

Επαναληπτικές Ασκήσεις Διαφορικών Εξισώσεων



Β' Μαχίμων Ι - Β' Μηχανικών
2025-2026

Σ. Κυρίτση - Γιάλλουρου

Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Άσκηση 1

$$xy' + 2y = x^3 y^2 \sin x, \quad x > 0 \quad (1)$$

Λύση

$$xy' + 2y = x^3 y^2 \sin x \quad \text{Διαιρούμε } x > 0,$$

$$\Rightarrow y' + \frac{2}{x} y = x^2 y^2 \sin x \quad (1)$$

Η (1) είναι μια Δ.Ε. Bernoulli με $n=2$

$$\text{Θέτουμε } y = u^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{1-2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{u} \quad \text{και} \quad y' = -\frac{1}{u^2} u' \quad y^2 = \frac{1}{u^2}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές y, y^2 και y' στην (1)
και έχουμε

$$-\frac{1}{u^2} u' + \frac{2}{x} \frac{1}{u} = \frac{1}{u^2} x^2 \sin x, \text{ διαιρούμε}$$

$$\text{με } -\frac{1}{u^2}, \text{ οπότε}$$

$$\Rightarrow u' - \frac{2}{x} u = -x^2 \sin x \quad (2)$$

Καταλήξαμε στη (2), η οποία είναι μια γραμμική $\ln s$ -τάξης Δ.Ε, με $f(x) = -\frac{2}{x}$

$$\text{Άρα } \int f(x) dx = - \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow$$

$$\int f(x) dx = -2 \ln |x|, x > 0$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \ln \frac{1}{x^2}$$

Πολλαπλασιασμός Euler $\mu(x) = e^{\int f(x) dx}$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\ln \frac{1}{x^2}} \Rightarrow \boxed{\mu(x) = \frac{1}{x^2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2)

$$\mu(x) \cdot (2) \Rightarrow \frac{1}{x^2} u' - \frac{1}{x^2} \frac{2}{x} u = -\frac{1}{x^2} x^2 \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} u' - \frac{1}{x^3} u = -\sin x \quad (3)$$

Το πρώτο μέλος είναι η παράγωγος

$\left(\frac{1}{x^2} u \right)'$ Πράγματι αν υπολογίσουμε την

παράγωγο έχουμε

$$\left(\frac{1}{x^2} u \right)' = \frac{1}{x^2} u' - \frac{2}{x^3} u \quad \text{που είναι το}$$

α' μέλος της (3)

$$\text{Επομένως (3)} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} u \right)' = -\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} u = \int -\sin x dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} u = \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow u(x) = x^2 (\cos x + c), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι όμως } y(x) = \frac{1}{u(x)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2 (\cos x + c)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί το Π.Α.Τ: $xy' = (1-y^2)^{\frac{1}{2}} y(e) = \frac{1}{2}$

Λύση:

$$\text{Για } x \neq 0 \Rightarrow y' = \frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{x} \Rightarrow \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x} dx$$

Η Δ.Ε. όπως παρατηρούμε είναι χωριζομένων μεταβλητών, άρα

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x} dx, \text{ όμως } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$$

$$\Rightarrow \arcsin y = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \sin(\ln|x| + C)} \text{ είναι η γενική}$$

λύση.

Η λύση του Π.Α.Τ. : Έχουμε $y(e) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \sin(1+c) \Rightarrow 1+c = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{και } 1+c = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow c = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή } c = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - 1, k \in \mathbb{Z}$$

Αντικαθιστώντας τις διαφορετικές τιμές του c , έχουμε :

$$y(x) = \sin\left(\ln|x| + 2k\pi + \frac{\pi}{6} - 1\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή } y(x) = \sin\left(\ln|x| + 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - 1\right)$$

