


- Βασικές Έννοιες
- Διαφορικών Εξισώσεων 

Β' Μαθίμων Ι-
Μηχανικών
2024-2025

Ορισμός 1.

Διαφορική Εξίσωση (Δ. Ε.) ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών και παραγώγους της.

Παραδείγματα

1. $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$, διαφορική εξίσωση (1)


$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

x : ανεξάρτητη

$$y' = 5x + 3, \quad \frac{dy}{dx} = y'$$

2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + 6y + 7x = 0$ (2)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right)$$



$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''', \quad y^{(5)} = \frac{d^5y}{dx^5}, \quad y^{(0)} = y(x)$$

(2) Άγνωστη συνάρτηση $y(x)$
ανεξάρτητη μεταβλητή x

$$3. e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 \quad (3)$$

• $y(x)$ άγνωστη συνάρτηση

$$e^y \cdot y'' + 2(y')^2 = 1$$

• $y(x) = 5x^2 + 1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 10x \quad (y')^2 = (10x)^2 = 100x^2$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 10$$

$$(y'')^2 = 10^2 = 100$$

$$4. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

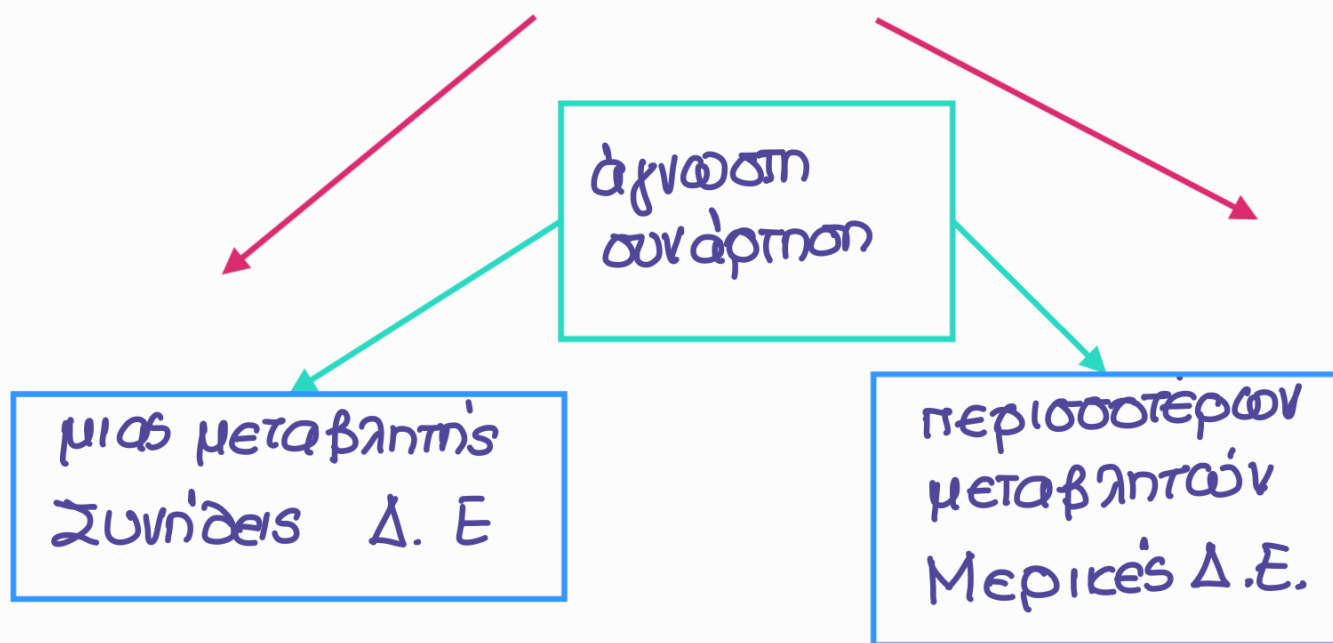
Άγνωστη συνάρτηση $y(x, t)$

Ανεξάρτητες μεταβλητές x, t

2. Ταξινόμηση των Διαφορικών Εξισώσεων Έχουμε 2 κατηγορίες Δ.Ε.

1. Συνήδεις Διαφορικές Εξισώσεις
Ordinary Differential Equations
2. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Partial Differential Equations

Διαφορικές Εξισώσεις.



Παραδείγματα

$$1. \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 5e^x \quad \eta \quad y'' - 2y' = 5e^x$$

$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση, συνήδεις Δ.Ε.

$$2 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} = -1$$

$y(x, t)$ άγνωστη συνάρτηση, Μερική Δ.Ε.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

3. Τάξη Δ.Ε : Είναι η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης, η οποία περιέχεται στη Δ.Ε.

