

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση n – τάξεως με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x) \quad (1)$$

Όπου $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, και $g(x)$ μη μηδενική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση.

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Η συνάρτηση $g(x)$ ονομάζεται **όρος εξαναγκασμού** της (1)
- Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$
το ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** της (1).
- Η διαφορική εξίσωση (1) έχει πάντοτε μία λύση στο διάστημα I .

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ειδικά για $n = 2$, η γραμμική διαφορική εξίσωση είναι της μορφής

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \quad (2)$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση, και $g(x)$ μη μηδενική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα

$$I \subseteq \mathbb{R},$$

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

- Η εξίσωση αυτή
είναι μη ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Πρόταση

Αν

□ $y_0(x)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Και

□ $y_\mu(x)$ μία μερική λύση της (2),

(δηλαδή μία συνάρτηση που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (2)),

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Τότε

□ η γενική λύση της $y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$ είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x).$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

- Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου ο όρος εξαναγκασμού $g(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση.
- Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης $y_\mu(x)$ ακολουθούμε τον παρακάτω πίνακα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ – ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Όρος Εξαναγκασμού $g(x)$	Προσδιοριστέα Μερική Λύση $y_\mu(x)$
$g(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$	1Α. Αν $x = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $y_\mu(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0$
	1Β. Αν $x = 0$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $s = 1$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $y_\mu(x) = x^s (x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0)$
	1Γ. Αν $x = 0$ είναι ρίζα πολλαπλότητας $s = 2$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $y_\mu(x) = x^2 (x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1Α)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = x^2 + x - 1 \quad (3)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Η (3) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της αντίστοιχης Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς ρίζες μιγαδικές, τις

$\lambda_{1,2} = \pm i$ με πολλαπλότητα 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Επομένως έχουμε τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της
 $\cos x, \sin x$

Άρα

$$y_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$, Είναι η γενική λύση της ομογενούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (3)

$x = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (3) και ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = x^2 + x - 1$ (πολυώνυμο δευτέρου βαθμού).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής (περίπτωση Α)

$$y_{\mu}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$y_{\mu}'(x) = 2\alpha x + \beta$$

$$y_{\mu}''(x) = 2\alpha$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Από την (3)

$$y_{\mu}''(x) + y_{\mu}(x) = x^2 + x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma + 2a = x^2 + x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Επομένως

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -3$$

Άρα

$$y_{\mu}(x) = x^2 + x - 3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 – ΛΥΣΗ

Βήμα 3:

Η γενική λύση της (3) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 + x - 3$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1B):

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' = 6x - 2 \quad (4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Η (4) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' + y' = 0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + \lambda = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες τις

$\lambda_1 = 0$ με πολλαπλότητα 1

$\lambda_2 = -1$ με πολλαπλότητα 1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Άρα

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της ομογενούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (4)

$x = 0$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (4) πολλαπλότητας 1 και ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = 6x - 2$ (πολυώνυμο πρώτου βαθμού).

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής **(περίπτωση Β)**

$$y_\mu(x) = x(ax + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$y_{\mu}(x) = x(\alpha x + \beta)$$

$$y'_{\mu}(x) = 2\alpha x + \beta$$

$$y''_{\mu}(x) = 2\alpha$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Από την (4)

$$y'' + y' = 6x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$2\alpha + 2ax + \beta = 6x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$\alpha = 3, \beta = -8. \text{ Άρα}$$

$$y_{\mu}(x) = x(3x - 8) = 3x^2 - 8x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Βήμα 3:

Η γενική λύση της (4) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 – ΛΥΣΗ

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + 3x^2 - 8x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1Γ)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' = x + 1 \quad (5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Η (5) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' = 0$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζα την $\lambda = 0$ με πολλαπλότητα 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Άρα

$$y_0(x) = c_1 + c_2 x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της ομογενούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (5)

$x = 0$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (4) πολλαπλότητας 2 και ο όρος εξαναγκασμού είναι

$g(x) = x + 1$ (πολυώνυμο πρώτου βαθμού).

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής **(περίπτωση Β)**

$$y_\mu(x) = x^2(\alpha x + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$y_{\mu}(x) = x^2(\alpha x + \beta)$$

$$y'_{\mu}(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$$

$$y''_{\mu}(x) = 6\alpha x + 2\beta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Από την (5)

$$y'' = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$6ax + 2\beta = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Επομένως

$$\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{2}. \text{ Άρα}$$

$$y_{\mu}(x) = x^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Βήμα 3:

Η γενική λύση της (5) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 – ΛΥΣΗ

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΣΥΝΟΨΗ

Έστω η μη ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \quad (*)$$

ΣΥΝΟΨΗ

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση,
και $g(x)$ μη μηδενική συνεχής συνάρτηση (όρος εξαναγκασμού)
ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

Έστω επίσης ότι η $g(x)$ είναι της μορφής:

$$g(x) = P(x)$$

Όπου $P(x)$ πολυώνυμο μη μηδενικό.

ΣΥΝΟΨΗ

Τότε η γενική λύση της (*) είναι η

$$y(x) = y_o(x) + y_\mu(x)$$

Όπου:

➤ $y_o(x)$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

ΣΥΝΟΨΗ

Και

➤ $y_\mu(x)$ μία μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (*) (δηλαδή μία συνάρτηση που την ικανοποιεί).