Άσκηση 3

$$(4-x^2)y' + 2xy = 3x^2, \quad y(1)=1, \quad 4-x^2 > 0$$

Λύση

Εφ' όσον $4-x^2 > 0 \Rightarrow 4-x^2 \neq 0$, οπότε διαιρούμε
κατά μέλη με $4-x^2 \neq 0$

$$\Rightarrow y' + \frac{2x}{4-x^2} y = \frac{3x^2}{4-x^2} \quad (1)$$

Η Δ.Ε. (1) είναι γραμμική Δ.Ε, $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{2x}{4-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = - \int \frac{-2x}{4-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = - \int \frac{(4-x^2)'}{4-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = - \ln |4-x^2| = \ln \frac{1}{4-x^2}, \quad 4-x^2 > 0$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\ln \frac{1}{4-x^2}} \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{4-x^2}$$

$$\text{Οπότε } (1) \cdot \mu(x) \Rightarrow \frac{y'}{4-x^2} + \frac{2x}{(4-x^2)^2} y = \frac{3x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$\text{όμως } \frac{y'}{4-x^2} + \frac{2x}{(4-x^2)^2} y = \left(\frac{y}{4-x^2} \right)' \text{ και αντικαθι-}$$

στώντας παίρνουμε

$$\left(\frac{y}{4-x^2} \right)' = \frac{3x^2}{(4-x^2)^2} \Rightarrow \frac{y}{4-x^2} = \int \frac{3x^2}{(4-x^2)^2} dx + c, \\ c \in \mathbb{R}$$

$$\text{As υπολογίσουμε το } \int \frac{3x^2}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\int \frac{3x^2}{(4-x^2)^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{(4-x^2)^2} \cdot x dx$$

$$= -\frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{4-x^2} \right)' x dx$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{1}{4-x^2} x + \frac{3}{2} \int \frac{1}{4-x^2} x' dx$$

$$= -\frac{3}{2(4-x^2)} + \frac{3}{2} \int \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$\text{Το ολοκλήρωμα } \int \frac{1}{4-x^2} dx \text{ υπολογίζεται}$$

με άθροισμα απλών κλασμάτων

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{(2-x)(2+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x}$$

$$\Rightarrow 1 = A(2+x) + B(2-x)$$

$$\gamma\iota\omicron x = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\gamma\iota\omicron x = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{2-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{2+x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2-x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2+x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln|2-x| + \frac{1}{4} \ln|2+x|$$

$$= \frac{1}{4} \ln|(2-x)(2+x)|$$

$$= \frac{1}{4} \ln|4-x^2|, \quad 4-x^2 > 0$$

$$= \frac{1}{4} \ln(4-x^2)$$

$$\text{Τελικά} \int \frac{3x^2}{(4-x^2)^2} dx = -\frac{3}{2(4-x^2)} + \frac{3}{8} \ln(4-x^2)$$

$$\text{Γενική λύση: } \frac{y}{4-x^2} = -\frac{3}{2(4-x^2)} + \frac{3}{8} \ln(4-x^2)$$

$$\frac{y}{4-x^2} = -\frac{3}{2(4-x^2)} + \frac{3}{8} \ln(4-x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{8} (4-x^2) \ln(4-x^2) + c$$

$$\text{Δίνεται } y(1) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{8} \ln 3 + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2} - \frac{9}{8} \ln 3$$

Οπότε λύση

$$y(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{8} (4-x^2) \ln(4-x^2) + \frac{5}{2} - \frac{9}{8} \ln 3$$

Άσκηση 4

Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2}$, $x > 0$

Λύση:

$$y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \quad (1), \text{ Η Δ.Ε (1) είναι ομογενής}$$

γιατί ο αριθμητής $2xy$ είναι του ίδιου βαθμού ομογένειας ως προς x και y με τον παρονομαστή $3y^2 - x^2$

$$\text{Θέτουμε } y = xu \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$(1) \Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{2x^2u}{3x^2u^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{3u^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{3u^2 - 1} - u$$

$$\Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{-3u^3 + 3u}{3u^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{3u^2 - 1}{-3u^3 + 3u} du = \frac{1}{x} dx \quad (2)$$