Παραδείγματα

$$1. \quad \frac{dy}{dx} - 4x = 5x e^x$$

$y(x)$, 1. Δ.Ε., 1ης-τάξης Δ.Ε.

$$2. \quad 3 \frac{d^5 y}{dx^5} + \sin x \frac{dy}{dx} + 5xy = - \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$y(x)$ άγνωστη συνάρτηση, x ανεξάρτητη μεταβλητή, 5ης-τάξης Δ.Ε.

$$3. \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = 2 \sin x \cos t$$

Μ.Δ.Ε., $y(x, t)$ άγνωστη συνάρτηση

3ης -τάξης Μ.Δ.Ε

4. Γραμμικότητα Δ.Ε.

Έστω Δ.Ε :

$$b_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_1(x) \frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

π.χ. $x^2 e^x \frac{d^3 y}{dx^3} + \cos x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 5x^2$

Η (1) είναι συνήθους Δ.Ε. ως προς $y(x)$

n -τάξης, είναι δε

$b_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ είναι συναρτήσεις του x μόνο

Η Δ.Ε. (1) ονομάζεται γραμμική, γιατί είναι πολυώνυμο του βαθμού ως προς $y, \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$$

Παραδείγματα:

1. $y''' - 5xy' = e^x + 1$, $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση Σ. Δ. Ε. 3ης-τάξης

y' , y''' δεν είναι υψωμένες σε δύναμη

άρα είναι 1ου βαθμού

και οι συντελεστές των y''' , y' εξαρτώνται μόνο από το x , άρα η Δ.Ε είναι γραμμική

αν είχαμε όμοια

$$(y''')^2 - 5xyy' = e^x + 1$$

\downarrow
 $y^2 y^2$

Γενικά μια Δ.Ε. είναι γραμμική όταν

1. Η άγνωστη συνάρτηση, $y(x)$ έστω, και οι παράγωγοί της που υπάρχουν στην Δ.Ε να μην υψωμένες σε δύναμη

2. Σε κάθε όρο της Δ.Ε. οι συντελεστές των y και παραγώγων να εξαρτώνται μόνο απ' την ανεξάρτητη μεταβλητή x .

3. Να μην υπάρχουν στη Δ.Ε. όροι e^y , $\ln y$, $\cos y$, $\sin y$, $\tan y$, $\cot y$ ή οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών $\arcsin y$, \dots και y^{-n} , $n \in \mathbb{N}$, y^k , $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Συνέχεια παραδειγμάτων

$$2. \quad y'' - y' + y - e^y = x^2 + \cos x + 3$$

- $y(x)$ άγνωστη συνάρτηση
- 2ης τάξης Σ.Δ.Ε.
- μη γραμμική, λόγω του όρου e^y

$$3. \quad t\ddot{y} - t^2\ddot{y} - \sin t \sqrt{y} = t^2 - t + 1, \text{ όπου}$$
$$y(t), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$$

- άγνωστη συνάρτηση $y(t)$

- 2ης τάξης Σ. Δ. Ε.

- μη-γραμμική, διότι υπάρχει ο όρος $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$

$$4. \quad s^2 \left(\frac{d^2 t}{ds^2} \right) + st \left(\frac{dt}{ds} \right) = s^3$$

- $t(s)$ άγνωστη συνάρτηση

- 2ης - τάξης Σ. Δ. Ε

- μη γραμμική, επειδή έχουμε $t \left(\frac{dt}{ds} \right)$

$$5. \quad 6 \left(\frac{d^4 b}{d\varphi^4} \right) + \left(\frac{db}{d\varphi} \right)^{10} + b^7 - b^5 = e^{\varphi}$$

- $b(\varphi)$ άγνωστη συνάρτηση

- 4ης - τάξης Σ. Δ. Ε

- μη-γραμμική

5. Λύση Δ.Ε.

5a. Ορισμός λύση Δ.Ε. είναι η συνάρτηση, η οποία επαληθεύει την Δ.Ε

Παράδειγμα:

$$\text{Έστω η Δ.Ε. } y'' + 4y = 0 \quad (1)$$

Να ελεγχθεί αν η συνάρτηση

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \text{ είναι λύση της (1),}$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Λύση

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad (2)$$

$$\Rightarrow y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$$

$$\Rightarrow y''(x) = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις (2), (3) στην Δ.Ε (1)

$$\Rightarrow -4c_1 \cancel{\sin 2x} - 4c_2 \cancel{\cos 2x} + 4c_1 \cancel{\sin 2x} + 4c_2 \cancel{\cos 2x} = 0$$

Αποδεικνύεται ότι η $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

επαληθεύει την Δ.Ε. (1), άρα είναι λύση της Δ.Ε.

5β. Είδη λύσεων Δ.Ε.

1. Γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα Δ.Ε. είναι κάθε συνάρτηση, έστω $y(x)$, που την επαληθεύει, άρα είναι όλο το σύνολο λύσεων-δηλως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.
2. Ειδική ή μερική λύση είναι μια από όλες τις λύσεις