Διαφορικές Εξισώσεις
2ης τάξης

Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών

2024 - 2025

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης-τάξης με σταθερούς συντελεστές

1. Ομογενείς

Γενική μορφή : $\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$ (1)

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

Για να λύσουμε την (1)

Γράφουμε την αντίστοιχη αλγεβρική

χαρακτηριστική εξίσωση, θέτοντας όπου

$$y'' \longrightarrow \lambda^2$$

$$y' \longrightarrow \lambda$$

$$y \longrightarrow 1$$

Οπότε προκύπτει: $\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0}$ (2)

που είναι 2ου βαθμού αλγεβρική εξίσωση.

a. Αν $\Delta = a_1^2 - 4a_2 > 0$, η (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Αντίστοιχα, η γενική μορφή λύσης της ΔΕ(1)

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

β. $\Delta = 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 = 0$, η (2) έχει μία ρίζα διπλή: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{a_1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της (1) είναι: $\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}}$

γ. Αν $\Delta < 0 \Rightarrow a_1^2 - 4a_2 < 0$, τότε η (2) έχει 2 ρίζες συζυγείς μιγαδικές, έστω

$\lambda_1 = a + \beta i$, $\lambda_2 = a - \beta i$

και η γενική λύση της (1) είναι

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{ax} \cos(\beta x) + c_2 e^{ax} \sin(\beta x)}$$

$\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$

$y(x) = c_1 e^{3x} \cos(2x) + c_2 e^{3x} \sin(2x)$

Παραδείγματα

Να λυθούν οι κάτωθι Δ.Ε.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Βρίσκουμε τη Χ.Ε.

$$y'' \longrightarrow \lambda^2 \qquad y' \longrightarrow \lambda \qquad y \longrightarrow 1$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Η γενική λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Αν $y(1) = -1$, $y(0) = 2$

Για $y(1) = -1 \Rightarrow -1 = c_1 e^2 + c_2 e$

$$c_1 e^2 + c_2 e = -1 \Rightarrow c_1 e + c_2 = -\frac{1}{e}$$

Για $y(0) = 2 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 2$

$$\left.\begin{aligned} c_1 e + c_2 &= -\frac{1}{e} \\ c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(e-1) = -\frac{1}{e} - 2 \Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{1+2e}{e(e-1)}}$$

και $$c_2 = 2 + \frac{1+2e}{e(e-1)} \Rightarrow c_2 = \frac{2e^2-2e+1+2e}{e(e-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{2e^2+1}{e(e-1)}}$$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0$ $\quad y'' \to \lambda^2 \quad y' \to \lambda \quad y \to 1$

ΧΕ : $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$

Γενική λύση $\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

3. $y'' - 4y' + 5y = 0$

ΧΕ: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$

$$\lambda = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2+i & \lambda_1 = a+ib \\ \lambda_2 = 2-i & \lambda_2 = a-ib \end{cases}$$

$$y(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$$

$a=2,\ b=1$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x}$$

Διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης
Γραμμικές με σταθερούς συντελεστές
Μη ομογενείς και ειδική μορφή 2ου μέλους

Γενική μορφή:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right)e^{px}} \quad (1)$$

π.χ. $y'' - 5y' + 3y = x^2 \cos 2x \, e^{-2x}$

όπου $a_1, a_2, A, B, \omega, p$ είναι πραγματικές σταθερές και $f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση ως προς x.

Η (1) έχει αντίστοιχη ομογενή $\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$ (2)

Πώς λύνουμε την (1);

1ο Βήμα

Είναι γνωστό ότι η μορφή της γενικής λύσης της Δ.Ε. (1)

$$\boxed{y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μερ}(x)} \quad (3)$$

όπου $y_{ομ}(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της (2) και

$y_{μερ}(x)$ είναι μια μερική λύση της (1).

2ο Βήμα

Βρίσκουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y''+a_1y'+a_2y=0$ (2)
γράφοντας τη Χ.Ε: $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$,
άρα βρίσκουμε την $y_{ομ}(x)$.

