

Διαφορικές Εξισώσεις Bernoulli

Β' Μαχίμων Ι
- Β'
Μηχανικών
2024 - 2025

Διαφορικές Εξισώσεις Βερνούλλι

Γενική μορφή: $y' + f(x)y = g(x)y^n$, $n \neq 0, 1$ (1)

y^n : είναι μη γραμμικός όρος

$g(x)$: άγνωστη συνάρτηση

• αν $n=1$, τότε η (1) $\Rightarrow y' + f(x)y = g(x)y$

$\Rightarrow y' = y(g(x) - f(x))$ (2), χωρισμένων μεταβλητών

• αν $n=0 \Rightarrow y' + f(x)y = g(x)$, η οποία είναι γραμμική Δ.Ε.

Βερνούλλι $y' + f(x)y = g(x)y^n$ (1)

Αντικατάσταση:

$$y = u^{\frac{1}{1-n}}, \quad y = y(x), \quad u = u(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \left(u^{\frac{1}{1-n}} \right)' = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1}{1-n} - 1} \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{1-n} u^{\frac{1-1+n}{1-n}} \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} \cdot u', \quad u' = \frac{du}{dx}$$

Μετά την αντικατάσταση προκύπτει γραμμική Δ.Ε ως προς $u(x)$.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε. $y' - 2xy = 2xy^{\frac{1}{2}}$ (C1)

Λύση

Η Δ.Ε (C1) είναι Βεμουλλί και $n = \frac{1}{2}$

Αντικατάσταση $y = u^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow y = u^2 \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = (u^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}} = u$$

$$y = u^2 \Rightarrow y' = 2uu'$$

Αντικαθιστούμε y, y' στην (C1), οπότε

$$\text{(C1)} \Rightarrow 2uu' - 2xu^2 = 2xu \rightarrow y' + f(x)y = g(x)$$

Διαιρούμε με $2u \neq 0 \Rightarrow u(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{2uu'}{2u} - \frac{2x}{2u} u^2 = \frac{2xu}{2u}$$

$$\Rightarrow u' - xu = x \quad (2),$$

$u(x)$: άγνωστη συνάρτηση

Η (2) είναι μια γραμμική Δ.Ε ως προς

$$u(x), \quad f(x) = -x,$$

Μετασχηματισμός $\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$

$$f(x) = -x \Rightarrow \int f(x) dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x) dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ παράγον-}$$

τας Euler

$$(2) \cdot \mu(x) \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} (u' - xu) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} u' - x e^{-\frac{x^2}{2}} u = x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3)$$

Το α μέλος πρέπει να είναι η παράγωγος

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}} u \right)' = \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' u + e^{-\frac{x^2}{2}} u'$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{x^2}{2} \right)' u + e^{-\frac{x^2}{2}} u'$$
$$= -x e^{-\frac{x^2}{2}} u + e^{-\frac{x^2}{2}} u'$$

$$(3) \Rightarrow \left(e^{-\frac{x^2}{2}} u \right)' = x e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ ολοκληρώνουμε}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} u = \int \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx + c$$

$$x e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{2x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = -\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)'$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} u = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$\Rightarrow u(x) = -1 + c e^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{e^{-x}} = e^x$$

Το ζητούμενο είναι η $y(x)$.

$$\text{Είναι όμως } y = u^2 \Rightarrow y(x) = u^2(x)$$

Επομένως

$$y(x) = \left(-1 + c e^{\frac{x^2}{2}} \right)^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε :

$$y' - \frac{3}{x} y = x^4 y^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

$$y' + f(x)y = g(x)y^n \quad \text{Bernoulli, } n = \frac{1}{3}$$

$$y = u^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow y = u^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y' = \left(u^{\frac{3}{2}}\right)' \Rightarrow y' = \frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}-1} u'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u'$$

$$y^{\frac{1}{3}} = u^{\frac{1}{2}}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) y, y' συναρτήσεις του u και έχουμε

$$\Rightarrow \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} u' - \frac{3}{x} u^{\frac{3}{2}} = x^4 u^{\frac{1}{2}}, \text{ διαιρούμε}$$

$$\Rightarrow u' - \frac{2}{x} u = \frac{2}{3} x^4 \quad (2), \quad u(x): \text{ άγνωστη}$$

γραμμική Δ.Ε ως προς $u(x)$, όπου

$$y' + f(x)y = g(x), \quad \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

$$f(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow \int f(x) dx = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = -2 \ln|x|$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln \frac{1}{|x|^2} = \ln \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}, \quad \boxed{e^{\ln x} = x}$$

$$\mu(x) \cdot (2) \Rightarrow \frac{1}{x^2} u' - \frac{2}{x^3} u = \frac{2}{3} x^2$$

$$\left(\frac{1}{x^2} u \right)' = \frac{1}{x^2} u' - \frac{2}{x^3} u$$

$$\left(\frac{1}{x^n} \right)' = \left(x^{-n} \right)' = -n x^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} u \right)' = \frac{2}{3} x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} u = \frac{2}{3} \int x^2 dx + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} u = \frac{2}{9} x^3 + C$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{2}{9} x^5 + Cx^2$$

$$y(x) = u(x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(x) = \left(\frac{2}{9} x^5 + Cx^2 \right)^{\frac{3}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

