Βασικές Έννοιες

Διαφορικών Εξισώσεων

Β' Μαχίμων Ι
2023-2024

Ορισμός 1.

Διαφορική Εξίσωση (Δ. Ε.) ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών και παραγώγους της.

Παραδείγματα

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5x + 3$, διαφορική εξίσωση (1)

$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

x : ανεξάρτητη

$$y' = 5x+3 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6y + 7x = 0$ (2)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' \quad , \quad y^{(5)} = \frac{d^5y}{dx^5} \quad , \quad y^{(0)} = y(x)$$

(2) Άγνωστη συνάρτηση $y(x)$
ανεξάρτητη μεταβλητή x

3. $e^y \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ (3)

- $y(x)$ άγνωστη συνάρτηση

$e^y \cdot y'' + 2(y')^2 = 1$

- $y(x) = 5x^2+1$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = 10x$ $\quad (y')^2 = (10x)^2 = 100x^2$

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = 10$

$(y'')^2 = 10^2 = 100$

4. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ (4)

Άγνωστη συνάρτηση $y(x,t)$

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, t

2. Ταξινόμηση των Διαφορικών Εξισώσεων

Έχουμε 2 κατηγορίες Δ.Ε.

1. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
   Ordinary Differential Equations
2. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
   Partial Differential Equations

Διαφορικές Εξισώσεις

άγνωστη συνάρτηση

μιας μεταβλητής

Συνήθεις Δ. Ε

περισσοτέρων μεταβλητών

Μερικές Δ.Ε.

Παραδείγματα

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 5e^x$ ή $y'' - 2y' = 5e^x$

   $y(x)$: άγνωστη συνάρτηση, συνήθης Δ.Ε.

2 $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} = -1$$

$y(x,t)$ άγνωστη συνάρτηση, Μερική Δ.Ε.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

3. Τάξη Δ.Ε : είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης, η οποία περιέχεται στη Δ.Ε.

Παραδείγματα

1. $$\frac{dy}{dx} - 4x = 5x\,e^{x}$$

$y(x)$, Σ.Δ.Ε., 1ης- τάξης Δ.Ε.

2. $$3\frac{d^5 y}{dx^5} + \sin x\frac{dy}{dx} + 5xy = -\frac{d^3 y}{dx^3}$$

$y(x)$ άγνωστη συνάρτηση, x ανεξάρτητη μεταβλητή, 5ης- τάξης Δ.Ε.

3. $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = 2\sin x\cos t$$

Μ.Δ.Ε., $y(x,t)$ άγνωστη συνάρτηση

3ης-τάξης Μ.Δ.Ε.

4. Γραμμικότητα Δ.Ε.

Έστω Δ.Ε:

$$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+b_1(x)\frac{dy}{dx}+b_0(x)y$$

$$=g(x) \quad (1)$$

π.χ. $x^2e^x\dfrac{d^3y}{dx^3}+\cos x\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=5x^2$

Η (1) είναι συνήθης Δ.Ε. ως προς $y(x)$ n-τάξης, είναι δε

$b_i(x)$, $i=0,1\dots n$ είναι συναρτήσεις του x <u>μόνο</u>

Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται γραμμική, γιατί είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού ως προς y, $\frac{dy}{dx}$)

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}$$

Παραδείγματα:

1. $y''' - 5x y' = e^x + 1$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση Σ.Δ.Ε. 3ης-τάξης

y', y''' δεν είναι υψωμένες σε δύναμη

άρα είναι 1ου βαθμού

και οι συντελεστές των y''', y' εξαρτώνται μόνο από το x., άρα η Δ.Ε είναι γραμμική

αν είχαμε όμως

$$y''' - 5x\, y' = e^x + 1$$

$$(y''')^2 - 5x y y' = e^x + 1$$

$$\downarrow$$

$$y^1 y^1 \rightarrow$$

Γενικά μια Δ.Ε. είναι γραμμική όταν:

1. Η άγνωστη συνάρτηση, $y(x)$ έστω, και οι παράγωγοί της που υπάρχουν στην Δ.Ε να μην υψωμένες σε δύναμη

2. Σε κάθε όρο της Δ.Ε. οι συντελεστές των y και παραγώγων να εξαρτώνται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή x.

3. Να μην υπάρχουν στη Δ.Ε. όροι e^y, $\ln y$, $\cos y$, $\sin y$, $\tan y$, $\cot y$ ή οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών $\arcsin y$, ... και y^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, y^k, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Συνέχεια παραδειγμάτων

2. $y'' - y' + y - e^y = x^2 + \cos x + 5$

- $y(x)$ άγνωστη συνάρτηση
- 2ης τάξης Σ.Δ.Ε.
- μη γραμμική, λόγω του όρου e^y

3. $t\ddot{y} - t\dot{y}^2 - \sin t\sqrt{y} = t^2 - t + 1$, όπου

$y(t)$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, ...

- άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

- 2ης τάξης Σ.Δ.Ε.
- μη-γραμμική, διότι υπάρχει ο όρος $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

4. $$s^2\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right) + st\left(\frac{dt}{ds}\right) = s^3$$

- $t(s)$ άγνωστη συνάρτηση
- 2ης-τάξης Σ.Δ.Ε
- μη γραμμική, επειδή έχουμε $t\left(\frac{dt}{ds}\right)$

5. $$6\left(\frac{d^4b}{dp^4}\right) + \left(\frac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = e^p$$

- $b(p)$ άγνωστη συνάρτηση
- 4ης-τάξης Σ.Δ.Ε
- μη-γραμμική

5. Λύση Δ.Ε.

5α. Ορισμός Λύση Δ.Ε. είναι η συνάρτηση, η οποία επαληθεύει την Δ.Ε

Παράδειγμα:

Έστω η Δ.Ε. $y'' + 4y = 0$ (1)

Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ είναι λύση της (1),

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Λύση

$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ (2)

$\Rightarrow y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$

$\Rightarrow y''(x) = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$ (3)

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στην Δ.Ε (1)

$\Rightarrow -4c_1 \cancel{\sin 2x} - 4c_2 \cancel{\cos 2x} + 4c_1 \cancel{\sin 2x} + 4c_2 \cancel{\cos 2x}$

$= 0$

Αποδείξαμε ότι η $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

επαληθεύει την Δ.Ε. (1), άρα είναι λύση της Δ.Ε.

5β. Είδη λύσεων Δ.Ε.

1. Γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα Δ.Ε. είναι κάθε συνάρτηση, έστω $y(x)$, που την επαληθεύει, άρα είναι όλο το σύνολο λύσεων - όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

2. Ειδική ή μερική λύση είναι μια από όλες τις λύσεις