

Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών
2024 - 2025

1. Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $y' = f(x)$
άγνωστη συνάρτηση $y(x)$, $f(x)$: γνωστή
συνάρτηση

Επίλυση

$$y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int f(x) dx + c, c \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα

1. $y' = \cos x \Rightarrow y(x) = \int \cos x dx + c, c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(x) = \sin x + c, c \in \mathbb{R}$$

Αν δινόταν $y' = \cos x, y(0) = 5$ (1)

Λύνουμε κανονικά την 1ης-τάξης Δ.Ε

$$y' = \cos x \Rightarrow y(x) = \sin x + c, \text{ γενική λύση}$$

Τώρα εφαρμόζουμε την συνθήκη $y(0) = 5$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow 5 = y(0) = \sin 0 + c \Rightarrow c = 5$$

Επομένως η λύση του προβλήματος (1)

$$\text{είναι: } y(x) = \sin x + 5$$

2. $x = \tan y' \Rightarrow \arctan x = \arctan(\tan y')$

$$\Rightarrow y' = \arctan x$$

$$\Rightarrow y(x) = \int \arctan x dx + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int x' \arctan x \, dx + c$$

$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \int x (\arctan x)' \, dx + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad *$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

$$* \Rightarrow y(x) = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} \, dx + c$$
$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)|$$

$$\Rightarrow y(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$3. \quad y' = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad y(2) = -3$$

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow y(x) = \int \frac{1}{x} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \quad \text{γενική λύση}$$

$$\text{Είναι όμως } y(2) = -3$$

$$x=2 \Rightarrow -3 = \ln 2 + c \Rightarrow c = -3 - \ln 2$$

οπότε λύση του προβλήματος είναι:

$$y(x) = \ln x - 3 - \ln 2, \quad x > 0$$

2. Διαφορικές Εξισώσεις Χωρισμένων Μεταβλητών

Γενική μορφή: $y' = f(x) \cdot g(y), g(y) \neq 0$

$$\text{ή } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Λύση διαφορικής εξίσωσης

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$g(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow dy = f(x) \cdot g(y) dx : g(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx, \text{ ολοκληρώνουμε}$$

κατά μέλη,

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c, c \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα

$$1. y' = y^2 \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x, y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = \cos x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos x dx + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \sin x + c$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{\sin x + c}, c \in \mathbb{R}$$

Αν δινόταν επιπλέον, $y(\pi) = 1$

$$y \neq 0 \Rightarrow y(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sin x + c} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{0 + c}$$

$\Rightarrow c = -1$, επομένως η λύση θα ήταν

$$y(x) = -\frac{1}{\sin x - 1}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = xy^2 - x, \quad y(0) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y^2 - 1), \quad \text{για } y \neq \pm 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 1} = x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int x dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(y-1) + B(y+1)$$

$$\text{για } y=1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{για } y=-1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{'Αρα } \frac{1}{(y+1)(y-1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y-1}$$

Οπότε

$$-\frac{1}{2} \int \frac{1}{y+1} dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y-1} dy =$$

$$\int x dx + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|y+1| + \frac{1}{2} \ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x^2 + 2c \xrightarrow{c'} c', \quad c' \in \mathbb{R}$$

Είναι όμως $y(0) = 2$

$$\text{για } x=0 \Rightarrow \ln \frac{1}{3} = c' \Rightarrow c' = \ln \frac{1}{3}$$

3. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}, \quad y(0) = 1$$

$$y' = \frac{x+1}{y^4+1}, \quad y(0)=1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \Rightarrow (y^4+1)dy = (x+1)dx$$

$$\Rightarrow \int (y^4+1)dy = \int (x+1)dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Δίνεται όμως $y(0)=1$, άρα

για $x=0, y=1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{5} + 1 = c \Rightarrow c = \frac{6}{5}$$

και λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{6}{5}$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}, \quad y(x)$$

$$\Rightarrow (y + e^y) dy = (x - e^{-x}) dx, \text{ δεδομένου}$$

$$\text{ὅτι } y + e^y \neq 0 \Rightarrow e^y \neq -y \Rightarrow$$

$$y \neq \ln |-y|$$

$$\Rightarrow \int (y + e^y) dy = \int (x - e^{-x}) dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} y^2 + e^y = \frac{1}{2} x^2 + e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ γενική λύση}$$

6. Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y' = \frac{e^{-x} - e^x}{3 + 4y}$,
 $y(0) = 1$

$$\text{Πρέπει } 3 + 4y \neq 0 \Rightarrow y \neq -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$y(x) \neq -\frac{3}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x} - e^x}{3 + 4y} \Rightarrow (3 + 4y) dy =$$

$$(e^{-x} - e^x) dx$$

$$\Rightarrow \int (3+4y) dy = \int (e^{-x} - e^x)^* dx + c$$

$c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 3y + \frac{4}{2}y^2 = -e^{-x} - e^x + c, \text{ γενική λύση}$$

* Γνωρίζουμε ότι $(e^{-x})' = -e^{-x}$

$$= 2y^2 + 3y + e^{-x} + e^x - c = 0, c \in \mathbb{R}$$

Είναι όμως $y(0) = 1$, οπότε

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + e^0 + e^0 - c = 0$$

$$\Rightarrow c = 7$$

Επομένως η λύση του π. Α.Τ είναι

$$2y^2 + 3y + e^{-x} + e^x - 7 = 0.$$