Πλήρεις Διαφορικές Εξισώσεις

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad (1)$$

Αν ισύει ότι

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

τότε η δ.ε. (1) λεγεται πληρης

Π.χ $\underbrace{e^{y}}_{P(x,y)} \cdot d\cancel{x} + \underbrace{(x \cdot e^{y} + 2y)}_{Q(x,y)}\, dy = 0$

$$e^{y} + (xe^{y} + 2y) \cdot y' = 0$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (e^{y})}{\partial y} = e^{y}$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial \cancel{x}} = \frac{\partial (x \cdot e^{y} + 2y)}{\partial \cancel{x}} = e^{y}$$

πληρης δ.ε.

Επίλυση: Θελουμε να βρουμε μια $F(x,y)$ τέτοια ώστε

- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$,
- $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

Η λύση της διαφορικής

είναι $\boxed{F(x,y) = C}$

Επίλυση του παραδείγματος

$P(x,y) = e^y$, $Q(x,y) = x \cdot e^y + 2y$

Θέλουμε να βρούμε την $F(x,y)$:

- $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ • $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

- $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = e^y \Rightarrow \int \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx = \int e^y dx + c(y)$

$\Rightarrow F(x,y) = x \cdot e^y + c(y)$

- $\frac{\partial (x \cdot e^y + c(y))}{\partial y} = x \cdot e^y + 2y$

$\cancel{x \cdot e^y} + c'(y) = \cancel{x \cdot e^y} + 2y$

$c'(y) = 2y$

$\int c'(y)\, dy = \int 2y\, dy + c$

$$c(y) = y^2 + C$$

Επομένως, $\boxed{x \cdot e^{y} + y^2 = C_1}$