

Διαφορικές Εξισώσεις που Ανάγονται σε Πλήρεις

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Διαφορικές Εξισώσεις που Ανάγονται σε Πλήρεις

Έστω η διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

Ή ισοδύναμα

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (1)$$

Όπου $P(x, y)$, $Q(x, y)$ συναρτήσεις δύο μεταβλητών και $y = y(x)$

Η άγνωστη συνάρτηση.

Διαφορικές Εξισώσεις που Ανάγονται σε Πλήρεις

Αν

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Τότε η

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

δεν είναι πλήρης.

Διαφορικές Εξισώσεις που Ανάγονται σε Πλήρεις

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $\mu(x, y)$ τέτοια ώστε η διαφορική εξίσωση

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

Να είναι πλήρης.

Διαφορικές Εξισώσεις που Ανάγονται σε Πλήρεις

Τότε λέμε ότι η

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

ανάγεται σε πλήρης ή ακριβής διαφορική εξίσωση και η συνάρτηση $\mu(x, y)$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής Euler ή Ολοκληρωτικός παράγοντας της (1).

Παρατηρείστε ότι οι εξισώσεις (1), (2) είναι ισοδύναμες και επομένως έχουν τις ίδιες λύσεις.

Παράδειγμα 1

- A. Να ελέγξετε αν η διαφορική εξίσωση
- $$(xy - 1)dx + x(x - y)dy = 0 \quad (1)$$

Είναι πλήρης.

- B. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ είναι
Ολοκληρωτικός παράγοντας της (1) και να την λύσετε.

Παράδειγμα 1 – Λύση

A. Η (1) είναι της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ με $P(x, y) = xy - 1$ και $Q(x, y) = x(x - y)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = x \text{ και } \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x - y$$

Δηλαδή $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

Και άρα η (1) δεν είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1 – Λύση

B. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ και οδηγούμαστε στην ισοδύναμη εξίσωση

$$\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + (x - y) dy = 0 \quad (2)$$

Η οποία, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, είναι πλήρης.

Παράδειγμα 1 – Λύση

B. Επομένως η συνάρτηση $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ είναι πολλαπλασιαστής Euler της (1).

Επομένως υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ με

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y - \frac{1}{x} \quad (2)$$

Και

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x - y \quad (3)$$

Παράδειγμα 1 – Λύση

B. Από την σχέση (2) έχουμε:

$$f(x, y) = \int \left(y - \frac{1}{x} \right) dx \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy - \ln x + g(y) \Rightarrow \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial (xy - \ln x + g(y))}{\partial y} \Rightarrow \\ x - y &= x + g'(y) \quad (4) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1 – Λύση

B. Άρα

$$g'(y) = -y$$

Δηλαδή

$$g(y) = -\frac{1}{2}y^2 + c_1$$

Άρα

$$f(x, y) = xy - \ln x - \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

Παράδειγμα 1 –Λύση

B. Επομένως

$$xy - \ln x - \frac{1}{2}y^2 + c_1 = c_2$$

ή

$$xy - \ln x - \frac{1}{2}y^2 = c, c \in \mathbb{R},$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (2) και συνεπώς και της (1).

Ερώτημα

Κάτω από ποιές συνθήκες μία μη ακριβής διαφορική εξίσωση

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Έχει ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y)$;

Και σε περίπτωση που υπάρχει ο πολλαπλασιαστής Euler, με ποιον τρόπο μπορούμε να οδηγηθούμε στην εύρεση του;

Βασική Πρόταση

Απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα δίνει η παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

Η οποία δεν είναι πλήρης.

Βασική Πρόταση

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ είναι ανεξάρτητη του y τότε η (1) ανάγεται σε πλήρης.

Στην προκειμένη περίπτωση, ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$$

Βασική Πρόταση

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $\frac{Q_x - P_y}{P}$ είναι ανεξάρτητη του x τότε η (1) ανάγεται σε πλήρης.

