{aligned}$$

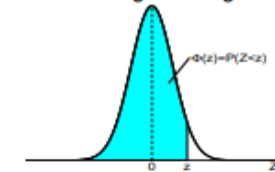
$$P(Z \leq \beta) = P(Z < \beta) = \Phi(\beta)$$

$$P(Z > \alpha) = 1 - P(Z \leq \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

$$P(Z \geq \alpha) = 1 - P(Z < \alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$$

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονικής Κατανομής



Παράδειγμα:

$$z = 1.28 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.90$$

$$z = 1.65 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.95$$

$$z = 2.33 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.99$$

$$z = 3.08 \Leftrightarrow \Phi(z) = 0.999$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7853
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8829
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9440
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9858
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997

Υπολογισμός Πιθανοτήτων σε οποιαδήποτε Κανονική Κατανομή

- Η παρακάτω πρόταση είναι ένα απαραίτητο εργαλείο για να υπολογίζουμε πιθανότητες της μορφής $P(a < X \leq \beta)$ μίας κανονικής κατανομής $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μέσω της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Υπολογισμός Πιθανοτήτων σε οποιαδήποτε Κανονική Κατανομή

Πρόταση:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 , δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η τυχαία μεταβλητή

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή

$$Z \sim N(0, 1)$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων σε οποιαδήποτε Κανονική Κατανομή

- Επομένως αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα την πιθανότητα $P(a < X \leq \beta)$ τότε η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

Υπολογισμός Πιθανοτήτων σε οποιαδήποτε Κανονική Κατανομή

$$a < X \leq \beta \Leftrightarrow a - \mu < X - \mu \leq \beta - \mu \Leftrightarrow$$
$$\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}$$

Άρα

$$P(a < X \leq \beta) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right)$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων σε οποιαδήποτε Κανονική Κατανομή

Όμως η τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Άρα

$$\begin{aligned} P(a < X \leq \beta) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z \leq \frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Αν η τυχαία μεταβλητή $X \sim N(6,4)$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

α) $P(X < 6)$

β) $P(X \geq 3)$

γ) $P(2 < X < 8)$

δ) $P(X = 3)$

Παράδειγμα 2

Λύση:

Αφού $X \sim N(6,4)$ $\mu = 6, \sigma^2 = 4$ ή $\sigma = 2$.

Άρα η

$$Z = \frac{X - 6}{2} \sim N(0,1)$$

Επομένως,

Παράδειγμα 2

$$\alpha) P(X < 6) = P\left(\frac{X-6}{2} < \frac{6-6}{2}\right) = P(Z < 0) = \Phi(0) = 0.5$$

$$\begin{aligned}\beta) P(X \geq 3) &= P\left(\frac{X-6}{2} \geq \frac{3-6}{2}\right) = P(Z \geq -1.5) = 1 - \\ P(Z < -1.5) &= 1 - \Phi(-1.5) = 1 - [1 - \Phi(1.5)] = \\ \Phi(1.5) &= 0.9332\end{aligned}$$

Κανονική Κατανομή – Παραδείγματα

$$\gamma) P(2 < X < 8) = P\left(\frac{2-6}{2} < \frac{X-6}{2} < \frac{8-6}{2}\right) = (-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$\begin{aligned} & \Phi(2) - [1 - \Phi(2)] = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ & = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

Κανονική Κατανομή – Παραδείγματα

$$\delta) P(X = 3) = 0$$

διότι η πιθανότητα σε σημείο όταν η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής είναι 0.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

Η Συνάρτηση NORMDIST

Επιστρέφει την κανονική κατανομή για καθορισμένη μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

Η συνάρτηση αυτή έχει πολύ μεγάλο εύρος εφαρμογής στη στατιστική, καθώς και στον έλεγχο υποθέσεων.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

Σύνταξη:

**NORM.DIST(x;μέση_τιμή;τυπική_απόκλιση;αθροιστική
)**

Η σύνταξη της συνάρτησης NORM.DIST περιλαμβάνει τα παρακάτω ορίσματα:

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

- **X** Υποχρεωτικό. Η τιμή για την οποία θέλετε την κατανομή.
- **Μέση_τιμή** Υποχρεωτικό. Ο αριθμητικός μέσος της κατανομής.
- **Τυπική_απόκλιση** Υποχρεωτικό. Η τυπική απόκλιση της κατανομής.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

- **Αθροιστική** Υποχρεωτικό. Μια λογική τιμή που καθορίζει το είδος της συνάρτησης. Εάν το αθροιστικό είναι TRUE, ΚΑΝ'ΟΝΑΣ. Το άνω επιστρέφει τη συνάρτηση αθροιστικής κατανομής. Εάν είναι FALSE, επιστρέφει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Εάν το όρισμα μέση_τιμή ή τυπική_απόκλιση δεν είναι αριθμητικό, η συνάρτηση NORM.DIST επιστρέφει #ΤΙΜΗ! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν τυπική_απόκλιση ≤ 0 , η συνάρτηση NORM.DIST επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Εάν μέση_τιμή = 0, τυπική_απόκλιση = 1 και αθροιστική = TRUE, η συνάρτηση NORM.DIST επιστρέφει την τυπική κανονική κατανομή, τη συνάρτηση NORM.S.DIST.