Η Δ.Ε (2) είναι χωριζομένων μεταβλητών
ως προς $u(x)$

$$\Rightarrow \int \frac{3u^2 - 1}{-3u^3 + 3u} du = \int \frac{1}{x} dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \int \frac{(u^3 - u)'}{u^3 - u} du = \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$x > 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \ln |u^3 - u| = \ln x + \ln c', \quad \ln c' = c$$

$$\text{και } y(x) = x u(x) \Rightarrow u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{y^3(x)}{x^3} - \frac{y(x)}{x} \right| = -\ln x^3 - \ln c^3,$$

$$\ln \left| \frac{\frac{3}{y(x)}}{x^3} - \frac{y(x)}{x} \right| = \ln \frac{1}{(xc')^3}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\frac{3}{y(x)}}{x^3} - \frac{y(x)}{x} \right| = \frac{1}{(xc')^3}, c' \in \mathbb{R}$$

Ασκήσεις Διαφορικών Εξισώσεων 2ης τάξης

Άσκηση 1

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών-Π.Α. Τ

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2 \quad (1), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

Λύση

Για να λύσουμε το πρόβλημα κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια Δ.Ε. 2ης-τάξης, γραμμική, μη ομογενή με σταθερούς συντελεστές και δεύτερο μέλος μια πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού ως προς x , $f(x) = x^2 + 2$

1. Όπως γνωρίζουμε η γενική λύση της Δ.Ε. είναι της μορφής

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x)$$

όπου $y_{\text{ομ}}(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (1) που είναι η Δ.Ε.

$$y'' - 5y' + 6 = 0 \quad (2), \quad \text{οπότε}$$

$$y'' \longrightarrow \lambda^2$$

$$y' \longrightarrow \lambda$$

$$y \longrightarrow 1$$

προκύπτει η χαρακτηριστική εξ-

$$\text{ίσωση } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\text{με λύσεις } \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Μια μερική λύση της αρχικής Δ.Ε. (1), εφ' όσον η $f(x) = x^2 + 2$ είναι 2ου βαθμού, θα είναι της μορφής $y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$, δηλαδή ένα πλήρες πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς x , με άγνωστους τους πραγματικούς αριθμούς k_1, k_2 και k_3 .

Για να βρούμε την $y_{\text{μερ}}(x)$ είναι φανερό ότι αν αντικαθίστουμε την $y_{\text{μερ}}(x)$ στην αρχική Δ.Ε. (1): $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 2$, θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει :

$$y''_{\mu\epsilon\rho}(x) - 5y'_{\mu\epsilon\rho}(x) + 6y_{\mu\epsilon\rho}(x) = x^2 + 2 \quad (3)$$

όπου $y_{\mu\epsilon\rho}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$, άρα

- $y_{\mu\epsilon\rho}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$
- $y'_{\mu\epsilon\rho}(x) = 2k_1 x + k_2$
- $y''_{\mu\epsilon\rho}(x) = 2k_1$

Αντικαθιστούμε στην (3) και έχουμε

$$2k_1 - 5(2k_1 x + k_2) + 6(k_1 x^2 + k_2 x + k_3) = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow 6k_1 x^2 + (-10k_1 + 6k_2)x + (2k_1 - 5k_2 + 6k_3) = x^2 + 2$$

Θα πρέπει να ισχύει

$$6k_1 = 1$$

$$-10k_1 + 6k_2 = 0$$

$$2k_1 - 5k_2 + 6k_3 = 2$$

$$k_1 = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow -10\left(\frac{1}{6}\right) + 6k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{5}{18}$$

$$\text{και } k_3 = \frac{55}{108}$$

$$\text{άρα } y_{\text{μερ}}(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{55}{108}$$

Τελικά η γενική λύση της Δ.Ε. (1) είναι

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{55}{108} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Μας δίνεται όμως $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, οπότε

$$1 = c_1 + c_2 + \frac{55}{108} \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{53}{108}$$

$$0 = c_1 e^3 + c_2 e^2 + \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{55}{108}$$

$$\Rightarrow c_1 e + c_2 = -\frac{79}{108 e^2}$$

$$\text{Άρα } c_1 = \frac{-79 - 53e^2}{108e^2(e-1)} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{53e^3 + 79}{108e^2(e-1)}$$

Αντικαθιστώντας τα c_1, c_2 στη γενική λύση βρίσκουμε τη λύση του Π.Α.Τ.

