

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ



ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Μια διαφορική εξίσωση n τάξεως που είναι της μορφής
$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = p(x) \quad (1)$$

Όπου

- ✓ $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$,
- ✓ $p(x)$ συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα I και
- ✓ $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση.

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Ονομάζεται γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = p(x) \quad (1)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Αν $p(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ τότε η (1) παίρνει την μορφή

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (2)$$

Και καλείται **ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως με σταθερούς συντελεστές.**

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Αν $p(x) \neq 0$ για κάποιο $x \in I$ τότε η (1) καλείται **μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως με σταθερούς συντελεστές**.

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ειδικά μια γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (3)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση,
είναι **ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω μια ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Τότε:

- Οι λύσεις της είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}$
- Η συνάρτηση $y(x) = 0$ είναι μία (προφανής) λύση της.

ΒΑΣΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ

- Έστω μια ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (3).$$

- Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ το ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της (3).
- Η εξίσωση $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της (3).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (3)$$

- Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

και βρίσκουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

- Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

➤ 1^η Περίπτωση:

Αν $\Delta = a^2 - 4b > 0$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ και } \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

➤ 2^η Περίπτωση:

Αν $\Delta = a^2 - 4b = 0$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a}{2}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

➤ 3^η Περίπτωση:

Αν $\Delta = a^2 - 4b < 0$, τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο μιγαδικές ρίζες συζυγείς τις

$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-a}{2} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά κάθε μία περίπτωση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – 1^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

- Αν η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις λ_1, λ_2 τότε η **γενική λύση** της

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

είναι η

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + y' - 2y = 0$ (4).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Η (4) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = -2.$$

Επομένως η

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της (4).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$ (5).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Η (5) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. $x = x(t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = 2 \text{ και } \lambda_2 = 3.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Επομένως η

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $t \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της (5).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \quad (6).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση $y'' - 4y = 0$ είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (6) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 - 4 = 0$ και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = 2 \text{ και } \lambda_2 = -2.$$

Επομένως η

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Από αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (7)$$

Για την δεύτερη συνθήκη χρειαζόμαστε την πρώτη παράγωγο της $y(x)$.

Αφού $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ έχουμε ότι

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Από την δευτέρη συνθήκη έχουμε:

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 = 1 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) προκύπτει ότι $c_1 = \frac{1}{4}$ και $c_2 = -\frac{1}{4}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Επομένως η συνάρτηση που επαληθεύει το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι η:

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – 2^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

- Αν η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες τις $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ τότε η γενική λύση της

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

είναι η

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $4y'' + 4y' + y = 0$ (9).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Η (9) μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad (9').$$

Η οποία είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (9) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες τις

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Επομένως η

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$ είναι η γενική λύση της (9).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$ (10).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Η (10) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. $x = x(t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες τις

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Επομένως η

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $t \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της (10).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$
 (11).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση $y'' + 2y' + y = 0$ είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (11) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες τις

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Επομένως η

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Από αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$\begin{aligned}y(1) = 1 &\Rightarrow c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 1 \Rightarrow \\c_1 + c_2 &= e \quad (12)\end{aligned}$$

Για την δεύτερη συνθήκη χρειαζόμαστε την πρώτη παράγωγο της $y(x)$.

Αφού $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ έχουμε ότι

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Από την δευτέρη συνθήκη έχουμε:

$$y'(1) = 0 \Rightarrow -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x} = 0 \Rightarrow$$
$$c_1 = 0 \quad (13)$$

Από τις σχέσεις (12), (13) προκύπτει ότι $c_1 = 0$ και $c_2 = e$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Επομένως η συνάρτηση που επαληθεύει το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι η:

$$y(x) = xe^{1-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – 3^η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

- Αν η λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις

$$\lambda_1 = r + pi \text{ και } \lambda_2 = r - pi$$

τότε τότε η γενική λύση της

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

είναι η

$$y(x) = c_1 e^{rx} \cos(px) + c_2 e^{rx} \sin(px)$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' + 4y' + 5y = 0$ (14).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Η (14) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (14) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -2 + i \text{ και } \lambda_2 = -2 - i.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Επομένως $r = -2$ και $p = 1$.

Άρα

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$ είναι η γενική λύση της (14).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ (15).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 – ΛΥΣΗ

Η (15) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

$x = x(t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (15) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i \text{ και } \lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 – ΛΥΣΗ

Επομένως $r = -1$ και $p = \sqrt{2}$.