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

- Η εξίσωση της συνάρτησης κανονικής πυκνότητας (αθροιστική = FALSE) είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Κανονική Κατανομή

Υπολογισμός στο Excel

- Εάν αθροιστική = TRUE, ο τύπος είναι το ολοκλήρωμα από το μείον άπειρο στο όρισμα x του συγκεκριμένου τύπου. Δηλαδή

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Κανονική Κατανομή Υπολογισμός στο Excel

Παράδειγμα:

Δεδομένα	Περιγραφή	
42	Τιμή για την οποία θέλετε την κατανομή	
40	Αριθμητικός μέσος της κατανομής	
1,5	Τυπική απόκλιση της κατανομής	
Τύπος	Περιγραφή	Αποτέλεσμα
=NORM.DIST(A2;A3;A4;TRUE)	Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής για τους παραπάνω όρους	0,9087888
=NORM.DIST(A2;A3;A4;FALSE)	Συνάρτηση μάζας πιθανότητας για τους παραπάνω όρους	0,10934
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ , Β MAXIMOΙ, Β ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ , ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ		

Παράδειγμα 3

Από το αρχείο ενός ιατρείου προκύπτει ότι η πιθανότητα αναμονής ενός ασθενούς για χρόνο περισσότερο από 20 λεπτά είναι 0.0239.

Αν ο χρόνος αναμονής ακολουθεί κανονική κατανομή με $\sigma = 3,75$ λεπτά, να υπολογίσετε:

Παράδειγμα 3

- (α) το μέσο χρόνο αναμονής στο ιατρείο,
- (β) την πιθανότητα, ένας ασθενής να περιμένει στο ιατρείο για χρόνο μεταξύ 10 και 15 λεπτών.

Παράδειγμα 3

Λύση:

Αφού $X \sim N(\mu, \sigma)$ με $\sigma = 3,75$,

η $Z = \frac{X - \mu}{3.75} \sim N(0,1)$ Έχουμε ισοδύναμα:

$$P(X > 20) = 0,0239$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{3.75} \geq \frac{20 - \mu}{3.75}\right) = 0,0239$$

Παράδειγμα 3

$$P\left(Z > \frac{20 - \mu}{3.75}\right) = 0,0239$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{20 - \mu}{3.75}\right) = 0,0239$$

Παράδειγμα 3

Δηλαδή

$$P\left(Z \leq \frac{20 - \mu}{3.75}\right) = 1 - 0,0239$$

$$P\left(Z \leq \frac{20 - \mu}{3.75}\right) = 0.9761$$

$$\Phi\left(\frac{20 - \mu}{3.75}\right) = \Phi(1.979142)$$

Παράδειγμα 3

Άρα

$$\frac{20 - \mu}{3.75} = 1.979142$$
$$\mu = 12,58$$

Παράδειγμα 3

$$(\beta) \ P(10 < X < 15) = P(X < 15) - P(X \leq 10) = 0.494918$$

Άσκηση

Εργοστάσιο γνωστής μάρκας αυτοκινήτων κατασκευάζει X αυτοκίνητα εβδομαδιαίως. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 50$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$. Να υπολογίσετε, με τη βοήθεια του στατιστικού πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής, την πιθανότητα εντός μιας εβδομάδας να κατασκευαστούν από 45 έως 60 αυτοκίνητα.

Βιβλιογραφία

Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης
Εισαγωγή στις
Πιθανότητες, Εκδόσεις
Συμεόν

P. Hoel, S. Port, C. Stone
Εισαγωγή στην θεωρία
Πιθανοτήτων,
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις
Κρήτης

Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο
Μάθημα στις Πιθανότητες
eBooks4Greeks, Ελεύθερη
Ψυφιακή Βιβλιοθήκη

W. Feller, An Introduction
to Probability Theory and
its Applications, John Wiley
& Sons

Α. Χαραλαμπίδης Θεωρία
Πιθανοτήτων και
Εφαρμογές, Εκδόσεις
Συμμετρία

