

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Β' Μαθίμων Ι -
Β' Μηχανικών
 2024-2025

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1ης- τάξης

Γενική μορφή $y' + f(x)y = g(x)$ (1)

όπου $y(x)$ η άγνωστη συνάρτηση και
 $f(x), g(x)$ γνωστές συναρτήσεις

- αν $g(x) = 0 \xrightarrow{(1)} y' + f(x)y = 0$ (2)
είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1)

Έχουμε $y' + f(x)y = g(x)$ (1)

Μέθοδος επίλυσης της Δ.Ε. (1)

Η μέθοδος χρησιμοποιεί τον ολοκληρώνοντα παράγοντα ή πολλαπλασιαστή Euler.

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1) με μία κατάλληλη συνάρτηση, ώστε στο α' μέλος της νέας εξίσωσης να δημιουργηθεί παράγωγος ενός γινομένου

Πολλαπλασιαστής Euler $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε $y' - 2xy = x$ (1)

Η (1) είναι της μορφής $y' + f(x)y = g(x)$
όπου $f(x) = -2x$, $g(x) = x$

$\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$ πολλαπλασιαστής Euler

$$f(x) = -2x \Rightarrow \int f(x) dx = \int -2x dx$$
$$\Rightarrow \int f(x) dx = -x^2$$

Παρατήρηση

Στην ολοκλήρωση για να βρούμε τον πολλαπλασιαστή Euler $\mu(x)$ δεν βάζουμε σταθερά ολοκλήρωσης, γιατί αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $\mu(x)$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = -x^2 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{-x^2}$$

$$y' - 2xy = x \quad (1)$$

$$\mu(x) \cdot (1) \Rightarrow e^{-x^2} \cdot y' - 2x e^{-x^2} y = x e^{-x^2} \quad (2)$$

Ισχυριζόμαστε ότι το α' μέλος της (2)
είναι η παράγωγος $(e^{-x^2} \cdot y)'$. Είναι όμως;

$$\begin{aligned}(e^{-x^2} \cdot y)' &= (e^{-x^2})' y + e^{-x^2} y' \\ &= e^{-x^2} (-x^2)' y + e^{-x^2} y' \\ &= -2x e^{-x^2} y + e^{-x^2} y', \text{ πράγματι είναι}\end{aligned}$$

Οπότε αντικαθιστούμε το α' μέλος

$$\text{με } (e^{-x^2} y)'$$

$$\Rightarrow (e^{-x^2} y)' = x e^{-x^2} \quad \text{ολοκληρώνουμε κατά μέλη}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = \int x e^{-x^2} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} \int (-2x e^{-x^2}) dx + c$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} \int (e^{-x^2})' dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} + c e^{x^2}$$

2. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2(1), \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0$$

$$y' + \frac{3}{x} y = x^2 \rightarrow y' + f(x)y = g(x), \quad \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

Άρα η (1) είναι 1ης-τάξης γραμμική Δ.Ε

$$f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{3}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = 3 \ln |x| = \ln |x|^3, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln x^3$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x) dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x^3} \Rightarrow \mu(x) = x^3$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\mu(x) \cdot (1) \Rightarrow x^3 \cdot y' + \frac{3}{x} \cdot x^3 y = x^3 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow x^3 y' + 3x^2 y = x^5, \quad \text{το 1}^\circ \text{ μέλος είναι η}$$

$$\text{παράγωγος } (x^3 y)' \rightarrow (x^3 y)' = x^3 y' + 3x^2 y$$

πράγματι είναι

$$\Rightarrow (x^3 y)' = x^5 \Rightarrow x^3 y = \int x^5 dx + c$$

$$\Rightarrow x^3 y = \frac{x^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{6} + c x^{-3}} \text{ , γενική λύση της (1)}$$

Έχουμε όμως $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1^3}{6} + c 1^{-3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

οπότε λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3} x^{-3}}$$

3. Να λυθεί η Δ.Ε. $(\cos x)y' + (\sin x)y = -\cos^2 x$ (1)

Η Δ.Ε. δεν είναι στη μορφή $y' + f(x)y = g(x)$

ώστε να βρούμε τον πολλαπλασιαστή

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x) dx}}$$

Οπότε πρώτα διαιρούμε με $\cos x \neq 0$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = -\cos x \quad (2) \rightarrow y' + f(x)y = g(x)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f(x) dx &= \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = - \ln |\cos x| = - \ln(\cos x),^*$$

$$\cos x > 0$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x) dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln \frac{1}{\cos x}} \Rightarrow$$

$$- \ln(\cos x) = \ln(\cos x)^{-1} = \ln \frac{1}{\cos x}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\cos x}$$

πολλαπλασιάζουμε τη (2)

$$(2) \cdot \mu(x) \Rightarrow \frac{1}{\cos x} y' + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} y = \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} y' + \frac{\sin x}{\cos^2 x} y = -1$$

$$\left(\frac{1}{\cos x} y \right)' = \frac{1}{\cos x} y' - \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} y$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = - \frac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\cos x} y \right)' = -1 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} y = -\int dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} y = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = (-x + C) \cos x} \quad C \in \mathbb{R}$$

γενική λύση της Δ.Ε (2), άρα και της (1)

$$4. \quad y' + \frac{1}{x} y = e^{2x}, \quad x > 0 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln x$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x) dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x} \Rightarrow \mu(x) = x$$

$$\mu(x) \cdot (1) \Rightarrow xy' + \frac{1}{x} \cdot xy = xe^{2x}$$

$$\Rightarrow (xy)' = xe^{2x}$$

$$\Rightarrow xy = \int xe^{2x} dx + c, \quad * \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int x(e^{2x})' dx = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{2} \int x' e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

$$* \Rightarrow xy = \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4x} e^{2x} + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}, x > 0$$