Άσκηση 2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 7 \quad (1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

Λύση

Όπως γνωρίζουμε η γενική λύση της (1) είναι

$$y(x) = y_{\text{ομ}}(x) + y_{\text{μερ}}(x), \quad \text{όπου}$$

$y_{\text{ομ}}(x)$ είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $y'' - 6y' + 9y = 0^{(2)}$ και $y_{\text{μερ}}(x)$ είναι

μια μερική λύση της (1). Επειδή δε η

$f(x)$ του δευτέρου μέλους της (1) είναι

$f(x) = 9x^2 - 12x - 7$, δευτέρου βαθμού ως προς

x , η $y_{\text{μερ}}(x)$ είναι $y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$

1. Εύρεση $y_{\text{ομ}}(x)$

$$\begin{array}{lcl} y'' & \longrightarrow & \lambda^2 \\ y' & \longrightarrow & \lambda \\ y & \longrightarrow & 1 \end{array}, \quad \text{άρα χ.ε : } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

διότι η αντίστοιχη ομογενής : $y'' - 6y' + 9 = 0$

Επιλύοντας τη $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ έχουμε

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3} \quad \text{διπλή ρίζα και άρα}$$

η γενική λύση
$$\boxed{y_{\text{ομ}}(x) = c_1 e^{3x} + x c_2 e^{3x}}$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές

2. Εύρεση $y_{\text{μερ}}(x)$

Όπως αναφέραμε $y_{\text{μερ}}(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ και θα πρέπει να ικανοποιεί

την Δ.Ε.(1) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x - 7$, δηλαδή

$$y_{\text{μερ}}'' - 6y_{\text{μερ}}' + 9y_{\text{μερ}} = 9x^2 - 12x - 7$$

$$\bullet \quad y_{\text{μερ}} = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$$

$$y_{\text{μερ}}' = 2k_1 x + k_2$$

$$y_{\text{μερ}}'' = 2k_1$$

$$\Rightarrow 2k_1 - 6(2k_1x + k_2) + 9(k_1x^2 + k_2x + k_3) = 9x^2 - 12x - 7$$

$$\Rightarrow 9k_1x^2 + (-12k_1 + 9k_2)x + (2k_1 - 6k_2 + 9k_3) = 9x^2 - 12x - 7$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 9k_1 = 9 \\ -12k_1 + 9k_2 = -12 \\ 2k_1 - 6k_2 + 9k_3 = -7 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = -1 \end{array}}$$

Τελικά η γενική λύση της Δ.Ε. (1)

$$y(x) = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x} + x^2 - 1 \quad \text{με } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3. Λύση του Π.Α.Τ.

Μας δίνεται ότι $y(0) = 1$ και $y'(0) = 5$

• $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 2}$

• $y'(0) = 5$. Η σχέση αυτή αφορά στην παράγωγο της γενικής λύσης και θα να

την χρησιμοποιήσουμε πρέπει να βρούμε την παράγωγο της $y(x)$, οπότε θα προκύψει και η τιμή της C_2 .

$$y(x) = C_1 e^{3x} + x C_2 e^{3x} + x^2 - 1$$

$$\Rightarrow y'(x) = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3x C_2 e^{3x} + 2x$$

$$\bullet y'(0) = 5$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{C_2 = -1, C_1 = 2}$$

Τελικά, λύση του Π.Α.Τ. είναι η

$$\boxed{y(x) = 2e^{3x} - xe^{3x} + x^2 - 1} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{y(x) = (2-x)e^{3x} + x^2 - 1}$$