3ο Βήμα

Βρίσκουμε μια μερική λύση $y_{μερ}(x)$ της αρχικής Δ.Ε. (1).
Είναι γνωστό ότι η μορφή μιας μερικής λύσης της Δ.Ε. (1) είναι

$$y_{μερ}(x)=x^r\left[\Pi(x)\cos(\omega x)+\Phi(x)\sin(\omega x)\right]e^{\rho x} \quad (4)$$

όπου $\boxed{r}$ η πολλαπλότητα της ρίζας $\boxed{\rho+i\omega}$ στην χαρακτηριστική εξίσωση (2)

Όταν βρούμε τη μερική λύση, την αντικαθιστούμε στην αρχική Δ.Ε (1) και έτσι την υπολογίζουμε πλήρως.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί η Δ.Ε $y'' - 4y = \underbrace{x^2+1}$ (1)

$a_1 = 0$, $a_2 = -4$, $f(x) = x^2+1$, $\omega = 0$, $p = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\omega = 0 \\ p = 0\end{array}\right| \Rightarrow p + i\omega = 0 + 0i = 0$$

Η μορφή της γενικής λύσης της (1)

$$\boxed{y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu\varepsilon\rho}(x)}$$

1ο Βήμα

Βρίσκουμε την λύση της αντίστοιχης ομογενούς

Παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ της (1), δηλαδή

$$y'' - 4y = 0 \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}y'' \longrightarrow \lambda^2 \\ y' \longrightarrow \lambda \\ y \longrightarrow 1\end{array}\right| \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}$$

Επομένως $y_{ομ}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{2ο Βήμα}}$

Υπολογισμός $y_{μερ}(x)$

$$y_{μερ}(x) = x^r \left[\Pi(x)\cos\bar{\omega}x + \cancel{\varphi(x)}\sin\omega x\right]e^{\rho x}$$

$\rho + i\omega = 0$

$\omega = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1$, $\rho = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y_{μερ}(x) = x^r \cdot \Pi(x)}$$

$r =$ η πολλαπλότητα της $\rho + i\omega = 0$

στη Χ.Ε. $\lambda^2 - 4 = 0$. Επειδή $0 \neq -2, 2$

$\Rightarrow r = 0$

$\Pi(x)$ είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την $f(x) = x^2 + 1$, άρα δευτέρου βαθμού, οπότε

$\Pi(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Τελικά η $y_{μερ}(x) = x^0 \cdot (k_1 x^2 + k_2 x + k_3)$

$$\Rightarrow \boxed{y_{μερ}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3} \quad (3)$$

Όμως εφ' όσον η (3) είναι μερική λύση της Δ.Ε. (1) πρέπει να την επαληθεύει:

$y'' - 4y = x^2 + 1 \quad y''_{μερ}(x) - 4y_{μερ}(x) = x^2 + 1 \quad (4)$

$y_{μερ}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$

$\Rightarrow y'_{μερ}(x) = 2k_1 x + k_2$

$\Rightarrow y''_{μερ}(x) = 2k_1$

Επομένως, αντικαθιστώντας παίρνουμε (4)

$2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$

$-4k_1 x^2 - 4k_2 x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4k_1 = 1 \\ -4k_2 = 0 \\ 2k_1 - 4k_3 = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{4} \\ k_2 = 0 \\ 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 4k_3 = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$k_1 = -\frac{1}{4}, \; k_2 = 0, \; k_3 = -\frac{3}{8}$

και $\boxed{y_{μερ}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}}$

Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Να λυθεί η Δ.Ε : $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ (1)

$a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $f(x) = x$, $\omega = 0$, $\rho = 1$

$\omega = 0$, $\rho = 1 \Longrightarrow \rho + i\omega = 1 + 0i \Rightarrow \boxed{\rho + i\omega = 1}$

και $\boxed{y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μερ}(x)}$ (2)

$\boxed{\text{1ο Βήμα}}$

$y_{ομ}(x) = ;$ αντίστοιχη ομογενής

$y'' - 3y' + 2y = 0$

ΧΕ $\Rightarrow$ $y'' \longrightarrow \lambda^2$, $y' \rightarrow \lambda$, $y \rightarrow 1$

ΧΕ: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$ ⟨ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

$\Longrightarrow \boxed{y_{ομ}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}}$ (3), $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{2ο Βήμα}}$