Επομένως η

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{2}t)$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $t \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της (15).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $\begin{cases} y'' - 4y' + 7y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{3} \end{cases}$
(16).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Η διαφορική εξίσωση $y'' - 4y' + 7y = 0$ είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (16) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 7$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}i \text{ και } \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}i.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Επομένως $r = 2$ και $p = \sqrt{3}$.

Επομένως η

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{3}x) + c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{3}x)$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$

Είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Από αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Για την δεύτερη συνθήκη χρειαζόμαστε την πρώτη παράγωγο της $y(x)$.

Αφού $c_1 = 0$,

$$y(x) = c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{3}x).$$

Επομένως έχουμε ότι

$$y'(x) = 2c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}c_2 e^{2x} \cos(\sqrt{3}x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Από την δευτέρη συνθήκη έχουμε:

$$y'(0) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}c_2 = \sqrt{3}$$

Δηλαδή, $c_2 = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 – ΛΥΣΗ

Επομένως η συνάρτηση που επαληθεύει το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι η:

$$y(x) = e^{2x} \sin(\sqrt{3}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 (ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ)

Οι συναρτήσεις ζήτησης $D(t)$, και προσφοράς $S(t)$, ενός αγαθού εξαρτώνται μόνο από την τιμή του $P(t)$, και δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$D(t) = 50 - 4P(t) + 2P'(t) + P''(t)$$

$$S(t) = 50 - P(t)$$

Αν σε κάθε χρονική στιγμή η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία, δηλαδή $D(t) = S(t)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 (ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ)

- A. Να γράψετε τη διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την εξέλιξη της τιμής ισορροπίας.
- B. Αν $P(0) = 5$ και $P'(0) = 1$, να βρείτε την συνάρτηση που δίνει την εξέλιξη της τιμής ισορροπίας του αγαθού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

A. Από συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$D(t) = S(t) \Rightarrow$$

$$50 - 4P(t) + 2P'(t) + P''(t) = 50 - P(t)$$

Η οποία δίνει την ζητούμενη διαφορική εξίσωση

$$P''(t) + 2P'(t) - 3P(t) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

B. Η εξίσωση

$$P''(t) + 2P'(t) - 3P(t) = 0$$

είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ και έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = 1 \text{ και } \lambda_2 = -3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

.

Επομένως η

$$P(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $t \in [0, +\infty)$

Είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

Από αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$P(0) = 5 \Rightarrow c_1 + c_2 = 5 \quad (17)$$

Για την δεύτερη συνθήκη χρειαζόμαστε την πρώτη παράγωγο της $y(x)$.

Αφού $P(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$ έχουμε ότι

$$P'(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

$$P'(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t}$$

Από την δευτέρη συνθήκη έχουμε:

$$P'(0) = 1 \Rightarrow c_1 - 3c_2 = 1 \quad (18)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 – ΛΥΣΗ

Από τις σχέσεις (17), (18) προκύπτει ότι $c_1 = 4$ και $c_2 = 1$

Επομένως η συνάρτηση που δίνει την εξέλιξη της τιμής του αγαθού είναι η

$$P(t) = 4e^t + e^{-3t}, t \geq 0$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ομογενής Γραμμική Διαφορική 2^{ης} Εξίσωση Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

Μορφή:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση.

- $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της.
- $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ η χαρακτηριστική εξίσωση της.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Έχει δύο ρίζες πραγματικές
και άνισες τις λ_1, λ_2

Έχει δύο ρίζες πραγματικές
και ίσες τις
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Γενική Λύση Διαφορικής
Εξίσωσης
 $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Η Χαρακτηριστική Εξίσωση
 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Έχει δύο συζυγείς μιγαδικές
ρίζες τις
 $\lambda_1 = r + pi$ και $\lambda_2 = r - pi$

Γενική Λύση Διαφορικής
Εξίσωσης
 $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$y(x)$
 $= c_1 e^{rx} \cos(px) + c_2 e^{rx} \sin(px)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = 0$$

2. Να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

3. Να λύσετε την διαφορική εξίσωση

$$10y'' + 6y' + y = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

5. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ξεπαπαδέας Α. και Γιαννίκος Ι.Χ., (2011), Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά: Θεωρία και Εφαρμογές, Ενιαίο, Εκδόσεις Gutenberg.
- Finney, R. L. & Giordano, F. R. Απειροστικός Λογισμός II , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αθανάσιος Πέτσουλας, Μαθηματικά 4, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, Πειραιάς 2009
- Γ.Ν. Παντελίδη, Δ.Χ. Κραββαρίτη, Ν. Σ. Χατζησάββα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα 1990
- William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc, New York 2001