Στην προκειμένη περίπτωση, ο ολοκληρωτικός παράγοντας εκφράζεται ως

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$

Σημείωση – Συμβολισμός

$$P_y(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$
$$Q_x(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Σημείωση – Συμβολισμός

$$P_y(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$
$$Q_x(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

Παράδειγμα 2

Να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0 \quad (1).$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

Η (1) είναι της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ με

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + 2x \text{ και } Q(x, y) = 2y.$$

Έχουμε ότι

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2y \text{ και } \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 0.$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Άρα η διαφορική εξίσωση δεν είναι πλήρης.

Εξετάζουμε αν η διαφορική εξίσωση έχει ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του x .

Παράδειγμα 2 – Λύση

Για αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\frac{P_y - Q_x}{Q}$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2y}{2y} = 1$$

Η οποία πράγματι είναι ανεξάρτητη του y .

Κατα συνέπεια, η διαφορική εξίσωση έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

Παράδειγμα 2 – Λύση

$$\mu(x) = e^{\int dx}$$

Δηλαδή

$$\mu(x) = e^x.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την $\mu(x)$ και λαμβάνουμε

$$(x^2 + y^2 + 2x)e^x dx + 2ye^x dy = 0 \quad (2),$$

η οποία είναι πλήρης.

Παράδειγμα 2 – Λύση

Άρα υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + y^2 + 2x)e^x \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x \quad (4).$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \int 2ye^x dy \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y^2 e^x + g(x) \Rightarrow \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial (y^2 e^x + g(x))}{\partial x} \Rightarrow \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 2x)e^x &= y^2 e^x + g'(x) \Rightarrow \\(x^2 + 2x)e^x &= g'(x) \Rightarrow \\g(x) &= x^2 e^x + c_1\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

Άρα

$$f(x, y) = y^2 e^x + x^2 e^x + c_1$$

Επομένως $y^2 e^x + x^2 e^x + c_1 = c_2$ ή

$$y^2 e^x + x^2 e^x = c, c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση

Δηλαδή

$$y(x) = \pm \sqrt{\frac{c - x^2 e^x}{e^x}}, c \in \mathbb{R}$$

είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (2) , το οποία σαφώς είναι το γενικό ολοκλήρωμα της (1), αφού οι διαφορικές εξισώσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 3

Να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + y)dx + \frac{x}{2}dy = 0, x > 0 \quad (1)$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

Η (1) είναι της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ με

$$P(x, y) = x^2 + y \text{ και } Q(x, y) = \frac{x}{2}.$$

Ισχύει ότι

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 \text{ και } \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Άρα η διαφορική εξίσωση δεν είναι πλήρης.

Εξετάζουμε αν η διαφορική εξίσωση έχει ολοκληρωτικό παράγοντα συνάρτηση μόνο του x .

Παράδειγμα 3 – Λύση

Για αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση $\frac{P_y - Q_x}{Q}$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x}$$

Η οποία πράγματι είναι ανεξάρτητη του y .

Κατα συνέπεια, η διαφορική εξίσωση έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τη συνάρτηση

Παράδειγμα 3 – Λύση

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx}.$$

Δηλαδή

$$\mu(x) = e^{\ln x} = x.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την $\mu(x) = x$ και λαμβάνουμε

$$(x^3 + xy)dx + \frac{x^2}{2}dy = 0 \quad (2)$$

Η οποία είναι πλήρης.

Παράδειγμα 3 – Λύση

Άρα υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + xy \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} \quad (4).$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \int \frac{x^2}{2} dy \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \frac{yx^2}{2} + g(x) \Rightarrow$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{yx^2}{2} + g(x) \right)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$x^3 + xy = xy + g'(x) \Rightarrow$$

$$x^3 = g'(x) \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{x^4}{4} + c_1.$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

Άρα

$$f(x, y) = \frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c_1.$$

Επομένως $\frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} + c_1 = c_2$ ή

$$\frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} = c, c \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 3 – Λύση

Δηλαδή

$$y(x) = \frac{c' - x^4}{2x^2}, c' \in \mathbb{R}$$

είναι η γενική λύση της (2) , άρα και της (1).