$y_{μερ}(x) = ;$

$$\boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x^r\left[\Pi(x)\cos\omega x + \varphi(x)\sin\omega x\right]e^{\rho x}}$$

r : πολλαπλότητα της ρίζας $\rho + i\omega = 1$ στη ΧΕ

Επειδή $\lambda_1 = 1$ είναι μία από τις δύο ρίζες της ΧΕ, το $r = 1$

$\omega = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \ \sin 0 = 0$

$\rho = 1$

οπότε : $y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x^1(\Pi(x) \cdot 1 + \varphi(x) \cdot 0)e^{1x}$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x \cdot \Pi(x) \cdot e^x}$$

με $\Pi(x)$ πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την $f(x) = x$, δηλαδή 1ου βαθμού, άρα $\Pi(x) = k_1 x + k_2$

και τελικά

$$\boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x\left(k_1 x + k_2\right)e^x} \qquad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της (1) πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad (1),$$

$$\boxed{y''_{\mu\varepsilon\rho} - 3y'_{\mu\varepsilon\rho} + 2y_{\mu\varepsilon\rho} = xe^x} \quad (5)$$

$$\boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x(k_1x + k_2)e^x}$$

Επομένως

$$y'_{\mu\varepsilon\rho} = \left[x(k_1x + k_2)e^x\right]' = \left[(k_1x^2 + k_2x)e^x\right]'$$

$$\Rightarrow y'_{\mu\varepsilon\rho} = (2k_1x + k_2)e^x + (k_1x^2 + k_2x)e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y'_{\mu\varepsilon\rho} = \left[k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2\right]e^x}$$

$$\Rightarrow y''_{\mu\varepsilon\rho} = (2k_1x + 2k_1 + k_2)e^x +$$

$$+ \left[k_1x^2 + (2k_1 + k_2)x + k_2\right]e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y''_{\mu\varepsilon\rho} = \left[k_1x^2 + (4k_1 + k_2)x + 2k_1 + 2k_2\right]e^x}$$

Αντικαθιστώντας τις $y_{\mu\varepsilon\rho}$, $y'_{\mu\varepsilon\rho}$ και $y''_{\mu\varepsilon\rho}$

στην (5) παίρνουμε

$$\left[k_1x^2+(4k_1+k_2)x+2k_1+2k_2\right]e^x$$

$$-3\left[k_1x^2+(2k_1+k_2)x+k_2\right]e^x$$

$$+2x(k_1x+k_2)e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow \left[(4k_1+k_2-6k_1-3k_2+2k_2)x+(2k_1+2k_2-3k_2)\right]e^x$$

$$= xe^x$$

$$\Rightarrow \boxed{-2k_1x+2k_1-k_2 = x. \text{ εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2k_1=1 \\ 2k_1-k_2=0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} k_1=-\dfrac{1}{2} \\ k_2=-1 \end{array}$$

Άρα $y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^x$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\mu\epsilon\rho}(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x}$$

και η γενική λύση της Δ.Ε (1) είναι

$$\boxed{y(x) = c_1e^x+c_2e^{2x}+\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^x}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Να λυθεί η Δ.Ε: $y'' - 4y = x^2 + 1$ (1)

$a_1 = 0$, $a_2 = -4$, $f(x) = x^2 + 1$, $\omega = 0$, $\rho = 0$

$\Rightarrow \rho + i\omega = 0 + i\,0 \Rightarrow \rho + i\omega = 0$

1ο Βήμα

$y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μερ}(x)$

Βρίσκουμε την $y_{ομ}(x)$.

Γράφουμε την αντίστοιχη ομογενή της (1)

$y'' - 4y = 0$ (2)

Για να βρούμε την $y_{ομ}(x)$, γράφουμε την ΧΕ:

$y'' \longrightarrow \lambda^2$, $y' \longrightarrow \lambda$, $y \longrightarrow 1$

ΧΕ: $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-2) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

οπότε $\boxed{y_{ομ}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}}$ (3) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2ο Βήμα

Βρίσκουμε μια $y_{μερ}(x)$ της (1), με

$$\boxed{y_{μερ}(x) = x^r\big(\Pi(x)\cos\omega x + \varphi(x)\sin\omega x\big)e^{\rho x}}$$

και η αρχική Δ.Ε:

$y'' - 4y = x^2+1$,

$\omega = 0$, $\rho = 0$, $\rho + i\omega = 0$, $f(x) = x^2+1$ και

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

Εφ' όσον $\rho + i\omega = 0$ και $0 \neq -2, 2$, συμπεραίνουμε ότι η πολλαπλότητα $r = 0$

άρα

$$y_{μερ}(x) = x^0\big(\Pi(x)\cos 0x + \cancel{\varphi(x)\sin 0x}\big)e^{0x}$$

$\cos 0x = 1$, $\sin 0x = 0$

$\Pi(x)$ είναι πολυώνυμο ίσου βαθμού με την $f(x) = x^2+1$, άρα 2ου βαθμού ως προς x $\Rightarrow$ $\Pi(x) = k_1x^2 + k_2x + k_3$,

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3} \quad (4)$$

Εφ' όσον η (4) είναι μια μερική λύση της Δ.Ε (1):

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad (1)$$

τότε πρέπει να ικανοποιεί την Δ.Ε. (1)

$$y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Longrightarrow \boxed{y''_{\mu\varepsilon\rho}(x) - 4\, y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x^2 + 1} \quad (5)$$

$$y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$\Longrightarrow y'_{\mu\varepsilon\rho}(x) = 2k_1 x + k_2$$

$$\Longrightarrow y''_{\mu\varepsilon\rho}(x) = 2k_1$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και παίρνουμε

$$\Longrightarrow 2k_1 - 4\left(k_1 x^2 + k_2 x + k_3\right) = x^2 + 1$$

$$\Longrightarrow 2k_1 - 4k_1 x^2 - 4k_2 x - 4k_3 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow -4k_1 x^2 - 4k_2 x + (2k_1 - 4k_3) = x^2 + 1$$

που είναι δύο εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα, άρα

$$\left.\begin{aligned} -4k_1 &= 1 \\ -4k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 4k_3 &= 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{4} \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Επομένως $\boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}}$ (6)

Οπότε καταλήγουμε ότι η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι η παρακάτω

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu\varepsilon\rho}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}} \quad (7)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Αν είχαμε το Π.Α.Τ.

$$y'' - 4y = x^2 + 1, \quad y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y(1) = -1$$

για $x=0$, $y(0)=1$

$$\Rightarrow 1 = c_1 + c_2 - \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = \frac{11}{8}}$$

για $x=1$, $y(1) = -1$

$$\Rightarrow -1 = c_1 e^2 + c_2 e^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 e^2 + c_2 e^{-2} = -\frac{3}{8} \Longrightarrow \boxed{c_1 + c_2 e^{-4} = -\frac{3}{8e^2}}$$

$$\Rightarrow c_2 \left(1 - e^{-4}\right) = \frac{11}{8} + \frac{3}{8e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{11e^2 + 3}{8e^2(1 - e^{-4})}} \quad \boxed{c_1 = \frac{11e^6 - 3}{8e^2(1 - e^4)}}$$

και έχοντας τις τιμές c_1 και c_2, αντικαθιστούμε στην γενική λύση (7).

4. Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}\cos x$ (1)

Λύση:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)\left[A\cos\omega x + B\sin\omega x\right] e^{px}$$

$$y_{\mu\varepsilon\rho}(x) = x^{r}\left[\Pi(x)\cos\omega x + \varphi(x)\sin\omega x\right] e^{px}$$

$a_1 = -5$, $a_2 = 6$, $f(x) = 2$, $\omega = 1$, $p = 1$

$\left.\begin{matrix}\omega = 1\\ p = 1\end{matrix}\right| \Rightarrow p + i\omega = 1 + i \cdot 1 = 1 + i$

Η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$\boxed{y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu\varepsilon\rho}(x)} \quad (2)$$

1ο Βήμα

Λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Χ.Ε. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$$\boxed{y_{o\mu}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}} \quad (3)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2ο Βήμα

Εύρεση μιας μερικής λύσης $y_{\mu\epsilon\rho}(x)$

$$\boxed{y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x^r \left[\Pi(x) \cos\omega x + \varphi(x) \sin\omega x \right] e^{px}}$$