Η $y_\mu(x)$ είναι συνάρτηση της μορφής:

$$y_\mu(x) = x^s Q(x)$$

ΣΥΝΟΨΗ

Όπου:

- $Q(x)$ πολυώνυμο ίδιου βαθμού με τον βαθμό του πολωνύμου $P(x)$ του όρου εξαναγκασμού $g(x) = P(x)$
- Η τιμή του s , εξαρτάται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου. Ειδικά:

ΣΥΝΟΨΗ

- ✓ Αν $\lambda = 0$ όχι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τότε $s = 0$ (δεν υπάρχει ο παράγοντας x^s στην $y_\mu(x)$).
- ✓ Αν $\lambda = 0$ απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τότε $s = 1$.
- ✓ Αν $\lambda = 1$ διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τότε $s = 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = x \quad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Η (1) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'' - y = 0$ (2)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (2) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες τις
 $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Άρα

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (1)

Ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = x$ ενώ $x = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (1)

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής **(περίπτωση 2Α)**

$$y_{\mu}(x) = (\alpha x + \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$y_{\mu}'^{(x)} = \alpha$$

$$y_{\mu}''^{(x)} = \beta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Από την (1)

$$y_{\mu}''(x) - y_{\mu}(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$-(\alpha x + \beta) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Από την (1)

Επομένως

$$\alpha = -1, \beta = 0 \text{ Άρα}$$

$$y_{\mu}(x) = -x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Βήμα 3:

Η γενική λύση της (1) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 – ΛΥΣΗ

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 6y' + 9y = 18x + 6 \quad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Η (1) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (2)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (2) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 9 = (\lambda - 3)^2$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$(\lambda - 3)^2 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζα την

$$\lambda = 3 \text{ με πολλαπλότητα } 2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Άρα

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (1)

Ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = 18x + 6$ ενώ $x = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής (περίπτωση 2B)

$$y_{\mu}(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$y'_{\mu}(x) = \alpha$$

$$y''_{\mu}(x) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Από την (1)

$$y_{\mu}''(x) - 6y_{\mu}'(x) + 9y_{\mu}(x) = 18x + 6 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$-6\alpha + 9\alpha x + 9\beta = 18x + 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Επομένως

$$\alpha = 2, \beta = 2 \text{ Άρα}$$

$$y_{\mu}(x) = 2x + 2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 – ΛΥΣΗ

Η γενική λύση της (1) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 2x + 2$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = x^3 \quad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Η (1) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - y = 0 \quad (2)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (2) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες τις

$$\lambda_1 = -1 \text{ με πολλαπλότητα } 1$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ με πολλαπλότητα } 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Άρα

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Βήμα 2:

Εύρεση μερικής λύσης της (1)

Ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = x^3$ ενώ $x = 0$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (1) Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής (περίπτωση 3α)

$$y_\mu(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$y'_\mu(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$$

$$y''_\mu(x) = 6ax + 2\beta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Από την (1)

$$y_{\mu}''(x) - y_{\mu}(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$6\alpha x + 2\beta - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x - \delta = x^3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Επομένως

$$\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = -6, \delta = 0 \quad \text{Άρα}$$

$$y_{\mu}(x) = -x^3 - 6x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Βήμα 3:

Η γενική λύση της (1) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 – ΛΥΣΗ

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - x^3 - 6x$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' = 5 \quad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Η (1) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Βήμα 1:

Επίλυση της Ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + y' = 0 \quad (2)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (2) είναι το

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

Ενώ η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι η

$$\lambda^2 + \lambda = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$\lambda_1 = -1 \text{ και } \lambda_2 = 0$$

Άρα

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$$

Όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές και $x \in \mathbb{R}$,

Είναι η γενική λύση της (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Εύρεση μερικής λύσης της (1)

Ο όρος εξαναγκασμού είναι $g(x) = 5$ ενώ $x = 0$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (1) πολλαπλότητας 1.

Επομένως η μερική λύση είναι της μορφής

$$y_{\mu}(x) = Ax$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$y_{\mu}'^{(x)} = A$$

$$y_{\mu}''^{(x)} = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Από την (1)

$$y_{\mu}''(x) + y_{\mu}'(x) = 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$A = 5$$

Άρα

$$y_{\mu}(x) = 5x$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 – ΛΥΣΗ

Η γενική λύση της (1) είναι η

$$y(x) = y_0(x) + y_\mu(x)$$

Δηλαδή

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + 5x$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθεί η Διαφορική Εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = -6x - 1$$

2. Να λυθεί η Διαφορική Εξίσωση

$$y'' + 2y' = 3x + 4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + y = -6x - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

4. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ξεπαπαδέας Α. και Γιαννίκος Ι.Χ., (2011), Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά: Θεωρία και Εφαρμογές, Ενιαίο, Εκδόσεις Gutenberg.
- James Bergin, Μαθηματικά για Οικονομολόγους με Εφαρμογές, Εκδόσεις Gutenberg.
- Finney, R. L. & Giordano, F. R. Απειροστικός Λογισμός II , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2004

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γ.Ν. Παντελίδη, Δ.Χ. Κραββαρίτη, Ν. Σ. Χατζησάββα Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα 1990
- William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc, New York 2001