Παράδειγμα 4

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0, x > 0 \quad (1)$$

- a. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $y = 0$ είναι λύση της (1)
- b. Για $y \neq 0$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της (1)
- c. Να λύσετε την (1)

Παράδειγμα 4 – Λύση

a. Η (1) είναι ισοδύναμη της $(y^2 + xy) - x^2 y' = 0$.

Η συνάρτηση $y = 0$ είναι λύση της (1) αφού την επαληθεύει.

Παράδειγμα 4 – Λύση

b. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με την $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ και λαμβάνουμε

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0 \quad (2)$$

Η οποία είναι της μορφής $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ με

$$P(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ και } Q(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Παράδειγμα 4 – Λύση

Έχουμε,

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \text{ και } \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

Δηλαδή $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$

Άρα η διαφορική εξίσωση (1) ανάχθηκε σε πλήρης και επομένως η συνάρτηση $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της (1) .

Παράδειγμα 4 – Λύση

c. Αφού η (2) είναι πλήρης, υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (3) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \quad (4).$$

Παράδειγμα 4 – Λύση

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx \Rightarrow$$

$$f(x, y) = \ln x + \frac{x}{y} + g(y) \Rightarrow$$

Παράδειγμα 4 – Λύση

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\ln x + \frac{x}{y} + g(y) \right)}{\partial y} \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} + g'(y) \Rightarrow$$
$$0 = g'(y) \Rightarrow$$
$$g(y) = c_1$$

Παράδειγμα 4 – Λύση

Άρα

$$f(x, y) = \ln x + \frac{x}{y} + c_1$$

Επομένως $\ln x + \frac{x}{y} + c_1 = c_2$

Ή ισοδύναμα,

$$\ln x + \frac{x}{y} = c, c \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 4 – Λύση

Δηλαδή

$$y(x) = \frac{x}{c - \ln x}, c \in \mathbb{R}$$

είναι η γενική λύση της (2) , άρα και της (1).

Και $y(x) = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση της (1).

Παράδειγμα 4 – Λύση

Επομένως οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1) είναι:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y(x) = \frac{x}{c - \ln x}, c \in \mathbb{R}, & \text{γενική λύση} \\ y(x) = 0, & \text{ιδιάζουσα λύση} \end{array} \right.$$

Ασκήσεις

1. Να λύσετε την Σ.Δ.Ε.

$$(x^2 - x + y^2)dx - (ye^y - 2xy)dy = 0$$

2. Να λύσετε την Σ.Δ.Ε.

$$(-3tx + 8x^3)dt + (t^2 - 4tx^2)dx = 0$$

αφού βρεθεί πολλαπλασιαστής Euler της μορφής

$$\mu(t, x) = t^a x^\beta$$

Ασκήσεις

3. Αν η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + y)dx + f(x)dy = 0$$

έχει πολλαπλασιαστή Euler την συνάρτηση $\mu(x) = x$, να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$ και στην συνέχεια να την λύσετε.

4. Να λύσετε την Σ.Δ.Ε.

$$(3x^4 - y)dx + (x - 4x^2y^3)dy = 0$$

Βιβλιογραφία

Finney, R. L. &
Giordano, F. R.
Απειροστικός Λογισμός
II , Πανεπιστημιακές
Εκδόσεις Κρήτης,
Ηράκλειο 2004

Γ.Ν. Παντελίδη, Δ.Χ.
Κραββαρίτη, Ν. Σ.
Χατζησάββα Συνήθεις
Διαφορικές Εξισώσεις
Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα
1990

William E. Boyce, Richard
C. DiPrima, Elementary
Differential Equations and
Boundary Value Problems,
John Wiley & Sons, Inc,
New York 2001