$p = 1$, $\omega = 1$, $p + i\omega = 1 + i$, $f(x) = 2$

r είναι η πολλαπλότητα του $p + i\omega =$ $1 + i$ στη Χ.Ε που έχει ρίζες $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

$1 + i \neq 3, 2 \Rightarrow r = 0$

$\Pi(x)$ και $\varphi(x)$ είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού με την $f(x)=2$

Επομένως $\Pi(x)=k_1$, $\varphi(x)=k_2$

Τελικά

$$y_{\mu\varepsilon\rho}(x)=x^0\left[k_1\cos x+k_2\sin x\right]e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\mu\varepsilon\rho}(x)=(k_1\cos x+k_2\sin x)e^x}$$

$$y''-5y'+6y=e^x\cos x \quad (1)$$

$$\Rightarrow y''_{\mu\varepsilon\rho}-5y'_{\mu\varepsilon\rho}+6y_{\mu\varepsilon\rho}=2e^x\cos x,$$

η $y_{\mu\varepsilon\rho}(x)$ επαληθεύει την Δ.Ε (1)

$$y_{\mu\varepsilon\rho}(x)=(k_1\cos x+k_2\sin x)e^x$$

$$\Rightarrow y'_{\mu\varepsilon\rho}(x)=(-k_1\sin x+k_2\cos x)e^x$$

$$+(k_1\cos x+k_2\sin x)e^x$$

$$\Rightarrow y''_{\mu\varepsilon\rho}(x)=(-k_1\cos x-k_2\sin x)e^x$$

$$+\left(-k_1\sin x+k_2\cos x\right)e^x+\left(-k_1\sin x+k_2\cos x\right)e^x$$

$$+\left(k_1\cos x+k_2\sin x\right)e^x$$

οπότε

$$\Big(-k_1\cos x-k_2\sin x+k_1\sin x+k_2\cos x-k_1\sin x$$
$$+k_2\cos x+k_1\cos x+k_2\sin x\Big)e^x$$
$$+\left(-5k_1\cos x+5k_1\sin x-5k_2\sin x-5k_2\cos x\right)e^x$$
$$+\left(6k_1\cos x+6k_2\sin x\right)e^x=2e^x\cos x$$

$\Longrightarrow$

$$\left(-k_1+k_2+k_2+k_1-5k_1-5k_2+6k_1\right)\cos x$$

$$+\left(-k_2+k_1-k_1+k_2+5k_1-5k_2+6k_2\right)\sin x=2\cos x$$

$$\Longrightarrow\left(k_1-3k_2\right)\cos x+\left(5k_1+k_2\right)\sin x=2\cos x$$

$$\left.\begin{aligned}k_1-3k_2&=2\\5k_1+k_2&=0\end{aligned}\right|\Longrightarrow 16k_1=2\Longrightarrow\boxed{k_1=\frac{1}{8}}$$

$$\boxed{k_2 = -\frac{5}{8}}$$

Άρα $y_{\mu\epsilon\rho}(x) = \left(\frac{1}{8}\cos x - \frac{5}{8}\sin x\right)e^{x}$

Επομένως

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{8}\cos x - \frac{5}{8}\sin x\right)e^{x}}$$

Μεθοδολογία επίλυσης 2ης τάξης Δ.Ε.

Ομογενής $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

Χαρακτηριστική Εξίσωση $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

1. $\Delta > 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2. $\Delta = 0 \rightarrow$ Διπλή ρίζα, $\lambda \rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + x c_2 e^{\lambda x}$

3. $\Delta < 0 \rightarrow \lambda_1 = a + ib,\ \lambda_2 = a - ib$

   $\rightarrow y(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$

Μη ομογενής

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)\ \left[A\cos\omega x + B\sin\omega x\right] e^{px}$$

$$\rightarrow y(x) = y_{ομ}(x) + y_{μερ}(x)$$

$$y_{ομ}(x) \rightarrow y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$y_{μερ}(x) = x^r \left[\Pi(x)\cos\omega x + \Phi(x)\sin\omega x\right] e^{px}$$

r : πολλαπλότητα της $\rho + i\omega$ σαν ρίζα της
Χ.Ε. της αντίστοιχης ομογενούς

$\Pi(x), \varphi(x)$: πολυώνυμα ίδιου βαθμού με
την $f(x)$